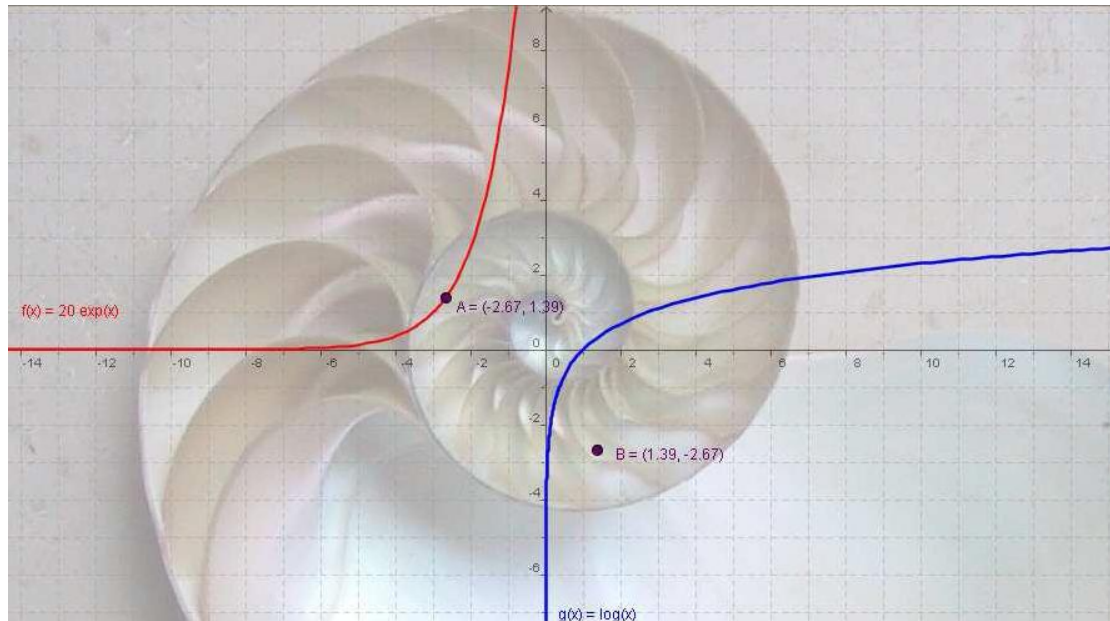


# ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΜΕ ΤΟ GeoGebra\*

## Α' ΛΥΚΕΙΟΥ

### ΤΕΤΡΑΔΙΟ ΜΑΘΗΤΗ



Στέφανος Κεϊσογλου, Καθηγητής Μαθηματικών M.ed

\*[www.geogebra.org](http://www.geogebra.org)

ΥΠΕΠΘ / ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ  
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ «ΚΟΙΝΩΝΙΑ ΤΗΣ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΑΣ»



Γ' ΚΟΙΝΟΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ ΣΤΗΡΙΞΗΣ  
ΕΡΓΟ ΣΥΓΧΡΗΜΑΤΟΔΟΤΟΥΜΕΝΟ ΚΑΤΑ 80% ΑΠΟ ΤΟ ΕΚΤ  
ΚΑΙ ΚΑΤΑ 20% ΑΠΟ ΕΘΝΙΚΟΥΣ ΠΟΡΟΥΣ  
«Ολοκληρωμένη Αξιοποίηση των Τ.Π.Ε. στην Εκπαιδευτική Διαδικασία»

**Τεχνική Υποστήριξη**

Δικτυακός Τόπος : [www.intracom-schools.gr](http://www.intracom-schools.gr) και  
Ηλεκτρονικό ταχυδρομείο : [support\\_it@intracom-it.gr](mailto:support_it@intracom-it.gr)

Τηλέφωνο : 210-6679105

Fax : 210-6679106

Υπεύθυνη : κα Μπερτσά Όλγα

## Περιεχόμενα

ΑΛΓΕΒΡΑ ΤΗΣ Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ .....	5
ΑΠΟΛΥΤΗ ΤΙΜΗ.....	5
Η ΕΥΘΕΙΑ $\psi = \alpha \cdot x + \beta$ .....	7
ΠΑΡΑΛΛΗΛΕΣ ΚΑΙ ΚΑΘΕΤΕΣ ΕΥΘΕΙΕΣ .....	9
Η ΕΥΘΕΙΑ $\alpha\chi + \beta\psi = \gamma$ .....	11
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ .....	13
Η ΥΠΕΡΒΟΛΗ .....	15
ΤΟ ΤΡΙΩΝΥΜΟ .....	17
ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΤΗΣ Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ .....	21
ΓΩΝΙΕΣ ΤΡΙΓΩΝΟΥ.....	21
ΚΕΝΤΡΟ ΒΑΡΟΥΣ ΤΡΙΓΩΝΟΥ .....	25
ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΕΣ ΣΕ ΚΥΚΛΟ .....	27
ΙΣΟΤΗΤΑ - ΟΜΟΙΟΤΗΤΑ ΤΡΙΓΩΝΩΝ .....	29
Η ΣΚΑΛΑ.....	31
ΤΡΑΠΕΖΙΟ .....	33
ΕΓΓΕΓΡΑΜΜΕΝΟ ΤΕΤΡΑΠΛΕΥΡΟ.....	35
ΚΕΝΤΡΑ ΤΡΙΓΩΝΟΥ .....	37
ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΜΠΙΛΙΑΡΔΟΥ .....	39
ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΣ ΤΟΠΟΣ .....	41



# ΑΛΓΕΒΡΑ ΤΗΣ Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

## ΑΠΟΛΥΤΗ ΤΙΜΗ

Τάξη: Α΄

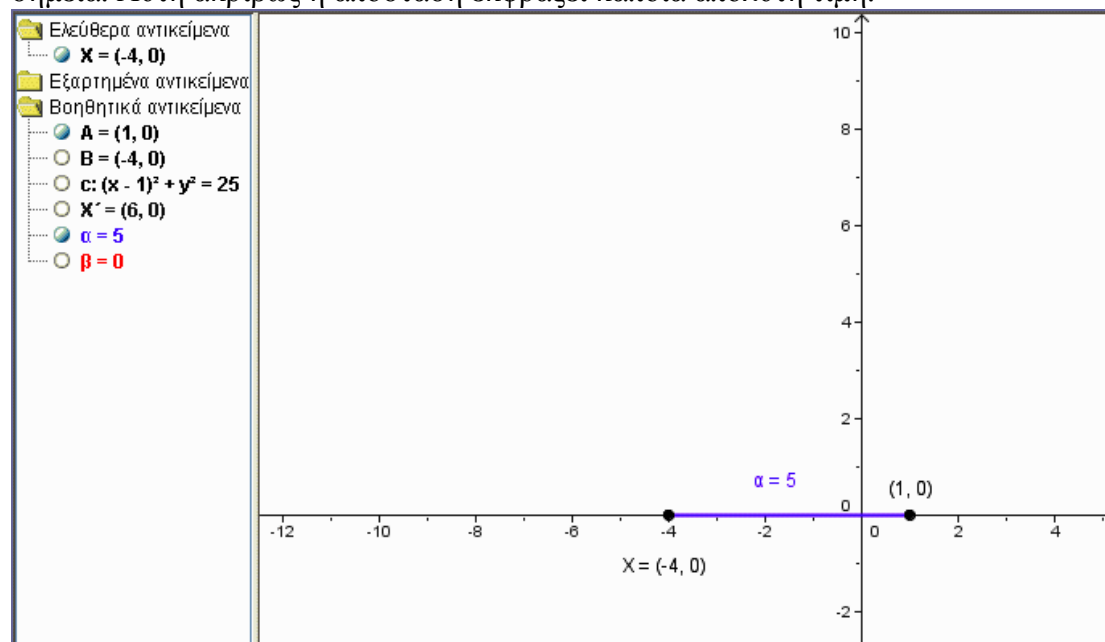
Όνομ/νυμο μαθητών:

1. ....
2. ....

### Φύλλο εργασίας

Στην οθόνη προβάλλονται:

Ένα σύστημα αξόνων, δύο σημεία με τις συντεταγμένες τους πάνω στον άξονα  $x'x$ . Η απόσταση των δύο σημείων εμφανίζεται πάνω από το τμήμα που ενώνει τα δύο αυτά σημεία. Αυτή ακριβώς η απόσταση εκφράζει κάποια απόλυτη τιμή.



Ο στόχος μας είναι να χρησιμοποιήσουμε την απόσταση αυτή για να λύσουμε εξισώσεις ή ανισώσεις που περιέχουν απόλυτες τιμές με γεωμετρικό τρόπο.

**ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ ΓΙΑ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ:**

- 1) Να εμφανίσετε τον κύκλο  $c$  και το σημείο  $X'$ . Να σύρετε το κέντρο του κύκλου στην αρχή των αξόνων. Να περιγράψετε μία μέθοδο με την οποία μπορούμε να λύνουμε εξισώσεις της μορφής  $|x|=θ$  με την βοήθεια της κατασκευής.

