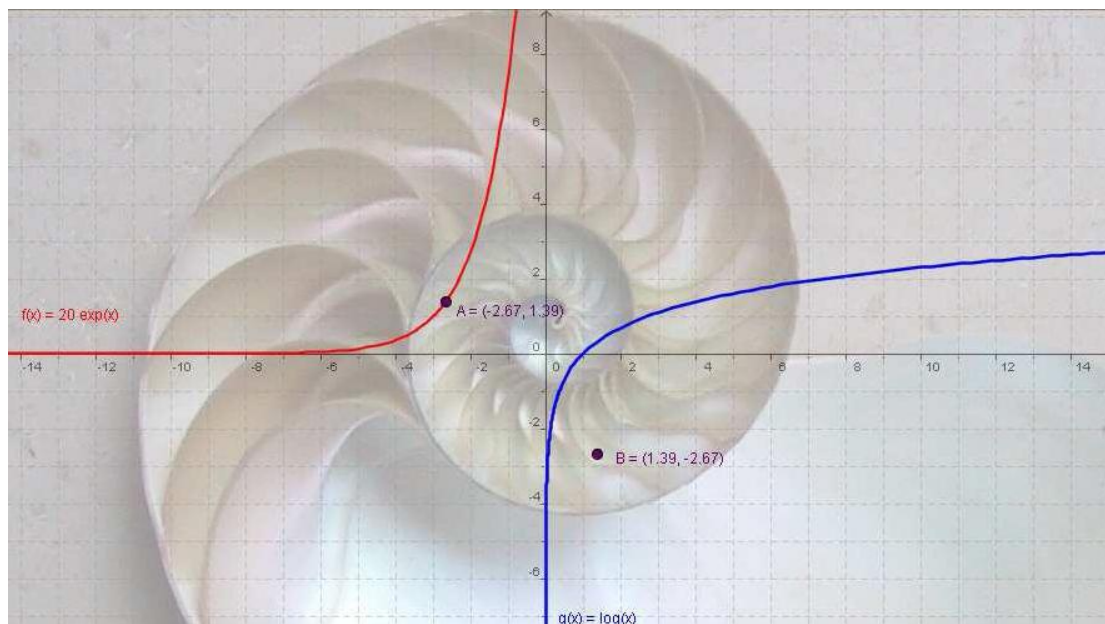


ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΜΕ ΤΟ GeoGebra*

Α' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΒΙΒΛΙΟ ΚΑΘΗΓΗΤΗ



Στέφανος Κεϊσογλου, Καθηγητής Μαθηματικών M.ed

*www.geogebra.org

ΥΠΕΠΘ / ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ «ΚΟΙΝΩΝΙΑ ΤΗΣ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΑΣ»



Γ' ΚΟΙΝΟΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ ΣΤΗΡΙΞΗΣ
ΕΡΓΟ ΣΥΓΧΡΗΜΑΤΟΔΟΤΟΥΜΕΝΟ ΚΑΤΑ 80% ΑΠΟ ΤΟ ΕΚΤ
ΚΑΙ ΚΑΤΑ 20% ΑΠΟ ΕΘΝΙΚΟΥΣ ΠΟΡΟΥΣ
«Ολοκληρωμένη Αξιοποίηση των Τ.Π.Ε. στην Εκπαιδευτική Διαδικασία»

Τεχνική Υποστήριξη

Δικτυακός Τόπος : www.intracom-schools.gr και

Ηλεκτρονικό ταχυδρομείο : support_it@intracom-it.gr

Τηλέφωνο : 210-6679105

Fax : 210-6679106

Υπεύθυνη : κα Μπερτσά Όλγα

Περιεχόμενα

1	ΑΛΓΕΒΡΑ ΤΗΣ Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ ΜΕ ΤΟ ΛΟΓΙΣΜΙΚΟ GEOGEBRA.....	5
1.1	Εισαγωγή.....	5
1.2	Βασικές δραστηριότητες	5
1.2.1	ΑΠΟΛΥΤΗ ΤΙΜΗ.....	6
1.2.2	Η ΕΥΘΕΙΑ $\psi = \alpha \cdot x + \beta$	8
1.2.3	ΠΑΡΑΛΛΗΛΕΣ ΚΑΙ ΚΑΘΕΤΕΣ ΕΥΘΕΙΕΣ	10
1.3	Διερευνητικές δραστηριότητες.....	13
1.3.1	2×2 ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ.....	13
1.3.2	Η ΕΥΘΕΙΑ $\alpha x + \beta y = \gamma$	14
1.3.3	ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ	16
1.3.4	Η ΥΠΕΡΒΟΛΗ	18
1.3.5	ΤΟ ΤΡΙΩΝΥΜΟ	20
2	ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΤΗΣ Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ ΜΕ ΤΟ ΛΟΓΙΣΜΙΚΟ GEOGEBRA	23
2.1	Βασικές δραστηριότητες	23
2.1.1	ΑΘΡΟΙΣΜΑ ΓΩΝΙΩΝ ΤΡΙΓΩΝΟΥ	24
2.1.2	ΤΟ ΚΕΝΤΡΟ ΒΑΡΟΥΣ ΤΡΙΓΩΝΟΥ	27
2.1.3	ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗ ΚΥΚΛΟΥ	29
2.2	Διερευνητικές δραστηριότητες.....	31
2.2.1	ΙΣΟΤΗΤΑ-ΟΜΟΙΟΤΗΤΑ ΤΡΙΓΩΝΩΝ.....	32
2.2.2	Η ΣΚΑΛΑ.....	34
2.2.3	ΤΟ ΤΡΑΠΕΖΙΟ.....	36
2.2.4	ΤΟ ΕΓΓΡΑΨΙΜΟ ΤΕΤΡΑΠΛΕΥΡΟ.....	38
2.2.5	ΤΑ ΚΕΝΤΡΑ ΤΟΥ ΤΡΙΓΩΝΟΥ	40
2.2.6	ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΜΠΙΛΙΑΡΔΟΥ	42
2.2.7	ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΣ ΤΟΠΟΣ	44

1 ΑΛΓΕΒΡΑ ΤΗΣ Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ ΜΕ ΤΟ ΛΟΓΙΣΜΙΚΟ GEOGEBRA

1.1 Εισαγωγή

Η χρήση του παρόντος λογισμικού στη διδασκαλία της Άλγεβρας της Α΄ Λυκείου έχει ως γενικό στόχο την οπτικοποίηση ορισμένων εννοιών και την γεωμετρική ερμηνεία προτάσεων της Άλγεβρας.

Αυτός άλλωστε είναι και ο βασικός στόχος όταν σχεδιάζουμε δραστηριότητες Άλγεβρας με ένα λογισμικό που έχει γεωμετρικό και αναλυτικό προσανατολισμό, δηλαδή υποστηρίζει γεωμετρικά αντικείμενα και χρησιμοποιεί συντεταγμένες.

Οι δραστηριότητες που προτείνονται στην συνέχεια είναι ενδεικτικές και αναφέρονται τόσο σε βασικά θέματα όσο και σε διερευνητικές εργασίες.

Ο στόχος των δραστηριοτήτων είναι να υποστηρίξουν την διδασκαλία της Άλγεβρας σε επιλεγμένες θεματικές περιοχές. Η υποστήριξη αυτή ανάγεται στην δημιουργία εισαγωγικών δραστηριοτήτων για την διδασκαλία εννοιών της Άλγεβρας και προτάσεων και στην δημιουργία συνδέσεων μεταξύ τους.

Συγκεκριμένα έχουν σχεδιαστεί δραστηριότητες με τις οποίες ο μαθητής μπορεί να μελετήσει με δυναμικό τρόπο την συμπεριφορά της γραφικής παράστασης τριωνύμου, την γεωμετρική λύση εξισώσεων με απόλυτα, την υπερβολή και γενικά κάθε αλγεβρική παράσταση που μπορεί να παρασταθεί γεωμετρικά.

1.2 Βασικές δραστηριότητες

Ο όρος ‘βασικές’ έχει την έννοια ότι αυτές είναι απλές και μπορούν να υλοποιηθούν από τους μαθητές οι οποίοι θα εμφανίζουν σταδιακά τις διάφορες κατασκευές από τα βοηθητικά αντικείμενα. (τμήματα, κύκλοι, μετρήσεις, κ.λ.π).

Οι κατασκευές αυτές μπορεί να αναφέρονται σε μία συγκεκριμένη έννοια της Άλγεβρας, ή πρόταση. Ακόμη θα μπορούσαν να αναφέρονται σε μία άσκηση ή μία εφαρμογή της. Ο διδάσκων μπορεί να υλοποιήσει τις δραστηριότητες μέσα στην τάξη είτε ως παρουσίαση, είτε μέσα στο εργαστήριο των υπολογιστών του σχολείου.

Στην συνέχεια προτείνονται 3 ενδεικτικές βασικές δραστηριότητες.

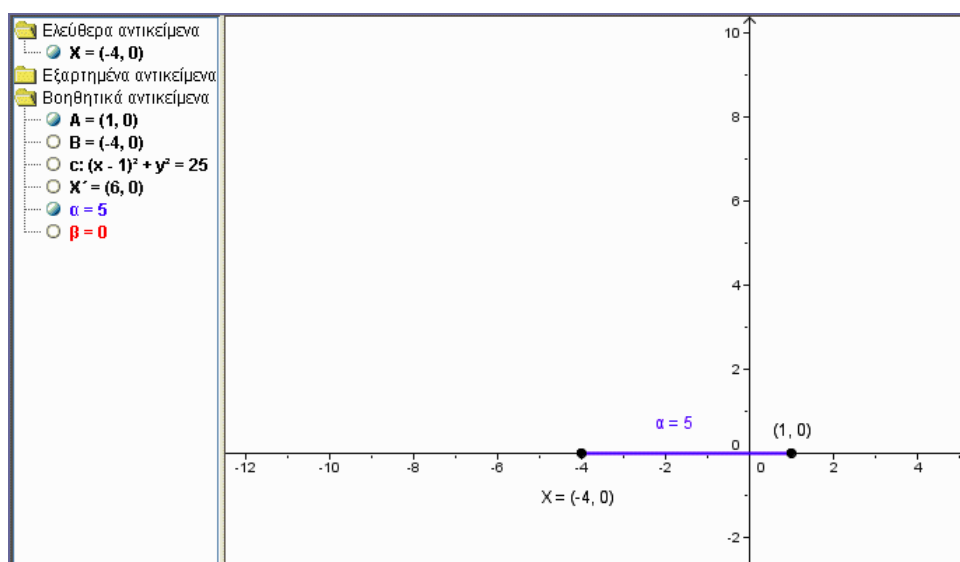
1.2.1 ΑΠΟΛΥΤΗ ΤΙΜΗ

Η συγκεκριμένη δραστηριότητα καλό θα είναι να υλοποιηθεί αμέσως μετά την διδασκαλία της έννοιας της απόλυτης τιμής πραγματικού αριθμού. Ο διδάσκων αρχικά επισημαίνει ότι η απόλυτη τιμή ενός αριθμού εκφράζει την απόστασή του από την αρχή των αξόνων, ενώ η παράσταση της μορφής $|x-k|$ εκφράζει την απόσταση του αριθμού x από τον αριθμό k .

Η γεωμετρική απεικόνιση της απόλυτης τιμής στηρίζεται στο γεγονός ότι ένας κύκλος τέμνει την ευθεία των πραγματικών αριθμών σε δύο σημεία.

Φύλλο εργασίας

Στην οθόνη προβάλλονται: Ένα σύστημα αξόνων, δύο σημεία με τις συντεταγμένες τους πάνω στον άξονα x' . Η απόσταση των δύο σημείων εμφανίζεται πάνω από το τμήμα που ενώνει τα δύο αυτά σημεία. Αυτή ακριβώς η απόσταση εκφράζει κάποια απόλυτη τιμή. Ο στόχος μας είναι να χρησιμοποιήσουμε την απόσταση αυτή για να λύσουμε εξισώσεις ή ανισώσεις που περιέχουν απόλυτες τιμές με γεωμετρικό τρόπο.



ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ ΓΙΑ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ

- 1) Να εμφανίσετε τον κύκλο c και το σημείο X' . Να σύρετε το κέντρο του κύκλου στην αρχή των αξόνων. Να περιγράψετε μία μέθοδο με την οποία μπορούμε να λύνουμε εξισώσεις της μορφής $|x|=θ$ με την βοήθεια της κατασκευής.
- 2) Να περιγράψετε μία μέθοδο με την οποία μπορούμε να λύνουμε εξισώσεις της μορφής $|x-k|=θ$ με την βοήθεια της κατασκευής.
- 3) Να αποκρύψετε τον κύκλο c και το σημείο X' . Να εμφανίσετε το σημείο B και την μέτρησή του και το τμήμα β . Να περιγράψετε μία μέθοδο με την οποία μπορούμε να λύσουμε την εξίσωση $|x+8|+|x-1|=9$ με την βοήθεια της κατασκευής.

4) Να λύσετε την εξίσωση $|x+6|+|x|=2$. Τι παρατηρείτε;

Οδηγίες για την υλοποίηση της δραστηριότητας

Προετοιμασία

Η διάρκεια της δραστηριότητας είναι μία ή και δύο διδακτικές ώρες και μπορεί να υλοποιηθεί ως εφαρμογή στο κεφάλαιο της απόλυτης τιμής.

Οι μαθητές θα πρέπει να γνωρίζουν τον ορισμό και την γεωμετρική προσέγγιση της απόλυτης τιμής.

Η υλοποίηση

Οι μαθητές αρχικά θα εμφανίσουν τον κύκλο και θα παρατηρήσουν ότι το κέντρο του κύκλου είναι το σημείο Α. Ο διδάσκων θα ζητήσει να μεταφέρουν σε διάφορες θέσεις το σημείο Χ όταν το σημείο Α βρίσκεται στην αρχή των αξόνων. Σε κάθε νέα θέση του Χ οι μαθητές θα διαπραγματεύονται την εξίσωση της οποίας η λύση πραγματοποιείται γεωμετρικά.

Στην δεύτερη ερώτηση οι μαθητές θα λύσουν αρκετές εξισώσεις με συγκεκριμένους αριθμούς όταν πλέον μεταφέρουν το σημείο Α στην θέση του αριθμού κ. Το ζητούμενο είναι να έχει το τμήμα α μήκος ίσο με θ.

Στην τρίτη ερώτηση ο διδάσκων θα επισημάνει στους μαθητές ότι υπάρχουν δύο απόλυτα άρα είναι απαραίτητες δύο αποστάσεις α και β κάθε μία από τις οποίες θα εκφράζει και ένα διαφορετικό απόλυτο.

Στην τελευταία ερώτηση οι μαθητές θα σύρουν το σημείο Χ σε διάφορες θέσεις και θα διαπιστώσουν ότι δεν υπάρχει καμία θέση στην οποία να ισχύει $\alpha+\beta=2$.

Τέλος καλό θα είναι να σύρουν οι μαθητές τα σημεία Α και Β σε τυχαίες θέσεις και στην συνέχεια να καταγράφουν την εξίσωση που αντιστοιχεί σε αυτές.

1.2.2 Η ΕΥΘΕΙΑ $\psi = \alpha \cdot x + \beta$

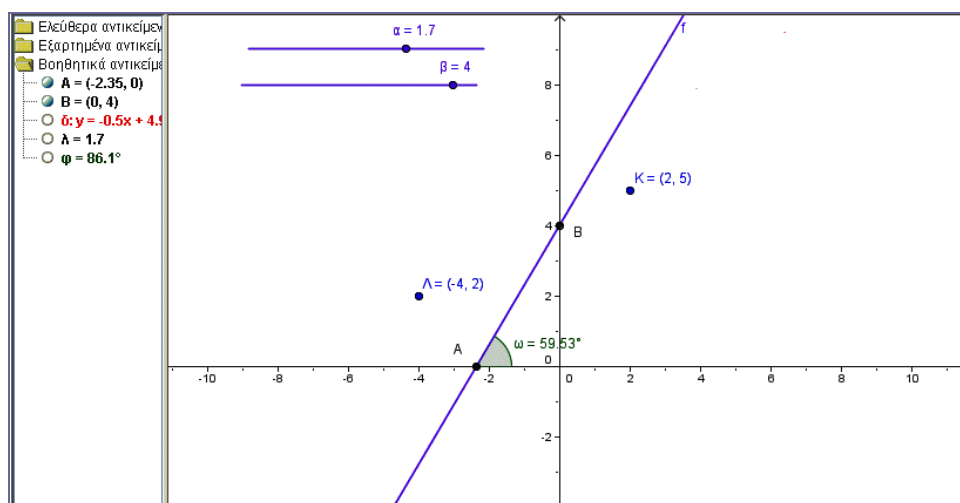
Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \alpha x + \beta$ θα αποτελέσει ένα αντικείμενο μελέτης και διαπραγμάτευσης των ιδιοτήτων της.

Οι μετρήσεις, που μπορούν οι μαθητές να πραγματοποιήσουν μέσω του λογισμικού, υποδεικνύουν την σχέση μεταξύ των συντελεστών διεύθυνσης δύο παραλλήλων η καθέτων ευθειών. Επιπλέον οι μετρήσεις επιτρέπουν την μελέτη των τιμών του συντελεστή διεύθυνσης μιας ευθείας.

Τέλος η δυνατότητα να οριστούν οι αριθμοί α , β παραμετρικά, δηλαδή μέσω μεταβολών (δρομέων), επιτρέπουν στον μαθητή να διερευνήσει την σημασία των αριθμών αυτών για την γραφική παράσταση της ευθείας.

Φύλλο εργασίας

Στην οθόνη προβάλλεται μία ευθεία, 2 μεταβολείς α , β τα σημεία τομής A, B της ευθείας με τους άξονες, καθώς και η γωνία ω της ευθείας με τους άξονες. Επιπλέον εμφανίζονται και δύο ελεύθερα σημεία K, Λ. Ο στόχος μας είναι να μελετήσουμε τις διάφορες παραμέτρους της ευθείας όπως ο συντελεστής διεύθυνσης, τα σημεία τομής με τους άξονες κ.λ.π.



ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ ΓΙΑ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ

- 1) Να μεταβάλλεται τις τιμές του μεταβολέα α . Τι παρατηρείτε;
- 2) Να μεταβάλετε τις τιμές του μεταβολέα β . Τι παρατηρείτε;
- 3) Να εντοπίσετε τι μετρά ο βοηθητικός αριθμός λ και τι σχέση έχει με την ευθεία. Να κατασκευάσετε μία ευθεία η οποία να σχηματίζει γωνία 35° με τον άξονα $x'x$. Ποιος είναι ο συντελεστής διεύθυνσης; Πόσες τέτοιες ευθείες μπορείτε να κατασκευάσετε;
- 4) Να κατασκευάσετε μία ευθεία η οποία να περνά από τα σημεία K, Λ. Ποια είναι η ευθεία; Να αλλάξετε τις θέσεις των K, Λ και να επαναλάβετε αρκετές φορές την μετακίνηση της ευθείας. Ποια σχέση έχει ο αριθμός α με τους συντελεστές της ευθείας;

Οδηγίες για την υλοποίηση της δραστηριότητας

Προετοιμασία

Η διάρκεια της δραστηριότητας είναι μία διδακτική ώρα και μπορεί να υλοποιηθεί ως εφαρμογή στην παράγραφο που αναφέρεται στην συνάρτηση $f(x)=ax+\beta$.

Οι μαθητές θα πρέπει να γνωρίζουν ότι η γραφική παράσταση της εξίσωσης $y=ax+\beta$ είναι μία ευθεία.

Η υλοποίηση

Καλό θα είναι ο διδάσκων να επιδιώξει την μέγιστη δυνατή αυτενέργεια από την μεριά των μαθητών καθώς διαθέτουν όλες τις κατάλληλες αναπαραστάσεις των μεγεθών που σχετίζονται με την ευθεία (συντελεστής διεύθυνσης, γωνία με τον $\chi\chi$, σημεία τομής με τους άξονες)

Η πρώτη και δεύτερη ερώτηση έχουν στόχο να συνδέσουν οι μαθητές την στροφή της ευθείας με τον συντελεστή α και την παράλληλη μεταφορά με τον συντελεστή β . Ο διδάσκων μπορεί να ζητά από τους μαθητές συγκεκριμένες ευθείες και να τις κατασκευάσουν οι μαθητές με την βοήθεια των μεταβολών. Ενδιαφέρον παρουσιάζει η περίπτωση της ευθείας όταν $\alpha=0$.

Στην τρίτη ερώτηση οι μαθητές θα κάνουν δεξί κλικ πάνω στο βοηθητικό αντικείμενο λ και θα διαπιστώσουν ότι μετρά την εφαπτομένη της γωνίας ω . Συγχρόνως θα παρατηρήσουν ότι καθώς μεταβάλλεται η κλίση της ευθείας η ποσότητα α και το λ παραμένουν ίσα.

Τέλος στην τέταρτη ερώτηση οι μαθητές θα μεταβάλλουν τα α , β ώστε η ευθεία να περάσει και από τα δύο σημεία. Εδώ καλό θα είναι κάθε φορά που αλλάζουν οι θέσεις των σημείων K , Λ να παραμένουν οι συντεταγμένες τους ακέραιες ώστε να

παρατηρήσουν οι μαθητές ότι το πηλίκο $\frac{\Psi_2 - \Psi_1}{\chi_2 - \chi_1}$ παραμένει πάντα ίσο με τον αριθμό α

άρα και τον λ .