- 2) Να περιγράψετε μία μέθοδο με την οποία μπορούμε να λύνουμε εξισώσεις της μορφής  $|x-κ|=θ$  με την βοήθεια της κατασκευής.

- 3) Να αποκρύψετε τον κύκλο  $c$  και το σημείο  $X'$ . Να εμφανίσετε το σημείο  $B$  και την μέτρησή του και το τμήμα  $β$ . Να περιγράψετε μία μέθοδο με την οποία μπορούμε να λύσουμε την εξίσωση  $|x+8|+|x-1|=9$  με την βοήθεια της κατασκευής.

- 4) Να λύσετε την εξίσωση  $|x+6|+|x|=2$ . Τι παρατηρείτε;

## Η ΕΥΘΕΙΑ $\psi = \alpha \cdot x + \beta$

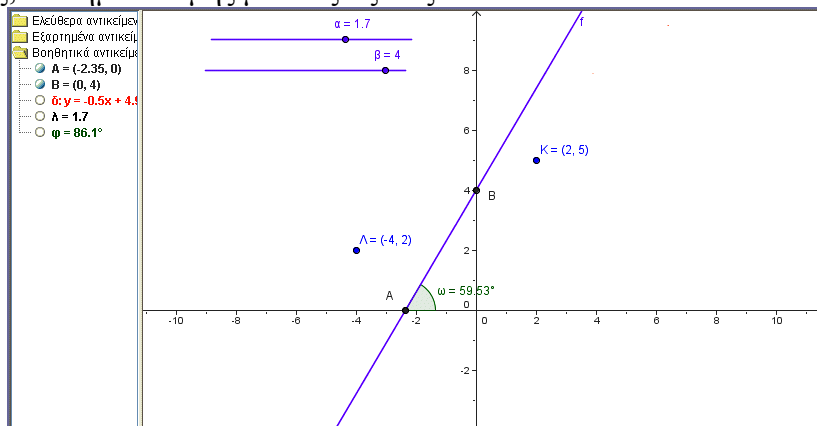
Τάξη: Α΄

Όνομ/νυμο μαθητών:

1. ....
  2. ....
- .....

### Φύλλο εργασίας

Στην οθόνη προβάλλεται μία ευθεία, 2 μεταβολείς  $\alpha$ ,  $\beta$ , τα σημεία τομής A, B της ευθείας με τους άξονες, καθώς και η γωνία  $\omega$  της ευθείας με τους άξονες. Επιπλέον εμφανίζονται και δύο ελεύθερα σημεία K, Λ. Ο στόχος μας είναι να μελετήσουμε τις σχέσεις που συνδέουν τις διάφορες παραμέτρους της ευθείας όπως τον συντελεστή διεύθυνσης, τα σημεία τομής με τους άξονες κ.λ.π.



**ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ ΓΙΑ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ:**

1) Να μεταβάλλεται τις τιμές του μεταβολέα  $\alpha$ . Τι παρατηρείτε;

2) Να μεταβάλετε τις τιμές του μεταβολέα  $\beta$ . Τι παρατηρείτε;

3) Να εντοπίσετε τι μετρά ο βοηθητικός αριθμός  $\lambda$  και τι σχέση έχει με την ευθεία. Να κατασκευάσετε μία ευθεία η οποία να σχηματίζει γωνία  $35^\circ$  με τον άξονα  $x'x$ . Ποιος είναι ο συντελεστής διεύθυνσης; Πόσες τέτοιες ευθείες μπορείτε να κατασκευάσετε;

4) Να κατασκευάσετε μία ευθεία η οποία να περνά από τα σημεία  $K, \Lambda$ . Ποια είναι η ευθεία; Να αλλάξετε τις θέσεις των  $K, \Lambda$  και να επαναλάβετε αρκετές φορές την μετακίνηση της ευθείας. Ποια σχέση έχει ο αριθμός  $\alpha$  με τους συντελεστές της ευθείας;



## ΠΑΡΑΛΛΗΛΕΣ ΚΑΙ ΚΑΘΕΤΕΣ ΕΥΘΕΙΕΣ

Τάξη: Α΄

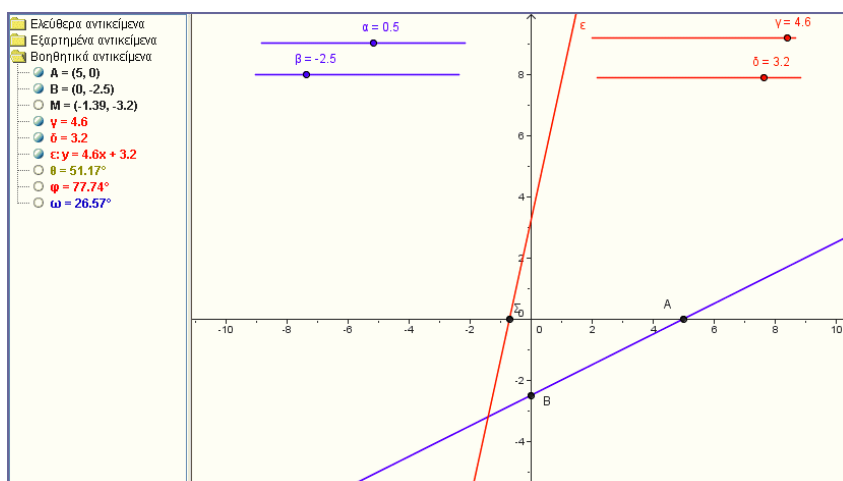
Όνομ/νυμο μαθητών:

1. ....
  2. ....
- .....

### Φύλλο εργασίας

Στην οθόνη προβάλλονται δύο ευθείες και οι μεταβολείς με τους οποίους μπορούμε να μεταβάλουμε τις παραμέτρους των ευθειών. Επιπλέον προβάλλονται ορισμένα σημεία τομής των ευθειών με τους άξονες.

Στα βοηθητικά αντικείμενα υπάρχουν, με απόκρυψη, οι γωνίες που σχηματίζουν οι ευθείες με τον άξονα  $x'x$ , καθώς και η γωνία μεταξύ των δύο ευθειών.



**ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ ΓΙΑ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ:**

- 1) Να εμφανίσετε τις γωνίες  $\varphi$ ,  $\omega$ . Να μεταβάλλετε τις παραμέτρους των δύο ευθειών μέχρις ότου να γίνουν παράλληλες. Τι σχέση έχουν οι συντελεστές διεύθυνσης των ευθειών. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

- 2) Να μεταβάλλετε τις παραμέτρους των δύο ευθειών μέχρις ότου να γίνουν κάθετες. Τι σχέση έχουν οι συντελεστές διεύθυνσης των ευθειών. Να πειραματιστείτε και με άλλες θέσεις. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας με βάση το σχήμα.

- 3) Να επιλέξετε κατάλληλες τιμές για τις παραμέτρους των ευθειών ώστε αυτές να είναι παράλληλες και να απέχουν απόσταση 4.

## ΕΥΘΕΙΑ $\alpha x + \beta y = \gamma$

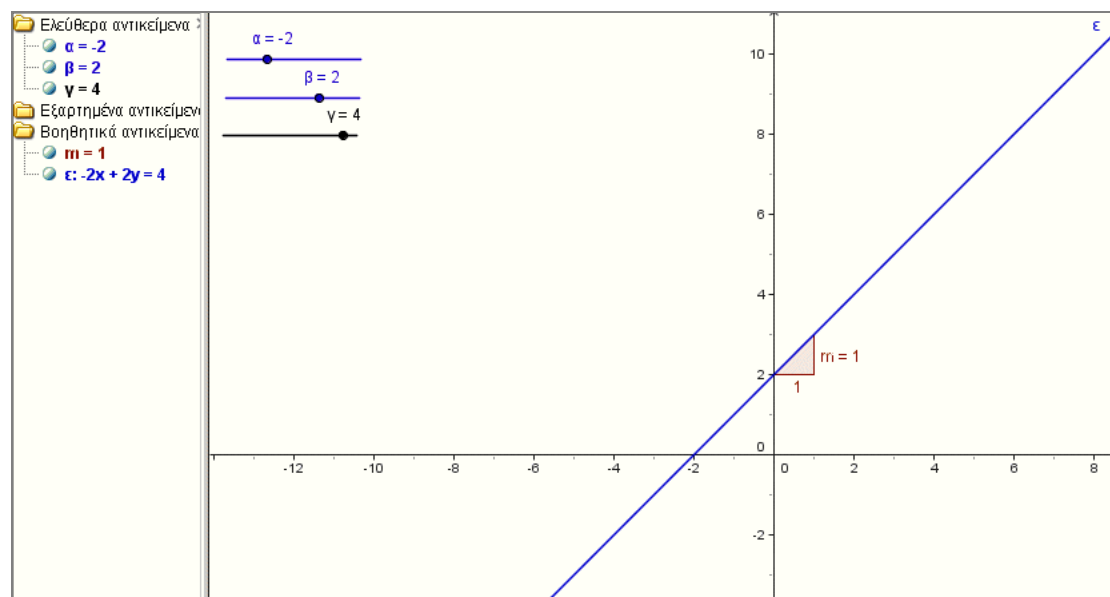
Τάξη: Α΄

Όνομ/νυμο μαθητών:

1. ....
2. ....