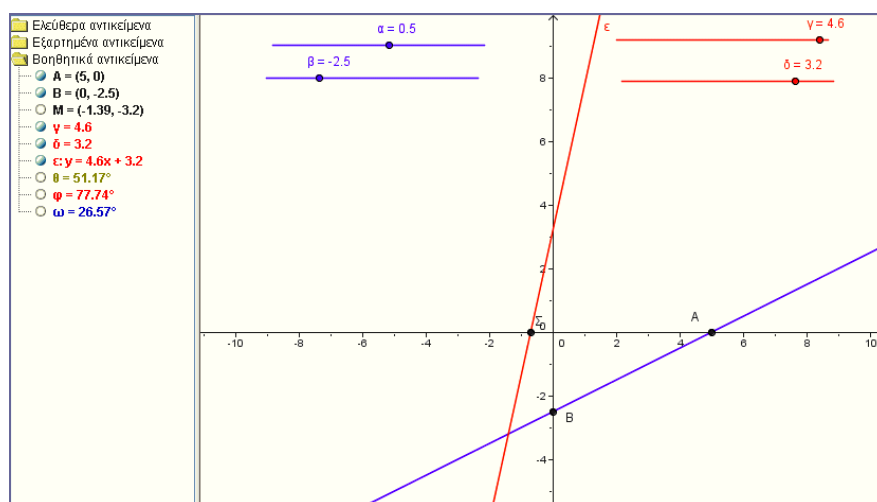
1.2.3 ΠΑΡΑΛΛΗΛΕΣ ΚΑΙ ΚΑΘΕΤΕΣ ΕΥΘΕΙΕΣ

Με την δραστηριότητα αυτή οι μαθητές θα διερευνήσουν την σχετική θέση δύο ευθειών και θα τις συσχετίσουν με τους συντελεστές διεύθυνσής τους.

Ακόμη ο διδάσκων έχει την ευκαιρία να προχωρήσει και σε απόδειξη της σχέσης της καθετότητας με κατάλληλη κατασκευή. Η σχέση της παραλληλίας προκύπτει άμεσα από την ισότητα των γωνιών που σχηματίζουν οι δύο ευθείες με τον άξονα $x'x$.

Φύλλο εργασίας

Στην οθόνη προβάλλονται δύο ευθείες και οι μεταβολές με τους οποίους μπορούμε να μεταβάλουμε τις παραμέτρους των ευθειών. Επιπλέον προβάλλονται ορισμένα σημεία τομής των ευθειών με τους άξονες. Στα βοηθητικά αντικείμενα υπάρχουν, με απόκρυψη, οι γωνίες που σχηματίζουν οι ευθείες με τον άξονα $x'x$, καθώς και η γωνία μεταξύ των δύο ευθειών



ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ ΓΙΑ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ

- 1) Να εμφανίσετε τις γωνίες φ , ω . Να μεταβάλλετε τις παραμέτρους των δύο ευθειών μέχρις ότου να γίνουν παράλληλες. Τι σχέση έχουν οι συντελεστές διεύθυνσης των ευθειών. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.
- 2) Να μεταβάλλετε τις παραμέτρους των δύο ευθειών μέχρις ότου να γίνουν κάθετες. Τι σχέση έχουν οι συντελεστές διεύθυνσης των ευθειών. Να πειραματιστείτε και με άλλες θέσεις. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας με βάση το σχήμα.
- 3) Να επιλέξετε κατάλληλες τιμές για τις παραμέτρους των ευθειών ώστε αυτές να είναι παράλληλες και να απέχουν απόσταση 4.

Οδηγίες για την υλοποίηση της δραστηριότητας

Προετοιμασία

Η διάρκεια της δραστηριότητας είναι μία διδακτική ώρα και μπορεί να υλοποιηθεί ως εφαρμογή στην παράγραφο που αναφέρεται στην συνάρτηση $f(x)=ax+\beta$.

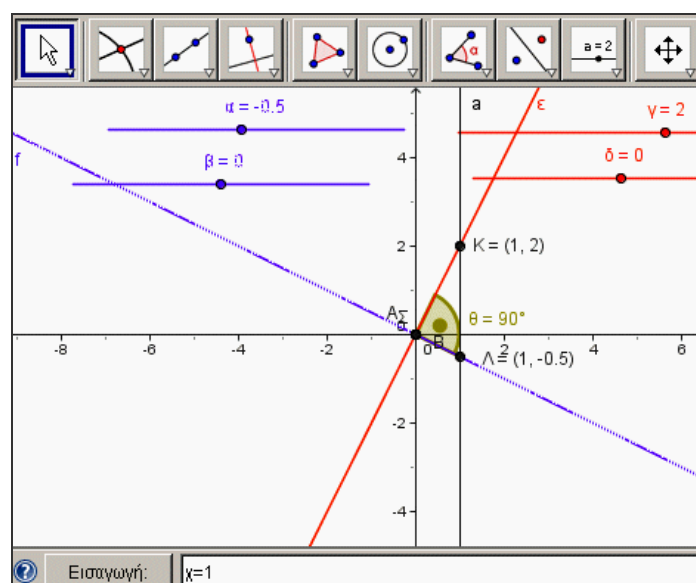
Οι μαθητές θα πρέπει να γνωρίζουν ότι η γραφική παράσταση της εξίσωσης $y=ax+b$ είναι μία ευθεία. Τέλος καλό θα είναι να έχει προηγηθεί η δραστηριότητα που αναφέρεται στην διερεύνηση της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x)=ax+b$.

Η υλοποίηση

Με την δραστηριότητα αυτή οι μαθητές έχουν μία συνολική παρουσίαση των προτάσεων που αφορούν στην παραλληλία και την καθετότητας δύο ευθειών.

Στην πρώτη ερώτηση καλό θα είναι ο διδάσκων να κάνει μία σύντομη αναφορά στο γεγονός ότι αν οι εφαπτόμενες δύο γωνιών είναι ίσες τότε υποχρεωτικά και οι γωνίες είναι ίσες. Με τον τρόπο αυτό οι μαθητές θα μπορέσουν να δικαιολογήσουν την παραλληλία των δύο ευθειών μέσω της ισότητας των συντελεστών διεύθυνσης.

Στην δεύτερη ερώτηση οι μαθητές, αφού παρατηρήσουν την σχέση των συντελεστών διεύθυνσης των δύο ευθειών (καθέτων), θα δικαιολογήσουν την σχέση αυτή με τον τρόπο που υποδεικνύεται από την παρακάτω εικόνα.



Εδώ ο διδάσκων θα πρέπει να ζητήσει από τους μαθητές να εμφανίσουν την γωνία θ και να μεταβάλλουν τις τιμές α και γ μέχρι η γωνία αυτή να γίνει 90^0 . Στην συνέχεια ζητά από τους μαθητές να μεταφέρουν τις ευθείες στην αρχή των αξόνων μηδενίζοντας τις τιμές των β και δ .

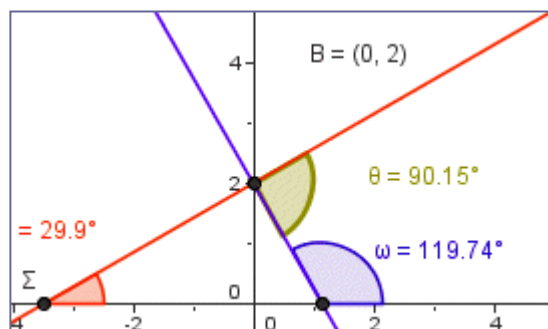
Τέλος κατασκευάζουν την ευθεία $\chi=1$ και εμφανίζουν τα σημεία τομής της με τις δύο άλλες ευθείες. Εδώ οι μαθητές θα παρατηρήσουν ότι οι συντεταγμένες των σημείων αυτών σχετίζονται με τους συντελεστές διεύθυνσης οπότε μπορεί ο διδάσκων να περιγράψει το υπόλοιπο της απόδειξης με τον τρόπο που περιγράφεται στο σχολικό βιβλίο.

Προφανώς το μεγαλύτερο μέρος αφορά στην τρίτη ερώτηση η οποία έχει καθαρά διερευνητικό χαρακτήρα. Ο στόχος είναι να επινοήσουν οι μαθητές τρόπους κατασκευής δύο παράλληλων για τις οποίες να είναι βέβαιο ότι απέχουν συγκεκριμένη απόσταση.

Τα εργαλεία που διαθέτουν (μέτρηση γωνιών και συντεταγμένων, μεταφορά και περιστροφή ευθειών) καθορίζουν και τις επιλογές. Ο διδάσκων παρακινεί τους μαθητές να διαπραγματευτούν και να πειραματιστούν μέχρι ότου προτείνουν μία λύση. Είναι αναμενόμενο οι περισσότεροι να δώσουν ως λύση δύο ευθείες κάθετες

στον $\psi\psi$ που να περνούν από σημεία που απέχουν 4. Στην βοήθεια που διαθέτουν για την τρίτη ερώτηση μπορούν να χρησιμοποιήσουν την γωνία των 30° σε ορθογώνιο με απέναντι πλευρά 2 άρα υποτείνουσα 4.

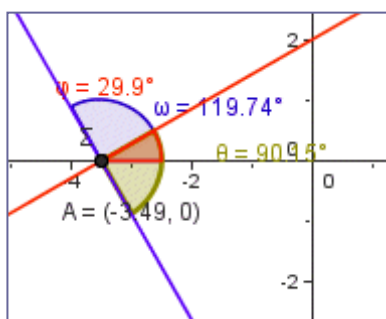
Το πρόβλημα επομένως μεταφέρεται στην κατασκευή δύο παραλλήλων ευθειών που να είναι κάθετες στην ευθεία που περνά από τα σημεία τομής της αρχικής ευθείας με τους άξονες.



Η κόκκινη ευθεία σχηματίζει με τον $\chi\chi$ γωνία 30° .

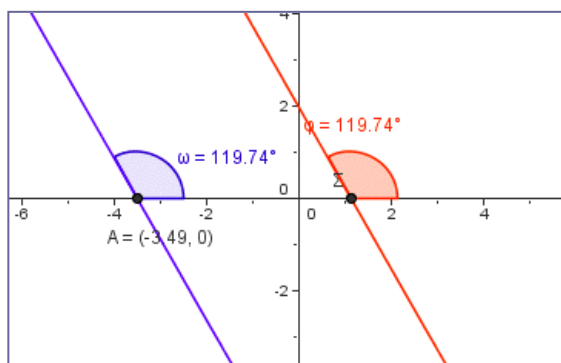
Η μπλε είναι κάθετη σε αυτή.

Οι μετρήσεις μπορούν να βελτιωθούν σε προσέγγιση αν ορίσουμε ακρίβεια, στους μεταβολείς των συντελεστών, 0,001.



Η μπλε μεταφέρεται στο σημείο του $\chi\chi$ από το οποίο περνά και η κόκκινη.

Το μόνο που απομένει είναι η περιστροφή της κόκκινης.



Όταν περιστραφεί η κόκκινη και γίνει παράλληλη στην μπλε τότε η απόστασή τους είναι 4.

Θα πρέπει να τονιστεί από τον διδάσκοντα ότι η κατασκευή αυτή είναι ενδεικτική και όχι η μοναδική.

1.3 Διερευνητικές δραστηριότητες

Οι διερευνητικές δραστηριότητες έχουν διπλό στόχο. Από την μία επιτρέπουν την δυναμική οπτικοποίηση αλγεβρικών ποσοτήτων και από την άλλη προκαλούν την διερευνητική διάθεση των μαθητών.

Συγκεκριμένα η δυνατότητα κίνησης των αντικειμένων και η εισαγωγή παραμέτρων στην κατασκευή μας παρέχουν την ευχέρεια να επεκτείνουμε το πλαίσιο αναφοράς μιας άσκησης ή προβλήματος και να διερευνήσουμε γενικότερες περιπτώσεις. Επιπλέον μπορούμε να δημιουργήσουμε δραστηριότητες οι οποίες καταργούν τα στεγανά μεταξύ των διαφόρων αλγεβρικών περιοχών και αναδεικνύουν ένα ενιαίο γενικό πλαίσιο μαθηματικής δράσης.

1.3.1 2×2 ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

Η **βασική ιδέα** της δραστηριότητας στηρίζεται στην σύνδεση ενός 2×2 γραμμικού συστήματος με την γεωμετρική του παράσταση. Το λογισμικό παρέχει την ευχέρεια των πολλαπλών δυναμικά συνδεδεμένων παραστάσεων με τις οποίες προβάλλονται συγχρόνως τόσο η γεωμετρική λύση όσο και η αλγεβρική με την μέθοδο των οριζουσών.

Η δραστηριότητα αποτελεί έναν πυρήνα πάνω στον οποίο ο διδάσκων μπορεί να αναπτύξει την διδασκαλία των 2×2 γραμμικών συστημάτων. Συγκεκριμένα μπορεί να χρησιμοποιήσει ως εφαρμογή την δραστηριότητα μετά το τέλος της διδασκαλίας, μπορεί όμως να την χρησιμοποιήσει και ως εισαγωγική δραστηριότητα. Στην δεύτερη περίπτωση οι μαθητές θα αναπτύξουν εικασίες για τον τρόπο με τον οποίο μπορεί να λυθεί ένα 2×2 γραμμικό σύστημα με την μέθοδο των οριζουσών.

Η δραστηριότητα υλοποιείται σε δύο φάσεις με δύο διαφορετικά φύλλα εργασίας. Στην πρώτη φάση οι μαθητές θα διερευνήσουν τις ιδιότητες της γραφικής παράστασης της γραμμικής εξίσωσης $ax+by=\gamma$. Στην δεύτερη φάση θα ασχοληθούν με την λύση ενός παραμετρικού συστήματος που αποτελείται από δύο γραμμικές εξισώσεις.

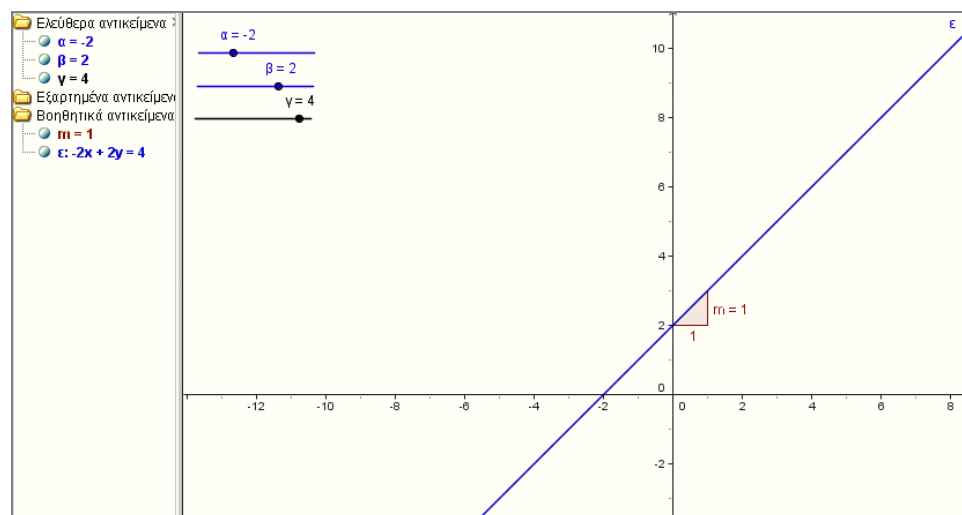
1.3.2 Η ΕΥΘΕΙΑ $\alpha x + \beta y = \gamma$

Φύλλο εργασίας

Στην οθόνη προβάλλονται τρεις μεταβολείς α , β , γ και μία ευθεία $\alpha x + \beta y = \gamma$.

Επιπλέον εμφανίζεται η κλίση m της ευθείας, δηλαδή η εφαπτομένη της γωνίας που σχηματίζει η ευθεία με τον άξονα x .

Ο στόχος μας είναι να διερευνήσουμε τον τρόπο με τον οποίο μεταβάλλεται η ευθεία και η κλίση της καθώς μεταβάλλονται οι παράμετροι α , β , γ .



ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ ΓΙΑ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ

1. Να μεταβάλλετε τις τιμές του μεταβολέα α . Πως μεταβάλλετε η ευθεία;
2. Να μεταβάλλετε τις τιμές του μεταβολέα β . Σε τι διαφέρει ο τρόπος μεταβολής της ευθείας από αυτόν που παρατηρήσατε στο προηγούμενο ερώτημα;
3. Να παρατηρήσετε τις τιμές των α και β καθώς μεταβάλλετε η ευθεία. Ποια σχέση συνδέει τις τιμές αυτές με την κλίση της ευθείας;
4. Πότε η ευθεία γίνεται παράλληλη στον άξονα x και πότε κάθετη;
5. Πότε δεν ορίζεται ευθεία;
6. Να συνοψίσετε τα συμπεράσματά σας από την παραπάνω διερεύνηση και να διατυπώσετε προτάσεις σε αυστηρά μαθηματική ορολογία.

Οδηγίες για την υλοποίηση της δραστηριότητας

Προετοιμασία

Η διάρκεια της δραστηριότητας είναι μία διδακτική ώρα και μπορεί να υλοποιηθεί ως εφαρμογή ή ως εισαγωγή στην παράγραφο που αναφέρεται στην γραμμική εξίσωση $\alpha x + \beta y = \gamma$.

Οι μαθητές θα πρέπει να γνωρίζουν ότι η γραφική παράσταση της εξίσωσης $y=\lambda x+\kappa$ είναι μία ευθεία. Τέλος καλό θα είναι να έχει προηγηθεί η δραστηριότητα που αναφέρεται στην διερεύνηση της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x)=ax+\beta$.

Η υλοποίηση

Στις τρεις πρώτες ερωτήσεις οι μαθητές θα πειραματιστούν με του μεταβολείς (δρομείς) των α , β , γ . Είναι σημαντικό να καταγράψουν την συμπεριφορά της ευθείας όταν αλλάζει το α και την διαφορετική συμπεριφορά όταν αλλάζει το α . Ο διδάσκων θα ζητήσει από τους μαθητές να εστιάσουν κυρίως στον λόγο α/β και την σχέση του με την κλίση της ευθείας. Τέλος καλό θα είναι να υπογραμμιστεί το γεγονός ότι η μορφή αυτή της ευθείας ($\alpha x+\beta y=\gamma$) εκφράζει όλες τις μορφές ευθειών ακόμη και αυτές που είναι κάθετες στον $\chi'\chi$. Στην τέταρτη ερώτηση ο διδάσκων ζητά από τους μαθητές να μηδενίσουν διαδοχικά (όχι συγχρόνως) τις τιμές των α , β και να εντοπίσουν τις οριακές θέσεις της ευθείας.

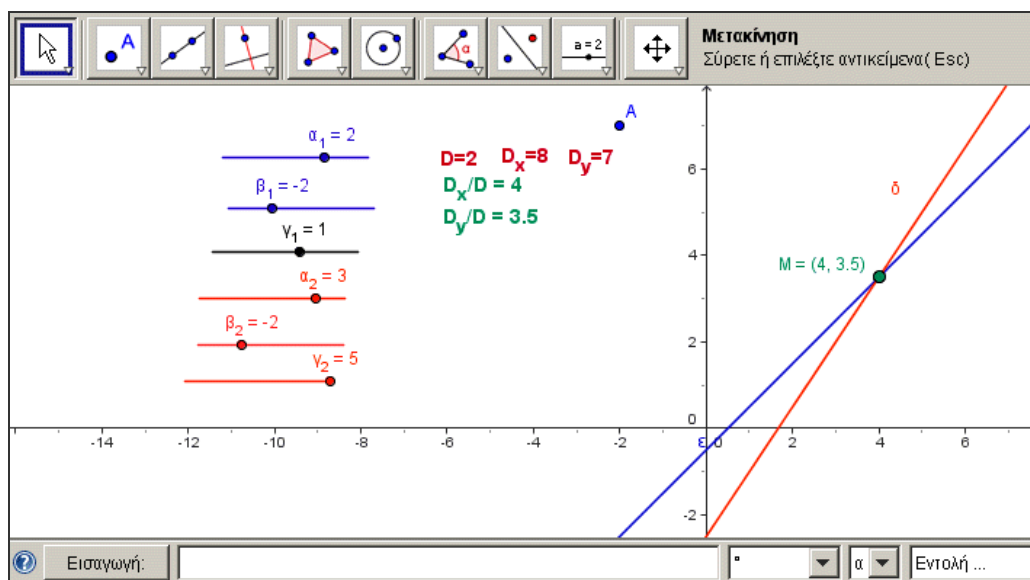
Τέλος στην πέμπτη ερώτηση οι μαθητές θα μηδενίσουν και τους δύο συντελεστές των χ , ψ ώστε να προκύψει ότι στην συγκεκριμένη περίπτωση δεν ορίζεται η ευθεία.

1.3.3 ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Στην οθόνη προβάλλονται 6 μεταβολείς και 2 ευθείες. Επιπλέον εμφανίζεται το σημείο τομής των δύο ευθειών, ένα ελεύθερο σημείο A και δύο παραστάσεις, οι τιμές των οριζουσών D, D_x , D_y καθώς και οι τιμές των λόγων D_x/D και D_y/D .