### Φύλλο εργασίας

Στην οθόνη προβάλλονται τρεις μεταβολείς  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  και μία ευθεία  $\alpha x + \beta y = \gamma$ . Επιπλέον εμφανίζεται η κλίση  $m$  της ευθείας, δηλαδή η εφαπτομένη της γωνίας που σχηματίζει η ευθεία με τον άξονα  $x'x$ . Ο στόχος μας είναι να διερευνήσουμε τον τρόπο με τον οποίο μεταβάλλεται η ευθεία και η κλίση της καθώς μεταβάλλονται οι παράμετροι  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ .



**ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ ΓΙΑ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ:**

- 1) Να μεταβάλλετε τις τιμές του μεταβολέα  $\alpha$ . Πως μεταβάλλετε η ευθεία;

- 2) Να μεταβάλλετε τις τιμές του μεταβολέα  $\beta$ . Σε τι διαφέρει ο τρόπος μεταβολής της ευθείας από αυτόν που παρατηρήσατε στο προηγούμενο ερώτημα;

- 3) Να παρατηρήσετε τις τιμές των  $\alpha$  και  $\beta$  καθώς μεταβάλλετε η ευθεία. Ποια σχέση συνδέει τις τιμές αυτές με την κλίση της ευθείας;

- 4) Πότε η ευθεία γίνεται παράλληλη στον άξονα  $x'$  και πότε κάθετη;

- 5) Πότε δεν ορίζεται ευθεία;

- 6) Να συνοψίσετε τα συμπεράσματά σας από την παραπάνω διερεύνηση και να διατυπώσετε προτάσεις σε αυστηρά μαθηματική ορολογία.

## ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

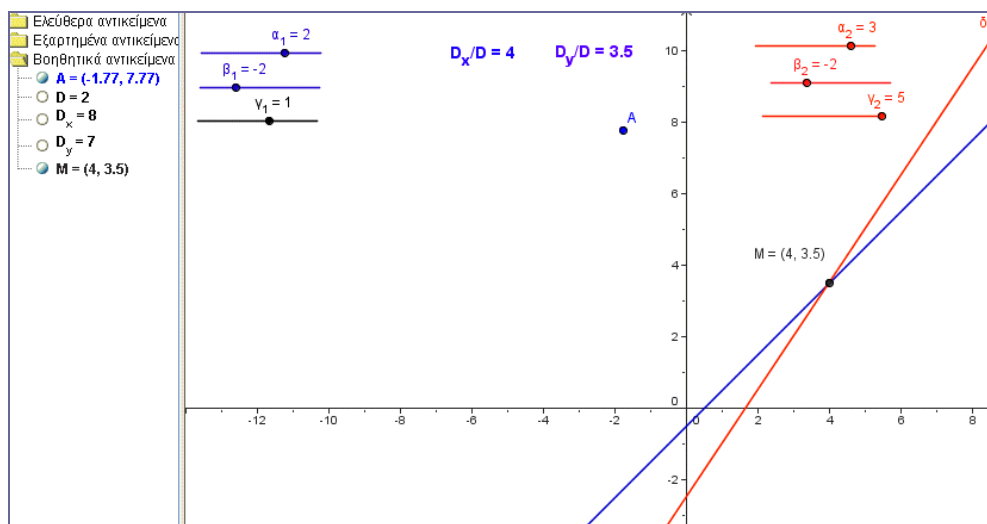
Τάξη: Α΄

Όνομ/νυμο μαθητών:

1. ....
2. ....

### Φύλλο εργασίας

Στην οθόνη προβάλλονται 6 μεταβολείς και 2 ευθείες.  
 Επιπλέον εμφανίζεται το σημείο τομής των δύο ευθειών, ένα ελεύθερο σημείο A και πέντε παραστάσεις, η D, η  $D_x$ , η  $D_y$ , η  $D_x/D$  και η  $D_y/D$ .  
 Ο στόχος μας είναι να βρούμε έναν τρόπο ώστε να λύσουμε ένα γραμμικό σύστημα  $2 \times 2$  με έναν σύντομο τρόπο που να είναι όμως έγκυρος από μαθηματική άποψη.



**ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ ΓΙΑ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ:**

- 1) Να μεταβάλετε τις τιμές στους μεταβολείς της ευθείας ( $\varepsilon$ ) που είναι μπλε. Πως μεταβάλλετε η ευθεία;

- 2) Ποιες είναι οι εξισώσεις των δύο ευθειών. Τι παριστάνει το σημείο τομής τους; Πως μπορούμε να λύσουμε ένα σύστημα με την βοήθεια των μεταβολέων; Τι σχέση έχουν οι συντεταγμένες του σημείου τομής με τις ποσότητες  $D_x/D$  και  $D_y/D$ ;

- 3) Να σύρετε τους μεταβολείς ώστε οι δύο ευθείες να γίνουν παράλληλες. Να εξηγήσετε το μήνυμα που εμφανίζεται στην οθόνη για τις ποσότητες  $D_x/D$  και η  $D_y/D$ .

- 4) Να κατασκευάσετε ένα σύστημα που να έχει για λύση τις συντεταγμένες του σημείου A.

## Η ΥΠΕΡΒΟΛΗ

Τάξη: Α΄

Όνομ/νυμο μαθητών:

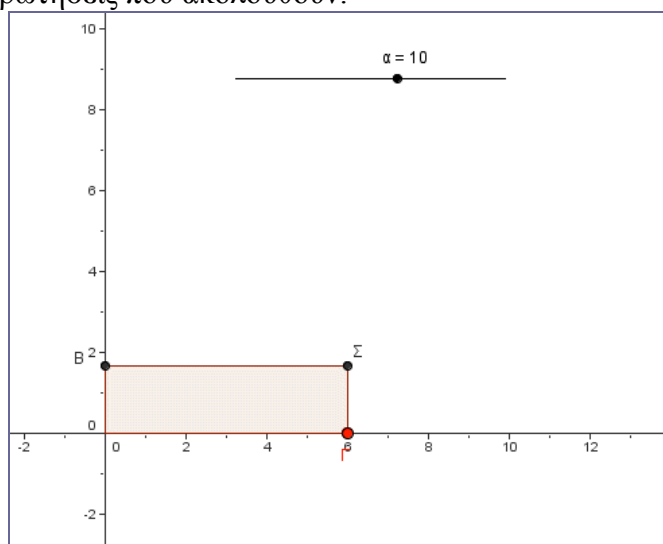
1. ....

2. ....

.....

### Φύλλο εργασίας

Στην οθόνη προβάλλεται ένα δυναμικό ορθογώνιο παραλληλόγραμμο το οποίο μεταβάλλεται όταν σύρουμε την κορυφή του Γ. Επιπλέον εμφανίζεται ένας μεταβολέας  $\alpha$ . Στα βοηθητικά αντικείμενα υπάρχει η μέτρηση του εμβαδού του τετραπλεύρου και μία συνάρτηση την οποία μπορείτε να επαναπροσδιορίσετε ανάλογα με τις ερωτήσεις που ακολουθούν.



Να απαντήσετε στα παρακάτω ερωτήματα.

**ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ ΓΙΑ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ:**

- 1) Να σύρετε το κόκκινο σημείο Γ. Πως μεταβάλλεται το ορθογώνιο. Ποια ποσά παραμένουν σταθερά και ποια μεταβάλλονται.

- 2) Να εμφανίσετε τις συντεταγμένες του σημείου Σ. Να σύρετε το σημείο Γ ώστε οι συντεταγμένες του Σ να γίνουν ακέραιες. Ποια σχέση έχουν οι συντεταγμένες με το εμβαδόν; Να επιλέξετε και άλλες θέσεις του Γ ώστε να ενισχύσετε την εικασία σας για την σχέση των συντεταγμένων του Σ με το εμβαδόν του ορθογωνίου.

- 3) Να εμφανίσετε το ίχνος του σημείου Σ και να σύρετε το σημείο Γ. Τι μορφή έχει η καμπύλη; Ποια συνάρτηση έχει αυτής της μορφής την γραφική παράσταση;

- 4) Χρησιμοποιώντας την βοηθητική συνάρτηση  $f(x)$  και την παράμετρο  $a$  να κατασκευάσετε μία συνάρτηση της οποίας η γραφική παράσταση να περνά από τα ίχνη των σημείων του Σ .