Ο στόχος μας είναι να βρούμε έναν τρόπο ώστε να λύνουμε ένα γραμμικό σύστημα 2×2 με έναν σύντομο τρόπο που να είναι όμως έγκυρος από μαθηματική άποψη.



ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ ΓΙΑ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ

1. Να μεταβάλετε τις τιμές στους μεταβολείς της ευθείας (ϵ) που είναι μπλε. Πως μεταβάλλετε η ευθεία;
2. Ποιες είναι οι εξισώσεις των δύο ευθειών. Τι παριστάνει το σημείο τομής τους; Πως μπορούμε να λύσουμε ένα σύστημα με την βοήθεια των μεταβολέων; Τι σχέση έχουν οι συντεταγμένες του σημείου τομής με τις ποσότητες D_x/D και D_y/D ;
3. Να σύρετε τους μεταβολείς ώστε οι δύο ευθείες να γίνουν παράλληλες. Να εξηγήσετε το μήνυμα που εμφανίζεται στην οθόνη για τις ποσότητες D_x/D και D_y/D .
4. Να κατασκευάσετε ένα σύστημα που να έχει για λύση τις συντεταγμένες του σημείου A.

Οδηγίες για την υλοποίηση της δραστηριότητας

Προετοιμασία

Η διάρκεια της δραστηριότητας είναι μία διδακτική ώρα και μπορεί να υλοποιηθεί ως εφαρμογή ή ως εισαγωγή στην παράγραφο που αναφέρεται στην λύση γραμμικού συστήματος με την μέθοδο των οριζουσών.

Οι μαθητές θα πρέπει να γνωρίζουν τον ορισμό της ορίζουσας 2×2 καθώς και των οριζουσών D , D_x , D_y ενός συστήματος. Τέλος καλό θα είναι να έχει προηγηθεί η δραστηριότητα που αναφέρεται στην διερεύνηση της γραφικής παράστασης της γραμμικής εξίσωσης.

Τέλος καλό θα είναι να έχει ο διδάσκων επισημάνει στους μαθητές ότι το κοινό σημείο δύο ευθειών παριστάνει την λύση του συστήματος των εξισώσεών τους.

Η υλοποίηση

Οι ερωτήσεις του φύλλου εργασίας είναι ενδεικτικές, για παράδειγμα στην πρώτη ερώτηση οι μαθητές θα παρατηρήσουν ότι η ευθεία περιστρέφεται όταν αλλάζουν οι τιμές του α_1 αλλά και του β_1 , ενώ μεταφέρεται όταν αλλάζουν οι τιμές του γ_1 . Με τον τρόπο αυτό μπορούν πλέον να κατασκευαστούν ευθείες κάθετες στον $\chi'\chi$.

Στην επόμενη ερώτηση οι μαθητές θα δημιουργήσουν έναν αλγόριθμο γραφικής λύσης συστήματος της μορφής:

Μεταβολείς μπλε $\rightarrow$ Μεταβολείς κόκκινοι $\rightarrow$ Σημείο τομής.

Στην τρίτη ερώτηση οι μαθητές θα επιχειρήσουν να εξηγήσουν την ένδειξη 'δεν ορίζεται' όταν οι δύο ευθείες γίνουν παράλληλες. Εδώ καλό θα είναι να αναζητήσουν οι μαθητές στα βοηθητικά αντικείμενα, τον τρόπο με τον οποίο κατασκευάζεται η ποσότητα D .

Στην τελευταία ερώτηση οι μαθητές θα λύσουν το αντίστροφο πρόβλημα της λύσης ενός συστήματος. Συγκεκριμένα εδώ δίνεται η λύση του συστήματος και οι μαθητές θα πρέπει να κατασκευάσουν το σύστημα.

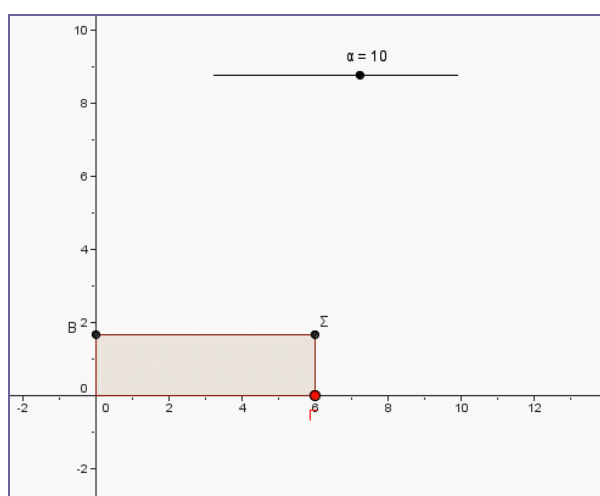
Αυτό που είναι σημαντικό να επισημανθεί είναι ότι το πρόβλημα δεν έχει μία μόνο λύση αλλά άπειρες.

1.3.4 Η ΥΠΕΡΒΟΛΗ

Η βασική ιδέα της δραστηριότητας είναι η προσομοίωση των μεταβολών που υφίσταται ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο που διατηρεί σταθερό το εμβαδόν του. Η μία κορυφή του ορθογώνιου διαγράφει μία υπερβολή και οι μαθητές θα προσαρμόσουν πάνω στο ίχνος της κορυφής μία δυναμική υπερβολή συνδέοντας την γραφική παράσταση με τα αντιστρόφως ανάλογα ποσά.

Φύλλο εργασίας

Στην οθόνη προβάλλεται ένα δυναμικό ορθογώνιο παραλληλόγραμμο το οποίο μεταβάλλεται όταν σύρουμε την κορυφή του Γ . Επιπλέον εμφανίζεται ένας μεταβολέας α . Στα βοηθητικά αντικείμενα υπάρχει η μέτρηση του εμβαδού του τετραπλεύρου και μία συνάρτηση την οποία μπορείτε να επαναπροσδιορίσετε ανάλογα με τις ερωτήσεις που ακολουθούν.



ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ ΓΙΑ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ

1. Να σύρετε το κόκκινο σημείο Γ . Πως μεταβάλλεται το ορθογώνιο. Ποια ποσά παραμένουν σταθερά και ποια μεταβάλλονται.
2. Να εμφανίσετε τις συντεταγμένες του σημείου Σ . Να σύρετε το σημείο Γ ώστε οι συντεταγμένες του Σ να γίνουν ακέραιες. Ποια σχέση έχουν οι συντεταγμένες με το εμβαδόν; Να επιλέξετε και άλλες θέσεις του Γ ώστε να ενισχύσετε την εικασία σας για την σχέση των συντεταγμένων του Σ με το εμβαδόν του ορθογώνιου.
3. Να εμφανίσετε το ίχνος του σημείου Σ και να σύρετε το σημείο Γ . Τι μορφή έχει η καμπύλη; Ποια συνάρτηση έχει αυτής της μορφής την γραφική παράσταση;
4. Χρησιμοποιώντας την βοηθητική συνάρτηση $f(x)$ και την παράμετρο α να κατασκευάσετε μία συνάρτηση της οποίας η γραφική παράσταση να περνά από τα ίχνη των σημείων του Σ .
5. Να μεταβάλετε τις τιμές του α ώστε να γίνουν αρνητικές. Να πειραματιστείτε με διάφορες μορφές της συνάρτησης f που έχουν γραφική παράσταση παρόμοιες καμπύλες με αυτές του ερωτήματος 3.

Οδηγίες για την υλοποίηση της δραστηριότητας

Προετοιμασία

Η διάρκεια της δραστηριότητας είναι μία διδακτική ώρα και μπορεί να υλοποιηθεί ως εφαρμογή ή ως εισαγωγή στην παράγραφο που αναφέρεται στην συνάρτηση $f(x)=a/x$

Οι μαθητές θα πρέπει να γνωρίζουν τον τρόπο με τον οποίο μπορούμε να κατασκευάσουμε μία γραφική παράσταση με το λογισμικό.

Η υλοποίηση

Ο διδάσκων μπορεί να υλοποιήσει την δραστηριότητα ως εφαρμογή της παραγράφου που αναφέρετε στην υπερβολή.

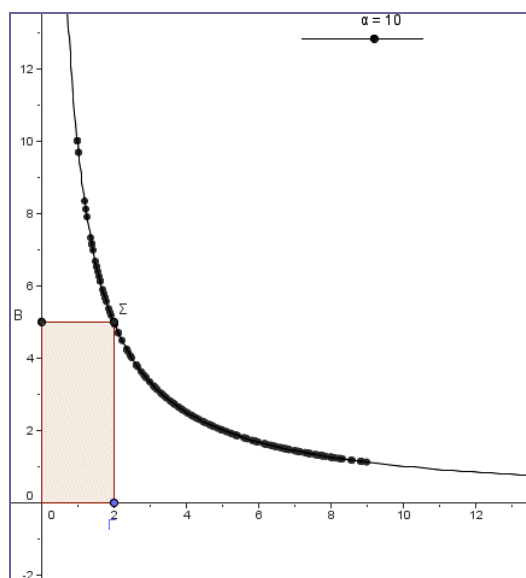
Ο στόχος της πρώτης ερώτησης είναι να μελετήσουν οι μαθητές ένα γεωμετρικό φαινόμενο, να εντοπίσουν την σταθερότητα του εμβαδού και να κάνουν εικασίες για την πορεία που ακολουθεί η κορυφή Σ. Προφανώς τα μεγέθη που μεταβάλλονται είναι τα μήκη των πλευρών του ορθογωνίου.

Στην δεύτερη ερώτηση οι μαθητές θα παρατηρήσουν ότι οι συντεταγμένες του σημείου Σ έχουν γινόμενο σταθερό και ίσο πάντα με την τιμή του a .

Στην τρίτη ερώτηση οι μαθητές αναμένεται να ανακαλέσουν την γραφική παράσταση της υπερβολής και τα αντιστρόφως ανάλογα μεγέθη.

Στην τέταρτη ερώτηση οι μαθητές επαναπροσδιορίζουν τον τύπο της συνάρτησης σε $f(x)=a/x$ και την εμφανίζουν. Προσπαθώντας να προσαρμόσουν την καμπύλη πάνω στο σημείο Σ ίσως χρειαστεί να επεκτείνουν τις τιμές που μπορεί να πάρει ο μεταβολέας a π.χ το άκρο 5 να γίνει 10.

Μεταβάλλοντας τις τιμές του a παρατηρούν ότι για $a=10$ η καμπύλη περνά από το Σ και αυτό αφήνει ίχνη που βρίσκονται πάνω στην καμπύλη.



Στην τελευταία ερώτηση οι μαθητές θα αυτενεργήσουν ως προς τις μορφές της συνάρτησης που θα κατασκευάσουν. Έχει ενδιαφέρον η κατασκευή και μελέτη της συνάρτησης $f(x)=\frac{1}{x+a}$.

1.3.5 ΤΟ ΤΡΙΩΝΥΜΟ

Η βασική ιδέα της δραστηριότητας ανάγεται στην χρήση της γραφικής παράστασης του τριωνύμου και την μελέτη του προσήμου του.

Η δραστηριότητα μπορεί να εξελιχτεί σε έναν πυρήνα γύρω από τον οποίο ο διδάσκων θα δημιουργήσει μία σειρά από ερωτήματα που να καλύπτουν όλο το φάσμα της θεματικής περιοχής του τριωνύμου. Ο βασικός στόχος της δραστηριότητας είναι η οπτικοποίηση της κατασκευής της γραφικής παράστασης ενός τριωνύμου μέσω μεταφορών της γραφικής παράστασης της $f(x)=ax^2$.

Η δευτεροβάθμια συνάρτηση, η δευτεροβάθμια εξίσωση και το πρόσημο του τριωνύμου μπορούν να παρουσιαστούν συνολικά με το συγκεκριμένο αρχείο του λογισμικού.

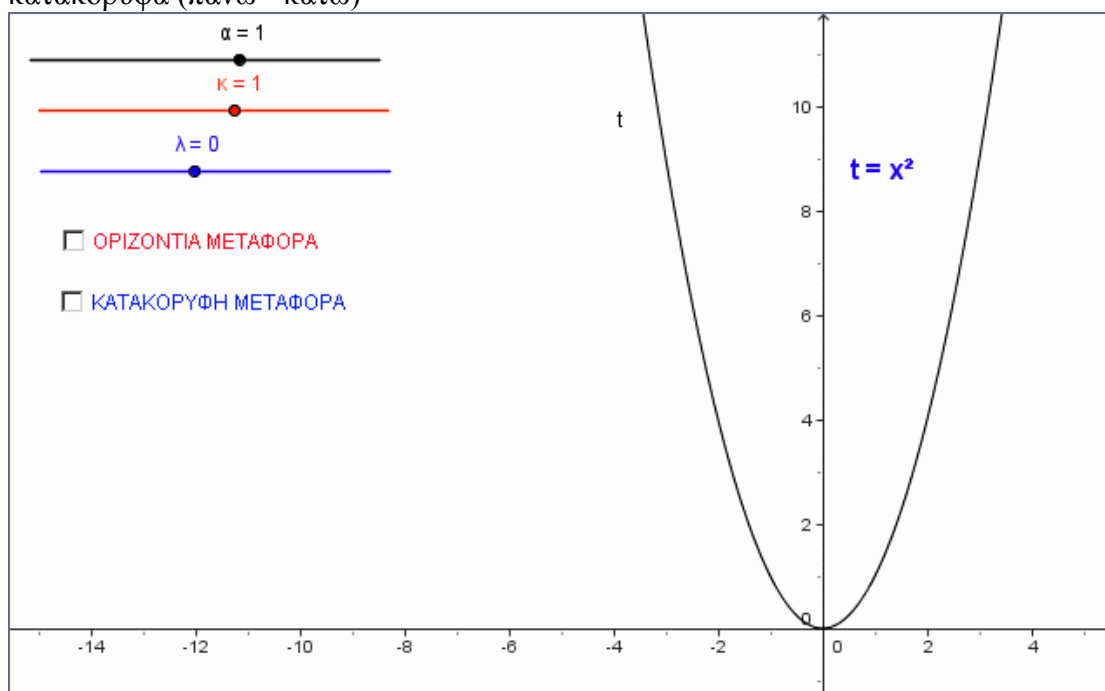
Οι ερωτήσεις του φύλλου εργασίας είναι ενδεικτικές.

Φύλλο εργασίας

Στην οθόνη προβάλλονται:

Η γραφική παράσταση ενός τριωνύμου t και τρεις μεταβολές α , κ , λ . Επιπλέον εμφανίζονται δύο κουμπιά εμφάνισης και απόκρυψης, με τίτλους ΟΡΙΖΟΝΤΙΑ ΜΕΤΑΦΟΡΑ και ΚΑΤΑΚΟΡΥΦΗ ΜΕΤΑΦΟΡΑ.

Ο στόχος της δραστηριότητας είναι να διερευνήσουμε τις μεταβολές του τύπου του τριωνύμου όταν η γραφική του παράσταση μεταφέρεται οριζόντια (δεξιά-αριστερά) ή κατακόρυφα (πάνω - κάτω)



Να μεταφέρετε με τον κέρσορα την γραφική παράσταση προς τα δεξιά και στην συνέχεια προς τα πάνω.

ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ ΓΙΑ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ

1. Τι μετασχηματισμό παρατηρείτε στον τύπο του τριωνύμου όταν η γραφική του παράσταση μεταφέρεται δεξιά ως προς τον άξονα $\psi'\psi$;
2. Τι μετασχηματισμό παρατηρείτε στον τύπο του τριωνύμου όταν η γραφική του παράσταση μεταφέρεται πάνω ως προς τον άξονα $\chi'\chi$;
3. Να μελετήσετε τους μετασχηματισμούς του τύπου του τριωνύμου όταν η γραφική του παράσταση μεταφέρεται αριστερά του $\psi'\psi$ ή κάτω του $\chi'\chi$.
4. Να διαγράψετε (ή να αποκρύψετε) την γραφική παράσταση του τριωνύμου t και να εμφανίσετε την γραφική παράσταση δύο άλλων συναρτήσεων με το κουμπί 'ΟΡΙΖΟΝΤΙΑ ΜΕΤΑΦΟΡΑ'. Να μεταβάλλετε τις παραμέτρους α και κ . Ποια είναι η σχέση των δύο γραφικών παραστάσεων;
5. Να εμφανίσετε την γραφική παράσταση μίας επιπλέον συνάρτησης με το κουμπί 'ΚΑΤΑΚΟΡΥΦΗ ΜΕΤΑΦΟΡΑ'. Να μεταβάλλετε την παράμετρο λ . Ποια είναι η σχέση της νέας γραφικής παράστασης με τις προηγούμενες;
6. Να κατασκευάσετε με την βοήθεια των μεταβολών την γραφική παράσταση του τριωνύμου $2x^2-12x+10$. Πως μπορούμε να βρίσκουμε τις τιμές των παραμέτρων α , κ , λ όταν μας δίνουν τους συντελεστές α , β , γ στο τριώνυμο $ax^2+bx+\gamma$;
7. Να συνοψίσετε τα συμπεράσματά σας σε αυστηρά μαθηματική ορολογία. Συγκεκριμένα να κατασκευάσετε τύπους οι οποίοι θα συνδέουν τις παραμέτρους κ , λ με τους συντελεστές α , β , γ του τριωνύμου $ax^2+bx+\gamma$.

Οδηγίες για την υλοποίηση της δραστηριότητας

Προετοιμασία

Η διάρκεια της δραστηριότητας είναι μία διδακτική ώρα και μπορεί να υλοποιηθεί ως εισαγωγή στην παράγραφο που αναφέρεται στην συνάρτηση $f(x)=ax^2+bx+\gamma$.

Οι μαθητές θα πρέπει να γνωρίζουν τον τρόπο με τον οποίο μπορούμε να κατασκευάσουμε μία γραφική παράσταση με το λογισμικό. Επιπλέον θα πρέπει να γνωρίζουν την γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=ax^2$.

Η υλοποίηση

Το λογισμικό διαθέτει μία σημαντική ιδιότητα όσον αφορά την γραφική παράσταση συνάρτησης. Συγκεκριμένα όταν σύρουμε την γραφική παράσταση προς μία κατεύθυνση (δεξιά – αριστερά ή πάνω – κάτω) τότε εμφανίζονται οι μετασχηματισμοί που υφίσταται η εξίσωσή της.

Στις τρεις πρώτες ερωτήσεις οι μαθητές αναμένεται να διαπιστώσουν τους παραπάνω μετασχηματισμούς και να πειραματιστούν για λίγο με αυτούς. Είναι σημαντικό να σημειώσουν τους μετασχηματισμούς στο τετράδιό τους ώστε να έχουν την βασική έκφραση ενός τριωνύμου που έχει προκύψει από μεταφορές της $f(x)=ax^2$.

Στην τέταρτη ερώτηση ο στόχος είναι να διαπιστώσουν οι μαθητές ότι κάθε αλλαγή της τιμής του α επιφέρει μεταβολή της καμπυλότητας της παραβολής. Ακόμη θα πρέπει να συνδέσουν την παράμετρο κ με το διάνυσμα μεταφοράς v . Το διάνυσμα αυτό έχει συντεταγμένες $(\kappa, 0)$. Εδώ καλό θα είναι οι μαθητές να σύρουν το σημείο Σ

πάνω στην μια γραφική παράσταση για να διαπιστώσουν ότι η εικόνα του Σ_0 μέσω της μεταφοράς κατά διάνυσμα v κινείται πάνω στην γραφική παράσταση της παραβολής που είναι χρωματισμένη κόκκινη.

Στην πέμπτη ερώτηση οι μαθητές θα εργαστούν όμοια με την προηγούμενη ερώτηση. Εδώ το σύρσιμο του σημείου Σ πάνω στην πρώτη παραβολή έχει σαν αποτέλεσμα την ταυτόχρονη μετακίνηση των σημείων Σ_0 και Σ_K πάνω στις δύο παραβολές που έχουν προκύψει από οριζόντια και κατακόρυφη μεταφορά της αρχικής.

Η έκτη ερώτηση έχει στόχο να εμπλέξει τους μαθητές στην διαδικασία εύρεσης της σχέσης των παραμέτρων κ, λ με τους συντελεστές α, β, γ . Εδώ οι μαθητές θα πρέπει στο τετράδιό τους θα αναπτύξουν την ταυτότητα και να κάνουν τις πράξεις στην παράσταση $\alpha(x-\kappa)^2 + \lambda$ οπότε το τριώνυμο μετασχηματίζεται σε $\alpha x^2 - 2\alpha\kappa x + \alpha\kappa^2 + \lambda$.

Θα πρέπει να παρατηρήσουν ότι $\alpha=2$, $-2\alpha\kappa=-12$ και $\alpha\kappa^2 + \lambda=10$ οπότε μπορούν να υπολογίσουν τα κ και λ και επομένως μπορούν να κάνουν τις κατάλληλες μεταφορές με τους μεταβολείς.

Ένας άλλος τρόπος θα ήταν να κατασκευάσουν της γραφική παράσταση του τριωνύμου $2x^2-12x+10$ με την βοήθεια του λογισμικού και στην συνέχεια με την βοήθεια των μεταβολέων να μεταφέρουν την γραφική παράσταση της αx^2 ώστε να πέσει πάνω στην γραφική παράσταση της $2x^2-12x+10$.