- 5) Να μεταβάλετε τις τιμές του  $a$  ώστε να γίνουν αρνητικές. Να πειραματιστείτε με διάφορες μορφές της συνάρτησης  $f$  που έχουν γραφική παράσταση παρόμοιες καμπύλες με αυτές του ερωτήματος 3



## ΤΟ ΤΡΙΩΝΥΜΟ

Τάξη: Α΄

Όνομ/νυμο μαθητών:

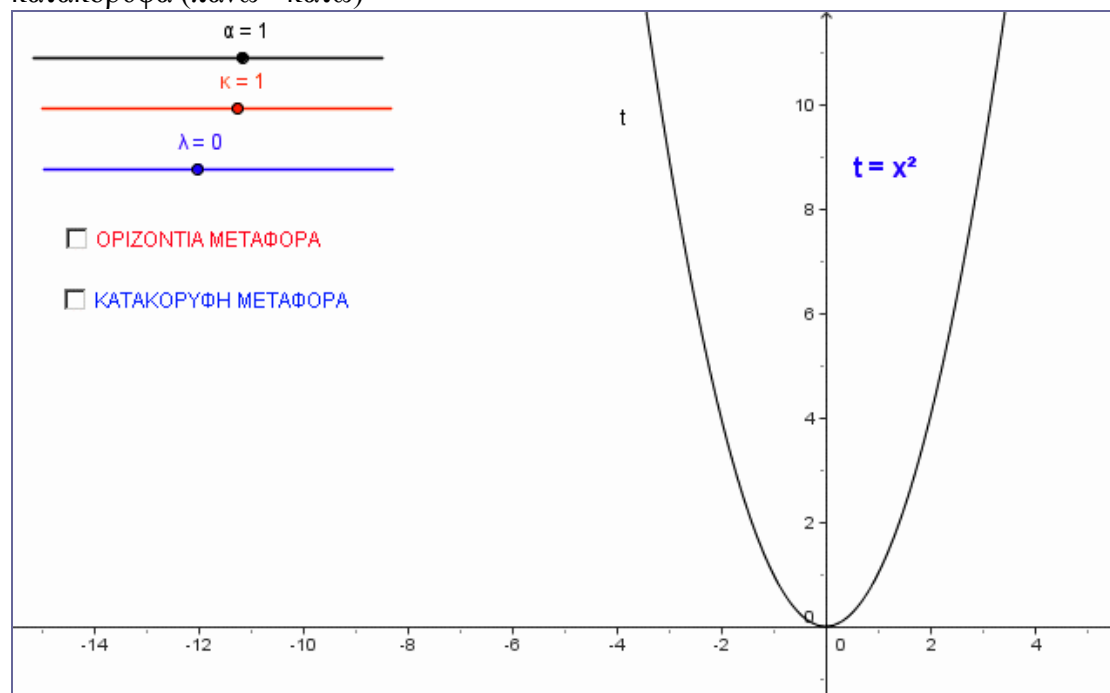
1. ....
  2. ....
- .....

### Φύλλο εργασίας

Στην οθόνη προβάλλονται:

Η γραφική παράσταση ενός τριωνύμου  $t$  και τρεις μεταβολείς  $\alpha$ ,  $\kappa$ ,  $\lambda$ . Επιπλέον εμφανίζονται δύο κουμπιά εμφάνισης και απόκρυψης, με τίτλους ΟΡΙΖΟΝΤΙΑ ΜΕΤΑΦΟΡΑ και ΚΑΤΑΚΟΡΥΦΗ ΜΕΤΑΦΟΡΑ.

Ο στόχος της δραστηριότητας είναι να διερευνήσουμε τις μεταβολές του τύπου του τριωνύμου όταν η γραφική του παράσταση μεταφέρεται οριζόντια (δεξιά-αριστερά) ή κατακόρυφα (πάνω - κάτω)



Να μεταφέρετε με τον κέρσορα την γραφική παράσταση προς τα δεξιά και στην συνέχεια προς τα πάνω.

Να απαντήσετε στα παρακάτω ερωτήματα

**ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ ΓΙΑ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ:**

1. Τι μετασχηματισμό παρατηρείτε στον τύπο του τριωνύμου όταν η γραφική του παράσταση μεταφέρεται δεξιά ως προς τον άξονα  $\psi\psi$ ;

2. Τι μετασχηματισμό παρατηρείτε στον τύπο του τριωνύμου όταν η γραφική του παράσταση μεταφέρεται πάνω ως προς τον άξονα  $\chi\chi$ ;

3. Να μελετήσετε τους μετασχηματισμούς του τύπου του τριωνύμου όταν η γραφική του παράσταση μεταφέρεται αριστερά του  $\psi\psi$  ή κάτω του  $\chi\chi$ .

4. Να διαγράψετε (ή να αποκρύψετε) την γραφική παράσταση του τριωνύμου  $t$  και να εμφανίσετε την γραφική παράσταση δύο άλλων συναρτήσεων με το κουμπί 'ΟΡΙΖΟΝΤΙΑ ΜΕΤΑΦΟΡΑ'. Να μεταβάλλετε τις παραμέτρους  $a$  και  $k$ . Ποια είναι η σχέση των δύο γραφικών παραστάσεων;

5. Να εμφανίσετε την γραφική παράσταση μίας επιπλέον συνάρτησης με το κουμπί 'ΚΑΤΑΚΟΡΥΦΗ ΜΕΤΑΦΟΡΑ'. Να μεταβάλλετε την παράμετρο  $\lambda$ . Ποια είναι η σχέση της νέας γραφικής παράστασης με τις προηγούμενες;

6. Να κατασκευάσετε με την βοήθεια των μεταβολών την γραφική παράσταση του τριωνύμου  $2x^2-12x+10$ . Πως μπορούμε να βρίσκουμε τις τιμές των παραμέτρων  $\alpha, \kappa, \lambda$  όταν μας δίνουν τους συντελεστές  $\alpha, \beta, \gamma$  στο τριώνυμο  $ax^2+bx+\gamma$ ;

7. Να συνοψίσετε τα συμπεράσματά σας σε αυστηρά μαθηματική ορολογία. Συγκεκριμένα να κατασκευάσετε τύπους οι οποίοι θα συνδέουν τις παραμέτρους  $\kappa, \lambda$  με τους συντελεστές  $\alpha, \beta, \gamma$  του τριωνύμου  $ax^2+bx+\gamma$ .



# ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΤΗΣ Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

## ΓΩΝΙΕΣ ΤΡΙΓΩΝΟΥ

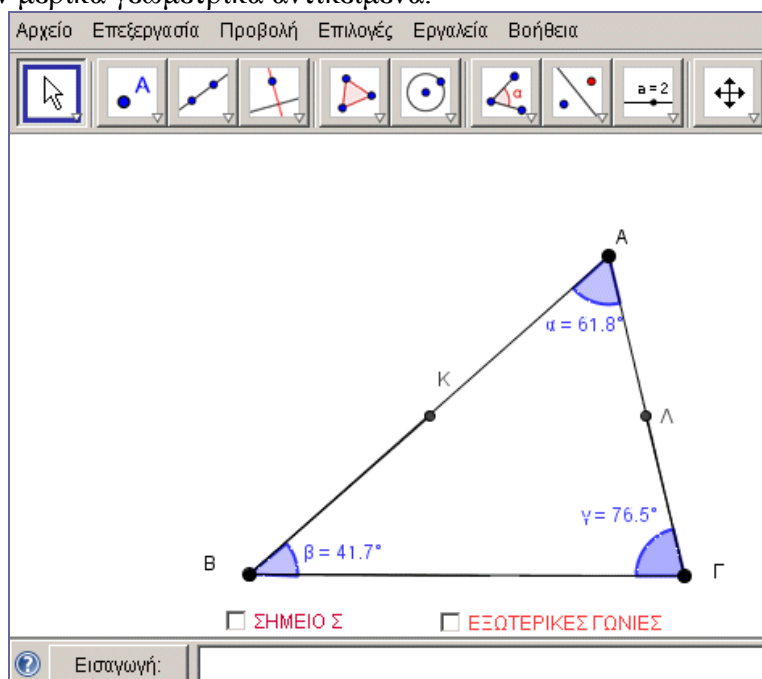
Τάξη: Α΄

Όνομ/νυμο μαθητών:

1. ....
2. ....

### Φύλλο εργασίας

Στην οθόνη προβάλλεται ένα τρίγωνο ΑΒΓ και οι μετρήσεις των γωνιών του. Δύο κουμπιά, το ‘ΣΗΜΕΙΟ Σ’ και οι ‘ΕΞΩΤΕΡΙΚΕΣ ΓΩΝΙΕΣ’ εμφανίζονται και αποκρύπτουν μερικά γεωμετρικά αντικείμενα.



Ο στόχος μας είναι να μελετήσουμε και να αποδείξουμε την σχέση που υπάρχει μεταξύ των γωνιών του τριγώνου (εσωτερικών και εξωτερικών).  
 Να απαντήσετε στα παρακάτω ερωτήματα.

**ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ ΓΙΑ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ:**

- 1) Να σύρετε την κορυφή Α και να προσθέσετε τα μέτρα των γωνιών. Τι παρατηρείτε; Να εμφανίσετε το σημείο Σ και επαναλάβετε το σύρσιμο της κορυφής Α. Τι παρατηρείτε ως προς το άθροισμα των γωνιών;

- 2) Να μετακινήσετε τις κορυφές Β και Γ ώστε να συμπέσουν με την κορυφή Α. Ποια είναι τώρα η θέση των μη κοινών πλευρών των γωνιών αυτών ως προς την ΒΓ. Να φέρετε από το σημείο Α μία παράλληλη προς την ΒΓ. Τι παρατηρείτε;

- 3) Πως μπορούμε να αποδείξουμε ότι το άθροισμα των γωνιών του τριγώνου είναι ίσο με  $180^{\circ}$ ;

- 4) Να επαναφέρετε τις κορυφές Β και Γ στην αρχική τους θέση. Να εμφανίσετε τις εξωτερικές γωνίες του τριγώνου. Να συγκρίνεται την φ με το άθροισμα των γωνιών Α και Γ. Τι παρατηρείτε; Πως μπορείτε να δικαιολογήσετε την σχέση αυτή;

- 5) Να συγκρίνεται την γωνία  $\theta$  με το άθροισμα των γωνιών A και B. Τι παρατηρείτε; Πως μπορείτε να δικαιολογήσετε την σχέση αυτή; Να διατυπώσετε έναν κανόνα.

- 6) Να διαγράψετε το τρίγωνο και να κατασκευάσετε ένα τετράπλευρο με το αντίστοιχο εργαλείο που διαθέτει το λογισμικό. Να μετρήσετε τις γωνίες του και να τις προσθέσετε. Τι παρατηρείτε ως προς το άθροισμα των γωνιών αυτών; Να διατυπώσετε έναν κανόνα.

- 7) Να κατασκευάσετε τις εξωτερικές γωνίες του τετραπλεύρου, να υπολογίσετε το άθροισμα και να μεταβάλετε το τετράπλευρο. Τι παρατηρείτε ως προς το άθροισμα; Να εξετάσετε αν ισχύει το ίδιο σε οποιοδήποτε πολύγωνο.





## ΚΕΝΤΡΟ ΒΑΡΟΥΣ ΤΡΙΓΩΝΟΥ

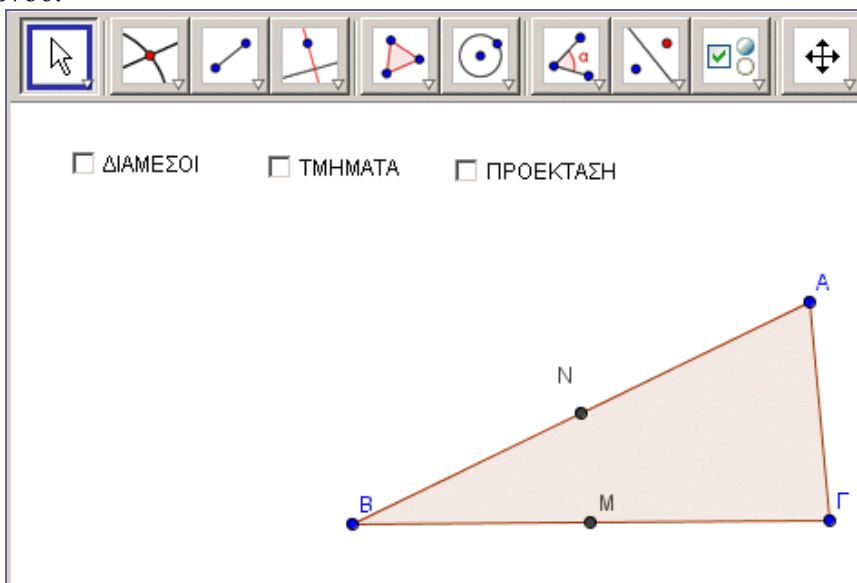
Τάξη: Α΄

Όνομ/νυμο μαθητών:

1. ....
  2. ....
- .....

### Φύλλο εργασίας

Στην οθόνη προβάλλεται ένα τρίγωνο  $AB\Gamma$  και τα μέσα των πλευρών του  $M, N$ . Το κουμπί ‘ΔΙΑΜΕΣΟΙ’ εμφανίζει και αποκρύπτει τις διαμέσους. Το κουμπί ‘ΤΜΗΜΑΤΑ’ εμφανίζει και αποκρύπτει τμήματα πάνω στην διάμεσο  $AM$ . Το κουμπί ‘ΠΡΟΕΚΤΑΣΗ’ εμφανίζει και αποκρύπτει βοηθητικές ευθείες. Ο στόχος μας είναι να μελετήσουμε τις ιδιότητες του σημείου τομής των διαμέσων του τριγώνου.



Να απαντήσετε στα παρακάτω ερωτήματα.

**ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ ΓΙΑ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ:**

- 1) Να εμφανίσετε τις διαμέσους του τριγώνου. Να σύρετε την κορυφή Α. Τι παρατηρείτε;

- 2) Να εμφανίσετε τα τμήματα ΑΚ και ΚΜ με το κουμπί 'ΤΜΗΜΑΤΑ'. Να μεταβάλλετε την κορυφή Α και να συγκρίνετε τα μήκη τους. Τι παρατηρείτε;

- 3) Να αποκρύψετε τις διαμέσους και να εμφανίσετε τα τμήματα που αποκρύπτει το κουμπί 'ΠΡΟΕΚΤΑΣΗ'. Να σύρετε το σημείο Π ώστε να συμπέσει με το σημείο Κ. Υπάρχει στο σχήμα κάποιο τετράπλευρο που φαίνεται να είναι παραλληλόγραμμο; Να δικαιολογήσετε με μαθηματικό τρόπο την παρατήρησή σας.

- 4) Χρησιμοποιήστε τις ιδιότητες του παραλληλογράμμου για να δικαιολογήσετε το γεγονός ότι  $ΠΡ=2ΠΜ$ . Με βάση τα προηγούμενα να περιγράψετε μία απόδειξη της ιδιότητας που έχετε εντοπίσει στην ερώτηση 2.

- 5) Να περιγράψετε έναν τρόπο με τον οποίο θα μπορούμε να κατασκευάσουμε το κέντρο βάρους ενός τριγώνου φέροντας μόνο μια από τις διαμέσους.

## ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΕΣ ΣΕ ΚΥΚΛΟ

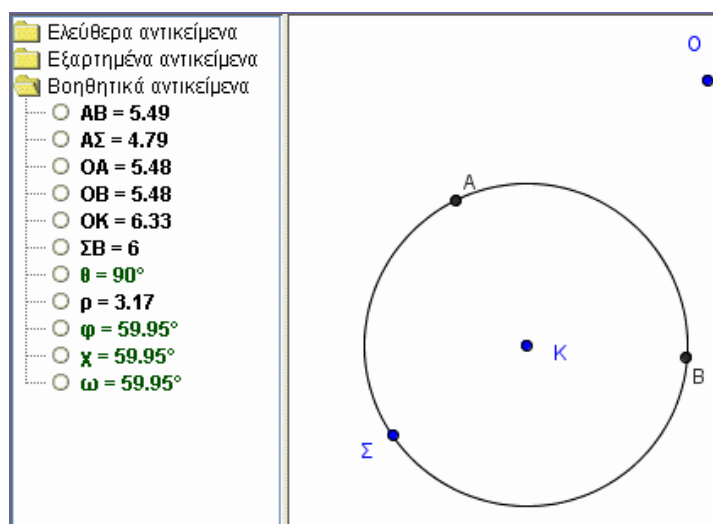
Τάξη: Α΄

Όνομ/νυμο μαθητών:

1. ....
  2. ....
- .....

### Φύλλο εργασίας

Στην οθόνη προβάλλεται ένας κύκλος, ένα σημείο  $O$  εκτός κύκλου και τρία σημεία  $\Sigma$ ,  $A$ ,  $B$  πάνω στον κύκλο.



Να απαντήσετε στα παρακάτω ερωτήματα.

### ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ ΓΙΑ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ:

- 1) Να εμφανίσετε το τμήμα  $OA$ , την ακτίνα  $\rho$  και την γωνία  $\theta$ . Να μεταφέρετε το σημείο  $O$  σε διάφορες θέσεις. Να αλλάξετε την ακτίνα του κύκλου σύροντας το σημείο  $\Sigma$ . Ποια φαίνεται να είναι η θέση του τμήματος  $OA$  ως προς τον κύκλο; Να εμφανίσετε την γωνία  $\theta$ . Να δικαιολογήσετε την θέση του τμήματος  $OA$  ως προς τον κύκλο με βάση την μέτρηση της γωνίας.

- 2) Να εμφανίσετε το τμήμα  $OB$  να σύρετε το σημείο  $O$ . Να εξηγήσετε γιατί το τμήμα  $OB$  είναι εφαπτόμενο με βάση τις μετρήσεις.