Επέκταση

Ο διδάσκων έχει την δυνατότητα να ζητήσει από τους μαθητές να μετονομάσουν τους μεταβολείς κ, λ σε β, γ να διαγράψουν τις γραφικές παραστάσεις και στην συνέχεια να κατασκευάσουν με το λογισμικό την γραφική παράσταση της $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$.

Επιπλέον θα δημιουργήσουν την ποσότητα $\beta^2 - 4\alpha\gamma$ η οποία θα εμφανιστεί στα εξαρτημένα αντικείμενα.

Καθώς οι μαθητές αλλάζουν τις τιμές των μεταβολέων θα μπορούν να μελετούν το πρόσημο του τριωνύμου σε συνδυασμό με το πρόσημο της ποσότητας $\beta^2 - 4\alpha\gamma$

2 ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΤΗΣ Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ ΜΕ ΤΟ ΛΟΓΙΣΜΙΚΟ GEOGEBRA

Η χρήση του παρόντος λογισμικού στη διδασκαλία της Γεωμετρίας της Α΄ Λυκείου μπορεί να υποστηρίξει επιλεγμένα θέματα γεωμετρίας της Α΄ Λυκείου .

Οι δραστηριότητες που προτείνονται στην συνέχεια είναι ενδεικτικές και αναφέρονται τόσο σε βασικά θέματα όσο και σε διερευνητικές εργασίες.

Ο στόχος των δραστηριοτήτων είναι να υποστηρίξουν την διδασκαλία της Γεωμετρίας σε επιλεγμένες θεματικές περιοχές. Η υποστήριξη αυτή ανάγεται στην δημιουργία εισαγωγικών δραστηριοτήτων για την διδασκαλία γεωμετρικών εννοιών και προτάσεων και στην δημιουργία συνδέσεων μεταξύ τους.

Συγκεκριμένα έχουν σχεδιαστεί δραστηριότητες με τις οποίες ο μαθητής μπορεί να μελετήσει προσομοιώσεις πραγματικών καταστάσεων και να αναδείξει τα μαθηματικά που είναι ενσωματωμένα σε αυτές. Η μπάλα ενός μπιλιάρδου, μία σκάλα που ολισθαίνει σε έναν τοίχο αποτελούν αφορμές να εμπλακούν οι μαθητές σε διαδικασίες μελέτης του μαθηματικού μοντέλου της κατάστασης και να συνδέσουν τα μαθηματικά με αυθεντικές πραγματικές καταστάσεις.

2.1 Βασικές δραστηριότητες

Ο όρος ‘βασικές’ έχει την έννοια ότι αυτές είναι απλές και μπορούν να υλοποιηθούν από τους μαθητές οι οποίοι θα εμφανίζουν σταδιακά τις διάφορες κατασκευές από τα βοηθητικά αντικείμενα.(ευθεία, γωνία, κάθετος, παράλληλη κ.λ.π).

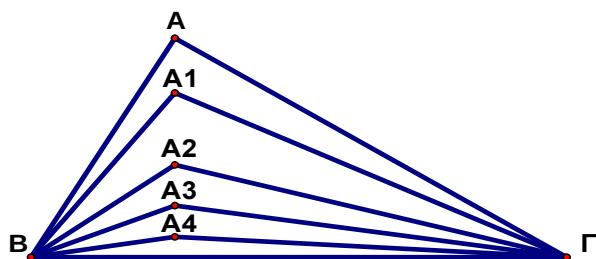
Οι κατασκευές αυτές μπορεί να αναφέρονται σε μία συγκεκριμένη γεωμετρική έννοια, ή πρόταση. Ακόμη θα μπορούσαν να αναφέρονται σε μία άσκηση γεωμετρίας ή μία εφαρμογή της. Ο διδάσκων μπορεί να υλοποιήσει τις δραστηριότητες μέσα στην τάξη είτε ως παρουσίαση, είτε μέσα στο εργαστήριο των υπολογιστών του σχολείου.

Στην συνέχεια προτείνονται 3 ενδεικτικές βασικές δραστηριότητες.

2.1.1 ΑΘΡΟΙΣΜΑ ΓΩΝΙΩΝ ΤΡΙΓΩΝΟΥ

Ο διδάσκων αρχικά επισημαίνει ότι μία από τις περισσότερες γνωστές σχέσεις στην γεωμετρία είναι και αυτή που συνδέει τις τρεις γωνίες ενός τριγώνου.

Στην συνέχεια ζητά από τους μαθητές να φανταστούν ότι η γωνία Α ενός τριγώνου ΑΒΓ συνεχώς πλησιάζει προς την βάση ΒΓ. Τότε προφανώς από τις τρεις γωνίες η Α πλησιάζει να γίνει 180° ενώ οι άλλες μικραίνουν συνεχώς και τα μέτρα τους πλησιάζουν στο 0.

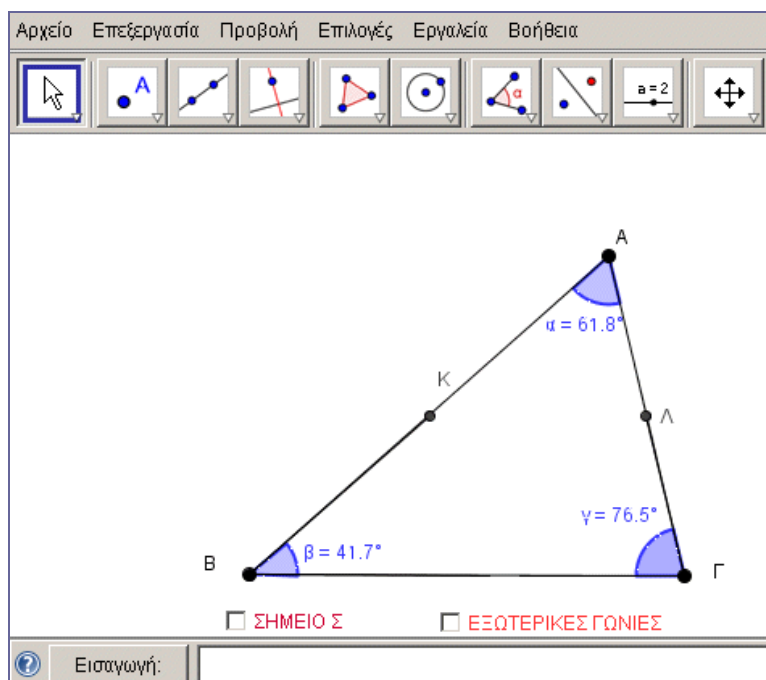


Αυτό ακριβώς το σχήμα μπορεί να υλοποιηθεί με δυναμικό τρόπο με την βοήθεια του λογισμικού.

Φύλλο εργασίας

Στην οθόνη προβάλλεται ένα τρίγωνο ΑΒΓ και οι μετρήσεις των γωνιών του.

Δύο κουμπιά, το ‘ΣΗΜΕΙΟ Σ’ και οι ‘ΕΞΩΤΕΡΙΚΕΣ ΓΩΝΙΕΣ’ εμφανίζουν και αποκρύπτουν μερικά γεωμετρικά αντικείμενα.



Ο στόχος μας είναι να μελετήσουμε και να αποδείξουμε την σχέση που υπάρχει μεταξύ των γωνιών του τριγώνου (εσωτερικών και εξωτερικών).

ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ ΓΙΑ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ

1. Να σύρετε την κορυφή Α και να προσθέσετε τα μέτρα των γωνιών. Τι παρατηρείτε; Να εμφανίσετε το σημείο Σ και επαναλάβετε το σύρσιμο της κορυφής Α. Τι παρατηρείτε ως προς το άθροισμα των γωνιών;
2. Να μετακινήσετε τις κορυφές Β και Γ ώστε να συμπίσουν με την κορυφή Α. Ποια είναι τώρα η θέση των μη κοινών πλευρών των γωνιών αυτών ως προς την ΒΓ. Να φέρετε από το σημείο Α μία παράλληλη προς την ΒΓ. Τι παρατηρείτε;
3. Πως μπορούμε να αποδείξουμε ότι το άθροισμα των γωνιών του τριγώνου είναι ίσο με 180^0 ;
4. Να επαναφέρετε τις κορυφές Β και Γ στην αρχική τους θέση. Να εμφανίσετε τις εξωτερικές γωνίες του τριγώνου. Να συγκρίνεται την φ με το άθροισμα των γωνιών Α και Γ. Τι παρατηρείτε; Πως μπορείτε να δικαιολογήσετε την σχέση αυτή;
5. Να συγκρίνεται την γωνία θ με το άθροισμα των γωνιών Α και Β. Τι παρατηρείτε; Πως μπορείτε να δικαιολογήσετε την σχέση αυτή;
Να διατυπώσετε έναν κανόνα.
6. Να διαγράψετε το τρίγωνο και να κατασκευάσετε ένα τετράπλευρο με το αντίστοιχο εργαλείο που διαθέτει το λογισμικό. Να μετρήσετε τις γωνίες του και να τις προσθέσετε. Τι παρατηρείτε ως προς το άθροισμα των γωνιών αυτών;
Να διατυπώσετε έναν κανόνα.
7. Να κατασκευάσετε τις εξωτερικές γωνίες του τετραπλεύρου, να υπολογίσετε το άθροισμα και να μεταβάλετε το τετράπλευρο. Τι παρατηρείτε ως προς το άθροισμα; Να εξετάσετε αν ισχύει το ίδιο σε οποιοδήποτε πολύγωνο.

Οδηγίες για την υλοποίηση της δραστηριότητας**Προετοιμασία**

Η διάρκεια της δραστηριότητας είναι μία διδακτική ώρα και μπορεί να υλοποιηθεί ως εισαγωγή στην παράγραφο που αναφέρεται στο άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου.

Οι μαθητές θα πρέπει να γνωρίζουν τις προτάσεις που σχετίζονται με την ισότητα γωνιών που δημιουργούνται από δύο παράλληλες που τέμνονται από τρίτη ευθεία. Επιπλέον θα πρέπει να ανακαλέσουν την έννοια της παραπληρωματικής μίας γωνίας. Τέλος θα πρέπει να γνωρίζουν τον τρόπο με τον οποίο μπορούμε να φέρνουμε παράλληλη από σημείο σε ευθεία.

Η υλοποίηση

Οι μαθητές αρχικά θα μεταβάλουν το τρίγωνο σύροντας την κορυφή Α. Ένας άλλος τρόπος μεταβολής του τριγώνου είναι να εμφανίσουν το σημείο Σ, με το αντίστοιχο κουμπί, και να το σύρουν ώστε να αλλάξει το ύψος του τριγώνου.