- 3) Να εμφανίσετε τα τμήματα  $SA$ ,  $SB$  και  $AB$ . Ακόμη να εμφανίσετε τις γωνίες  $\varphi$  και  $\chi$ . Να σύρετε το σημείο  $O$ . Ποια σχέση συνδέει τις δύο γωνίες;

- 4) Να εμφανίσετε το τμήμα  $OK$  και την γωνία  $\omega$ . Να μετρήσετε την γωνία  $\omega$ . Να σύρετε το σημείο  $O$  και το σημείο  $S$ . Ποια σχέση συνδέει την γωνία  $\omega$  με την γωνία  $\varphi$  και ποια με την γωνία  $\chi$ ; Να δικαιολογήσετε με βάση το σχήμα (όχι τις μετρήσεις) γιατί  $\omega = \varphi$ . Στην συνέχεια να δικαιολογήσετε γιατί  $\omega = \chi$ .

## ΙΣΟΤΗΤΑ - ΟΜΟΙΟΤΗΤΑ ΤΡΙΓΩΝΩΝ

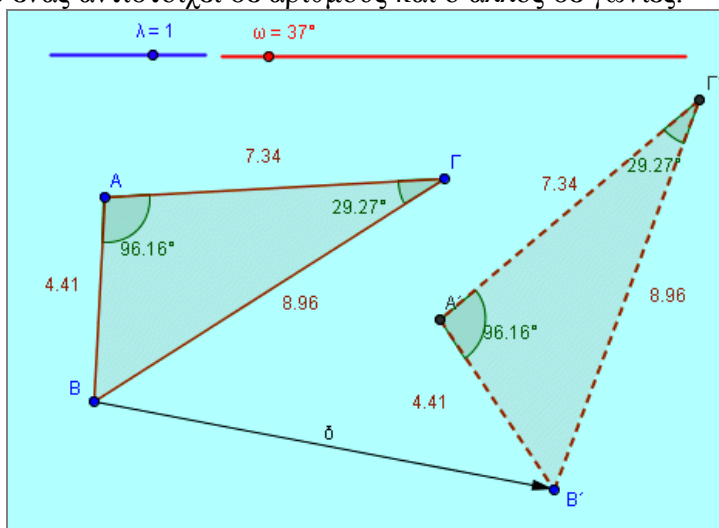
Τάξη: Α΄

Όνομ/νυμο μαθητών:

1. ....
  2. ....
- .....

### Φύλλο εργασίας

Στην οθόνη προβάλλονται δύο τρίγωνα  $AB\Gamma$  και  $A'B'\Gamma'$  και δύο μεταβολείς, από τους οποίους ο ένας αντιστοιχεί σε αριθμούς και ο άλλος σε γωνίες.



Να μεταβάλλετε το τρίγωνο  $AB\Gamma$  σύροντας τις κορυφές του και να απαντήσετε στα παρακάτω ερωτήματα.

#### ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ ΓΙΑ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ:

1. Ποια σχέση έχουν οι πλευρές και ποια οι γωνίες των δύο τριγώνων;

2. Πως έχει προκύψει το τρίγωνο  $A'B'\Gamma'$  από το  $AB\Gamma$ ; Να απαντήσετε αλλάζοντας τις τιμές της γωνίας  $\omega$  και σύροντας το σημείο  $B'$  μέχρι να ταυτιστεί με το  $B$ .

3. Να αλλάξετε τις τιμές του μεταβολέα  $\lambda$ . Ποιες μεταβολές υφίσταται τώρα το τρίγωνο  $A'B'T'$ ; Ποια μεγέθη παραμένουν σταθερά και ποια μεταβάλλονται;

4. Με ποιόν τρόπο οι τιμές του  $\lambda$  επηρεάζουν την μεταβολή των πλευρών του  $A'B'T'$ . Με  $\lambda < 1$  να ορίσετε γωνία περιστροφής  $\theta^\circ$  για το τρίγωνο  $A'B'T'$ . Ποια σχέση έχουν τώρα οι πλευρές των δύο τριγώνων

5. Όπως είδαμε το τρίγωνο  $A'B'T'$  προκύπτει από το τρίγωνο  $AB\Gamma$  με την βοήθεια τριών γεωμετρικών μετασχηματισμών. Μεταφορά κατά διάνυσμα  $\delta$ , περιστροφή κατά γωνία  $\omega$  και διαστολή κατά συντελεστή  $\lambda$ . Ποιοι από τους μετασχηματισμούς αυτούς διατηρούν όλα τα μεγέθη ενός τριγώνου και ποιοι διατηρούν μόνο την μορφή του,

## Η ΣΚΑΛΑ

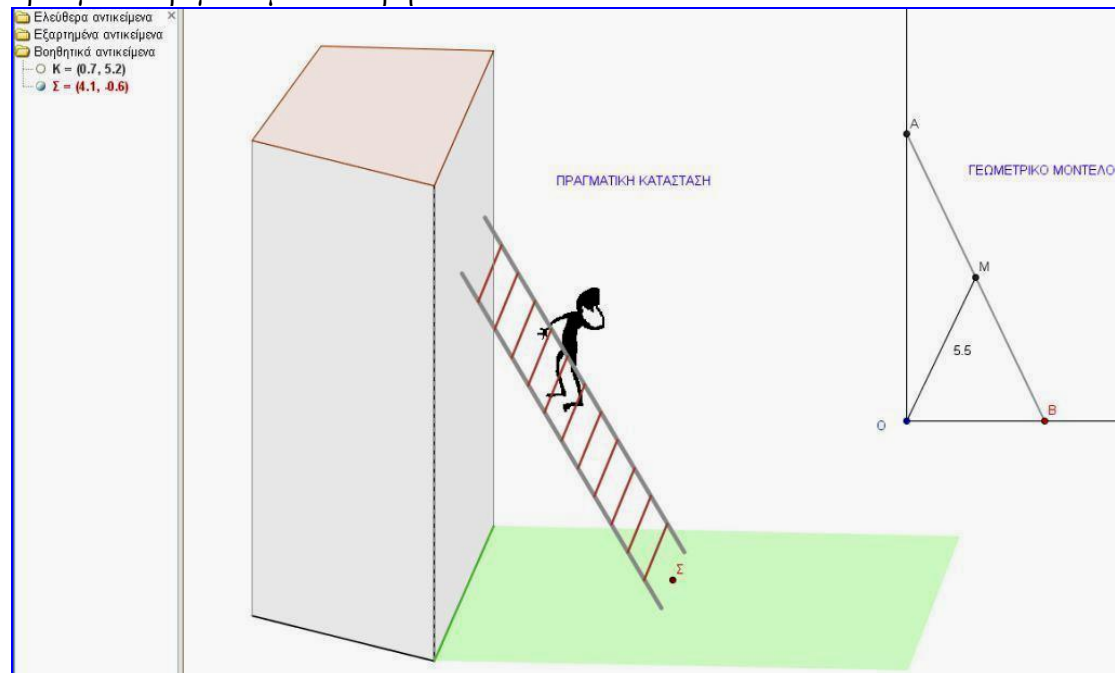
Τάξη: Α΄

Όνομ/νυμο μαθητών:

1. ....
2. ....

### Φύλλο εργασίας

Στην οθόνη προβάλλεται η προσομοίωση μιας πραγματικής κατάστασης (όχι και τόσο ευχάριστης για τον άνθρωπο που βρίσκεται πάνω στην σκάλα) Δίπλα από την κατάσταση βρίσκεται ένα γεωμετρικό μοντέλο της κατάστασης, δηλαδή ένα ορθογώνιο τρίγωνο με σταθερή υποτείνουσα.



Να απαντήσετε στα παρακάτω ερωτήματα.

**ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ ΓΙΑ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ:**

1. Να σύρετε το σημείο Σ. Ποια πορεία ακολουθεί ο άνθρωπος καθώς η σκάλα κατέρχεται ή ανέρχεται;

2. Να εμφανίσετε το σημείο Κ πάνω στο σκαλί που βρίσκεται ο άνθρωπος και να εμφανίσετε το ίχνος του. Ποια καμπύλη φαίνεται να διαγράφει το σημείο αυτό όταν σύρεται η σκάλα;

3. Ας έρθουμε τώρα στο γεωμετρικό μοντέλο της σκάλας. Να σύρετε την κορυφή Γ. Ποια μεγέθη του ορθογωνίου τριγώνου μεταβάλλονται και ποια παραμένουν σταθερά; Να διατυπώσετε μία πρόταση που φαίνεται να ισχύει για την διάμεσο ενός ορθογωνίου τριγώνου που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα.

4. Μπορείτε με βάση το μοντέλο να δικαιολογήσετε την γραμμή που διαγράφει ο άνθρωπος καθώς ολισθαίνει η σκάλα;



## ΤΡΑΠΕΖΙΟ

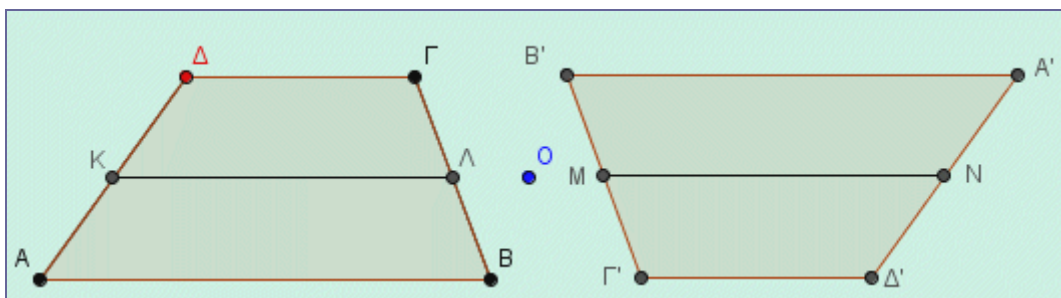
Τάξη: Α΄

Όνομ/νυμο μαθητών:

1. ....
  2. ....
- .....

### Φύλλο εργασίας

Στην οθόνη προβάλλονται δύο τραπέζια και οι διάμεσοί τους ΚΛ και ΜΝ. Ο στόχος μας είναι να μελετήσουμε τις ιδιότητες των διαμέσων και την σχέση τους με τις βάσεις των τραπεζίων.



Να απαντήσετε στα παρακάτω ερωτήματα.

**ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ ΓΙΑ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ:**

1. Να σύρετε τις κορυφές του τραπεζίου  $AB\Gamma\Delta$  και στην συνέχεια το σημείο  $O$ . Ποια σχέση συνδέει τα δύο τραπέζια;

2. Να προβάλλετε τις μετρήσεις των πλευρών των δύο τραπεζίων. Ποια σχέση συνδέει το τμήμα  $K\Lambda$  με τις βάσεις του τραπεζίου στο οποίο ανήκει; Να απαντήσετε με βάση τις τιμές των τμημάτων.

3. Να σύρετε το σημείο  $O$  ώστε να 'ενωθούν' τα δύο τραπέζια, δηλαδή να συμπέσουν τα σημεία  $B$  και  $\Gamma'$ . Τι σχήμα είναι το  $\Delta A'\Delta'A$ ;

4. Να διατυπώσετε τα συμπεράσματά σας για την διάμεσο ενός τραπεζίου. Να δικαιολογήσετε, με βάση τα όσα ισχύουν από το πρώτο και τρίτο ερώτημα, τα συμπεράσματά σας.

5. Να σύρετε την κορυφή  $\Delta$  ώστε να συμπέσει με την  $\Gamma$ . Τώρα το τραπέζιο έγινε τρίγωνο. Ποια σχέση συνδέει το τμήμα  $K\Lambda$  με την βάση  $AB$  του τριγώνου; Πως μπορείτε να δικαιολογήσετε την σχέση αυτή με βάση τα προηγούμενα;

## ΕΓΓΕΓΡΑΜΜΕΝΟ ΤΕΤΡΑΠΛΕΥΡΟ

Τάξη: Α΄

Όνομ/νυμο μαθητών:

3. ....

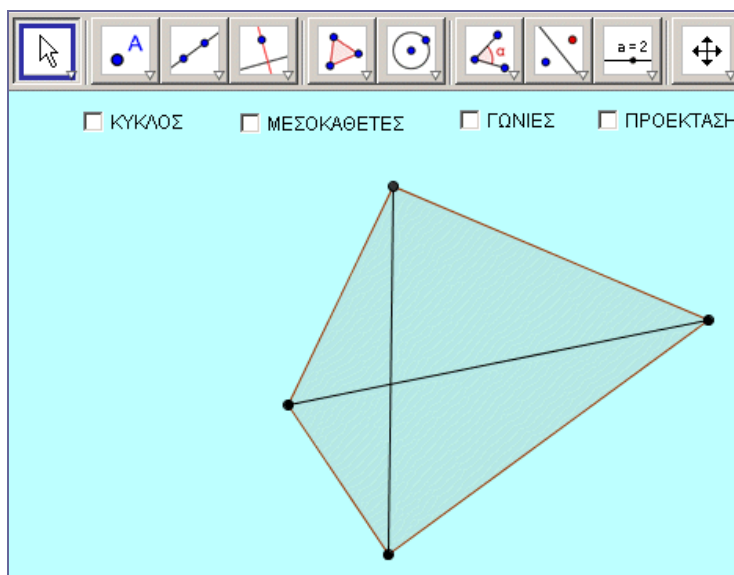
4. ....

.....

### Φύλλο εργασίας

Στην οθόνη προβάλλεται ένα τετράπλευρο και οι διαγώνιοί του. Τέσσερα κουμπιά επιτρέπουν να εμφανίζονται ή να αποκρύπτονται γεωμετρικά αντικείμενα που περιγράφει η ονομασία των κουμπιών.

Ο στόχος μας είναι να μελετήσουμε τις ιδιότητες των εγγεγραμμένων τετραπλεύρων σε κύκλο.



Να απαντήσετε στα παρακάτω ερωτήματα.

**ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ ΓΙΑ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ:**

- 1) Να ελέγξετε αν το τετράπλευρο είναι εγγράψιμο εμφανίζοντας τον κύκλο που περνά από τα σημεία ΑΔΓ.

- 2) Να εμφανίσετε τις μεσοκαθέτους των πλευρών του τετραπλεύρου, δηλαδή τις ευθείες  $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \epsilon_4$ . Τι παρατηρείτε; Να μετακινήσετε τις κορυφές του τετραπλεύρου. Τι παρατηρείτε; Πως συνδέεται η πρώτη με την δεύτερη ερώτηση;

- 3) Να εμφανίσετε τις γωνίες του τετραπλεύρου, δηλαδή τις γωνίες Α, Β, Γ, Δ. Τι σχέση έχουν οι απέναντι γωνίες;. Να μετακινήσετε τις κορυφές του τετραπλεύρου. Εξακολουθεί να ισχύει η ίδια σχέση;

- 4) Να εμφανίσετε και τα υπόλοιπα βοηθητικά αντικείμενα, δηλαδή την προέκταση και τις γωνίες  $\alpha, \beta, \gamma$ . Να μετακινήσετε τις κορυφές του τετραπλεύρου και να δικαιολογήσετε τις ισότητες των μετρήσεων των γωνιών που παρατηρούνται σε όλο πλέον το σχήμα.

## ΚΕΝΤΡΑ ΤΡΙΓΩΝΟΥ

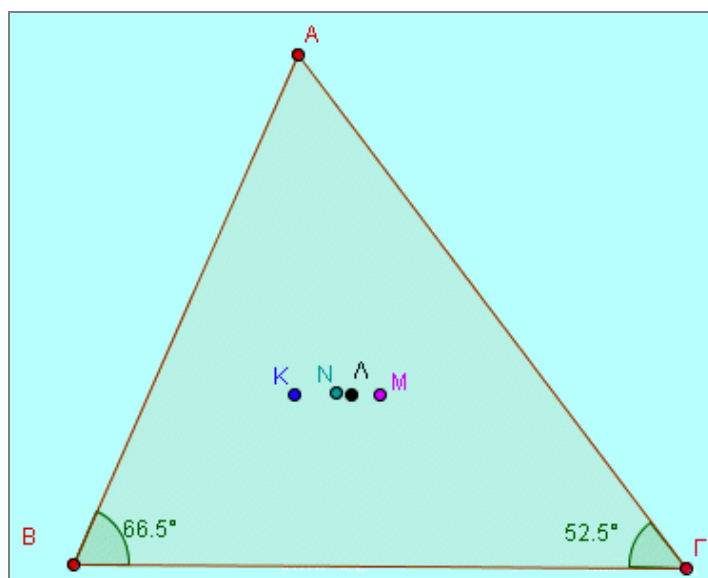
Τάξη: Α'

Όνομ/νυμο μαθητών:

1. ....
  2. ....
- .....

### Φύλλο εργασίας

Στο τρίγωνο ΑΒΓ έχουν κατασκευαστεί τα τέσσερα κέντρα του τριγώνου (περίκεντρο, έκκεντρο, βαρύκεντρο και ορθόκεντρο). Στην συνέχεια ο κατασκευαστής απέκρυψε όλες τις ευθείες που τα έχουν δημιουργήσει και τους έδωσε από ένα όνομα, αλλά ξέχασε να σημειώσει ποιο είναι το καθένα. Ο στόχος μας είναι μεταβάλλοντας το σχήμα του τριγώνου, σύροντας τις κορυφές του, να εντοπίσουμε ποιο σημείο αντιστοιχεί σε κάθε κέντρο.



Να απαντήσετε στα παρακάτω ερωτήματα.

**ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ ΓΙΑ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ:**

- 1) Με ποιόν τρόπο μπορούμε να εντοπίσουμε το ορθόκентρο και το περίκентρο συγχρόνως. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

- 2) Με ποιόν τρόπο μπορούμε να εντοπίσουμε το βαρύκентρο και το έκκентρο συγχρόνως. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

- 3) Σύροντας την κορυφή Α, και με βάση την θέση των τεσσάρων σημείων, να κατασκευάσετε ένα τρίγωνο για το οποίο θα μπορείτε να υποστηρίξετε ότι είναι ισόπλευρο.

- 4) Ποια είναι η θέση των τεσσάρων κέντρων όταν το τρίγωνο γίνει ισοσκελές. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

## ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΜΠΙΛΙΑΡΔΟΥ

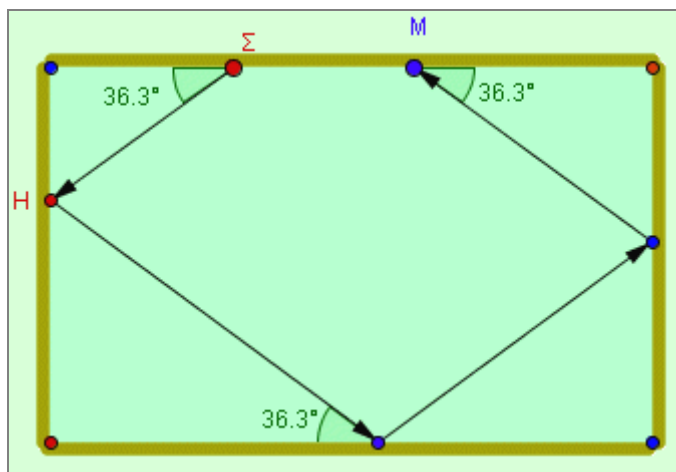
Τάξη: Α΄

Όνομ/νυμο μαθητών:

1. ....
  2. ....
- .....

### Φύλλο εργασίας

Βρισκόμαστε μπροστά σε έναν προσομοιωτή μπιλιάρδου. Η προσομοίωση περιέχει μία μόνο μπάλα  $\Sigma$  της οποίας μπορούμε να μελετούμε την διαδρομή της καθώς ανακλάται πάνω στις πλευρές του μπιλιάρδου. Η θέση  $\Sigma$  της μπάλας μπορεί να αλλάξει κατά μήκος μιας πλευράς. Ακόμη μπορεί να αλλάξει η θέση του πρώτου σημείου  $H$ , στο οποίο η μπάλα θα συναντήσει μία διαδοχική πλευρά του μπιλιάρδου. Η αρχική θέση  $\Sigma$  και η αμέσως επόμενη  $H$  παριστάνονται με σημεία κόκκινα πάνω στις δύο πλευρές του μπιλιάρδου. Ακόμη υπάρχουν δύο κορυφές του (τα δύο γωνιακά, κόκκινα σημεία) από τις οποίες μπορούμε να μεταβάλουμε τις διαστάσεις του.



Να απαντήσετε στα παρακάτω ερωτήματα.

**ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ ΓΙΑ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ:**

- 1) Να αλλάξετε την αρχική θέση  $\Sigma$  της μπάλας. Ποιος κανόνας φαίνεται να ισχύει για τις γωνίες που δημιουργεί η πορεία της μπάλας μέχρι το τελικό σημείο  $M$ ;

- 2) Να αποδείξετε τον κανόνα αυτό με αυστηρά μαθηματικό τρόπο.

- 3) Να αλλάξετε την θέση του σημείου  $H$ . Ισχύει ο προηγούμενος κανόνας;

- 4) Η μπάλα  $\Sigma$  έχει διαγράψει 4 πορείες μετά από 3 ανακλάσεις στις πλευρές του μπιλιάρδου. Να διερευνήσετε τις θέσεις του  $\Sigma$  και του  $H$  για τις οποίες η μπάλα θα καταλήξει και πάλι στην αρχική της θέση. Τι είδους τετράπλευρο σχηματίζει τώρα η πορεία της μπάλας; Να αποδείξετε τα συμπεράσματά σας

- 5) Να μεταβάλλεται τις διαστάσεις του μπιλιάρδου. Τι παρατηρείτε; Τι μορφή παίρνει το τετράπλευρο της πορείας της μπάλας όταν το μπιλιάρδο γίνει τετράγωνο;



## ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΣ ΤΟΠΟΣ

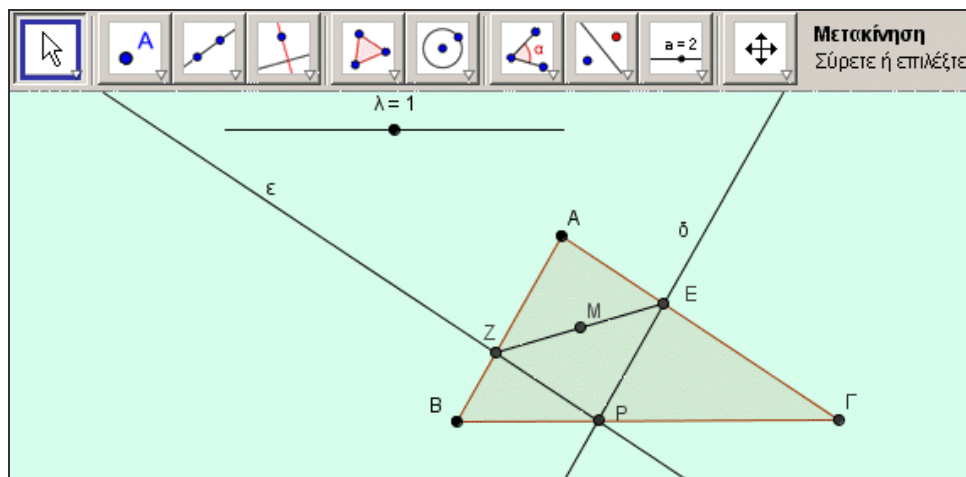
Τάξη: Α΄

Όνομ/νυμο μαθητών:

1. ....
  2. ....
- .....

### Φύλλο εργασίας

Σε ένα τρίγωνο  $AB\Gamma$  έχουμε κατασκευάσει ένα ελεύθερο σημείο  $P$  πάνω στην πλευρά  $B\Gamma$  και με την βοήθεια των ευθειών  $(\delta)$  και  $(\epsilon)$ , που είναι παράλληλες προς τις πλευρές  $AB$  και  $A\Gamma$ , έχουμε δημιουργήσει το σημείο  $M$ . Το σημείο  $M$  χωρίζει το τμήμα  $ZE$  σε δύο τμήματα  $MZ$ ,  $ME$  που έχουν λόγο  $\lambda$ . Η τιμή του  $\lambda$  μεταβάλλεται από τον μεταβολέα  $\lambda$ . Στην οθόνη εμφανίζεται η παρακάτω εικόνα.



Να απαντήσετε στα παρακάτω ερωτήματα

**ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ ΓΙΑ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ:**

- 1) Για την τιμή  $\lambda=1$  να σύρετε το σημείο P. Τι γραμμή διαγράφει το σημείο M καθώς κινείται;

- 2) Να εμφανίσετε το ίχνος του M και να σύρετε το P. Ποιος είναι ο γεωμετρικός τόπος του σημείου M; Να σύρετε το σημείο P στις οριακές θέσεις B και Γ. Να διατυπώσετε τα προηγούμενα υπό μορφή μιας γεωμετρικής πρότασης.

- 3) Να αποδείξετε με αυστηρά μαθηματικό τρόπο την πρόταση που διατυπώσατε.

- 4) Να μεταβάλλετε την τιμή του  $\lambda$  ώστε να είναι διαφορετική του 1 και να επαναλάβετε την προηγούμενη διερεύνηση. Να βρείτε τον γεωμετρικό του τόπο του σημείου M σύροντας το σημείο P. Τι παρατηρείτε; Να διατυπώσετε μία γεωμετρική πρόταση σε αυστηρά μαθηματική ορολογία.











### Τεχνική Υποστήριξη

Δικτυακός Τόπος : [www.intracom-schools.gr](http://www.intracom-schools.gr) και

Ηλεκτρονικό ταχυδρομείο : [support\\_it@intracom-it.gr](mailto:support_it@intracom-it.gr)

Τηλέφωνο : 210-6679105

Fax : 210-6679106

Υπεύθυνη : κα Μπερτσά Όλγα

### ΥΠΕΠΘ / ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ «ΚΟΙΝΩΝΙΑ ΤΗΣ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΑΣ»



Γ' ΚΟΙΝΟΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ ΣΤΗΡΙΞΗΣ  
ΕΡΓΟ ΣΥΓΧΡΗΜΑΤΟΔΟΤΟΥΜΕΝΟ ΚΑΤΑ 80% ΑΠΟ ΤΟ ΕΚΤ  
ΚΑΙ ΚΑΤΑ 20% ΑΠΟ ΕΘΝΙΚΟΥΣ ΠΟΡΟΥΣ  
«Ολοκληρωμένη Αξιοποίηση των Τ.Π.Ε. στην Εκπαιδευτική Διαδικασία»