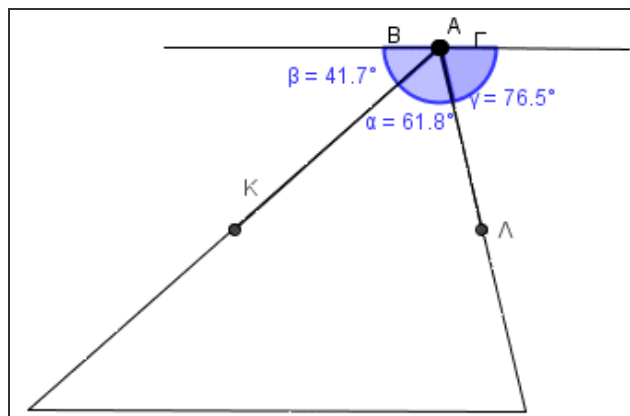
Κάθε φορά που μεταβάλλεται το τρίγωνο ο διδάσκων ζητά από τους μαθητές να υπολογίζουν το άθροισμα των γωνιών. Αυτό είναι εφικτό μέσω του λογισμικού αν οι μαθητές πληκτρολογήσουν στην μπάρα της 'Εισαγωγής' $\alpha + \beta + \gamma$. Το λογισμικό στα

εξαρτημένα αντικείμενα εμφανίζει το άθροισμα ως δ. Καθώς οι μαθητές θα μεταβάλλουν το τρίγωνο θα παρατηρούν ότι το άθροισμα αυτό παραμένει σταθερό.

Εδώ ο διδάσκων καλό θα είναι να επισημάνει την ανάγκη αυστηρής απόδειξης αφού δεν είναι δυνατόν να θεωρηθεί ότι οι μετρήσεις που πραγματοποιεί το λογισμικό μπορεί να αποτελέσουν απόδειξη μιας πρότασης.

Στην συνέχεια θα σύρουν τις κορυφές Β και Γ και θα παρατηρήσουν ότι κινούνται σε ημικύκλια που καταλήγουν στην κορυφή Α.

Το τελικό σχήμα που θα προκύψει υποδεικνύει τρόπους απόδειξης της πρότασης που σχετίζεται με το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου.



Συγκεκριμένα αναμένεται οι μαθητές να υποθέσουν ότι οι μη κοινές πλευρές των γωνιών Β και Γ βρίσκονται σε ευθεία παράλληλη προς την βάση ΒΓ.

Εδώ καλό θα είναι να πειραματιστούν μεταβάλλοντας το τρίγωνο και παρατηρώντας ότι η εικασία τους είναι ισχυρή.

Τέλος με την βοήθεια του διδάσκοντα οι μαθητές θα περιγράψουν και θα υλοποιήσουν την απόδειξη της πρότασης για το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου στο τετράδιό τους.

Η τέταρτη ερώτηση έχει στόχο να συνδέσουν οι μαθητές μία εξωτερική γωνία του τριγώνου με τις απέναντι εσωτερικές.

Η έκτη ερώτηση θα μπορούσε να αποτελέσει την αφετηρία μιας διερεύνησης για το άθροισμα των εσωτερικών γωνιών ενός οποιουδήποτε κυρτού πολυγώνου. Για το τετράπλευρο οι μαθητές θα διαπιστώσουν ότι το άθροισμα είναι σταθερό προσθέτοντας τις 4 γωνίες του και παρατηρώντας ότι το άθροισμα είναι πάντα 360^0 .

Ο διδάσκων θα μπορούσε να ζητήσει από τους μαθητές να συνεχίσουν την διερεύνηση για το άθροισμα των γωνιών ενός πενταγώνου και ούτω καθεξής.

Στην τελευταία ερώτηση αναμένεται να κάνουν οι μαθητές μία εικασία για το άθροισμα των εξωτερικών γωνιών ενός πολυγώνου. Ο διδάσκων θα μπορούσε να ζητήσει να συνεχίσουν την διερεύνηση ενώ στο τέλος καλό θα ήταν να διαπραγματευτεί και μία αυστηρή απόδειξη για τις προτάσεις που έχουν προκύψει.

2.1.2 ΤΟ ΚΕΝΤΡΟ ΒΑΡΟΥΣ ΤΡΙΓΩΝΟΥ

Το κέντρο βάρους ενός τριγώνου θα προκύψει ως το σημείο τομής των τριών διαμέσων ενός δυναμικού τριγώνου.

Οι μετρήσεις, που επιτρέπει το λογισμικό να γίνουν, υποδεικνύουν την σχέση μεταξύ των τμημάτων στα οποία το κέντρο βάρους χωρίζει μία διάμεσο.

Με βάση αυτήν την σχέση και με την χρήση του θεωρήματος του Θαλή μπορούμε να εντοπίσουμε το κέντρο βάρους ενός τριγώνου χρησιμοποιώντας μία μόνο διάμεσο.

Προφανώς οι μαθητές θα πρέπει να ανακαλέσουν το θεώρημα του Θαλή που έχουν διδαχτεί στο Γυμνάσιο.

Φύλλο εργασίας

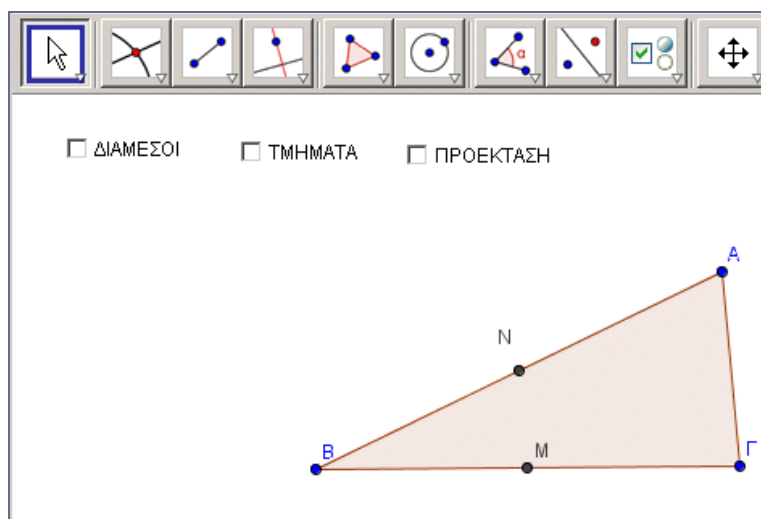
Στην οθόνη προβάλλεται ένα τρίγωνο $AB\Gamma$ και τα μέσα των πλευρών του M, N .

Το κουμπί 'ΔΙΑΜΕΣΟΙ' εμφανίζει και αποκρύπτει τις διαμέσους.

Το κουμπί 'ΤΜΗΜΑΤΑ' εμφανίζει και αποκρύπτει τμήματα πάνω στην διάμεσο AM .

Το κουμπί 'ΠΡΟΕΚΤΑΣΗ' εμφανίζει και αποκρύπτει βοηθητικές ευθείες.

Ο στόχος μας είναι να μελετήσουμε τις ιδιότητες του σημείου τομής των διαμέσων του τριγώνου.



ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ ΓΙΑ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ

1. Να εμφανίσετε τις διαμέσους του τριγώνου. Να σύρετε την κορυφή A . Τι παρατηρείτε;
2. Να εμφανίσετε τα τμήματα AK και KM με το κουμπί 'ΤΜΗΜΑΤΑ'. Να μεταβάλλετε την κορυφή A και να συγκρίνετε τα μήκη τους. Τι παρατηρείτε;
3. Να αποκρύψετε τις διαμέσους και να εμφανίσετε τα τμήματα που αποκρύπτει το κουμπί 'ΠΡΟΕΚΤΑΣΗ'. Να σύρετε το σημείο Π ώστε να συμπέσει με το σημείο K . Υπάρχει στο σχήμα κάποιο τετράπλευρο που φαίνεται να είναι παραλληλόγραμμο; Να δικαιολογήσετε με μαθηματικό τρόπο την παρατήρησή σας.

4. Χρησιμοποιήστε τις ιδιότητες του παραλληλογράμμου για να δικαιολογήσετε το γεγονός ότι $ΠΡ=2ΠΜ$. Με βάση τα προηγούμενα να περιγράψετε μία απόδειξη της ιδιότητας που έχετε εντοπίσει στην ερώτηση 2.
5. Να περιγράψετε έναν τρόπο με τον οποίο θα μπορούμε να κατασκευάσουμε το κέντρο βάρους ενός τριγώνου φέροντας μόνο μια από τις διαμέσους

Οδηγίες για την υλοποίηση της δραστηριότητας

Προετοιμασία

Η διάρκεια της δραστηριότητας είναι μία διδακτική ώρα και μπορεί να υλοποιηθεί ως εισαγωγή στην παράγραφο που αναφέρεται στο κέντρο βάρους ενός τριγώνου.

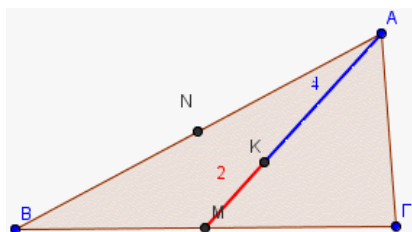
Οι μαθητές θα πρέπει να γνωρίζουν την έννοια της διαμέσου ενός τριγώνου και τις ιδιότητες των παραλληλογράμμων.

Η υλοποίηση

Οι μαθητές στην αρχή θα παρατηρήσουν ότι τα τρία τμήματα που αντιστοιχούν στις τρεις διαμέσους φαίνεται να περνούν από το ίδιο σημείο. Ο διδάσκων επισημαίνει ότι το συγκεκριμένο σημείο έχει χαρακτηριστεί ως κέντρο βάρους του τριγώνου.

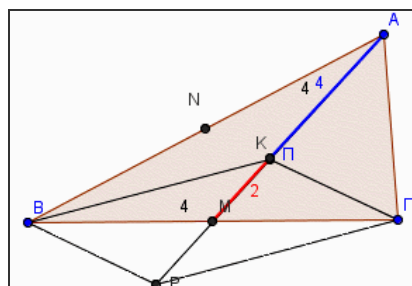
Στην δεύτερη ερώτηση οι μετρήσεις του λογισμικού θα επιτρέψουν στους μαθητές να παρατηρήσουν την βασική ιδιότητα του κέντρου βάρους το οποίο διαιρεί την διάμεσο σε τμήματα ανάλογα των αριθμών 2 και 1.

Ο διδάσκων θα ζητήσει από τους μαθητές να οδηγήσουν στην αρχή της κορυφή Α σε θέσεις στις οποίες τα δύο τμήματα έχουν ακέραιες μετρήσεις.



Από την τρίτη ερώτηση αρχίζει μία διαδικασία απόδειξης της παραπάνω ιδιότητας του κέντρου βάρους.

Η κατασκευή που εμφανίζεται με το κουμπί 'ΠΡΟΕΚΤΑΣΗ' θα επιτρέψει την οπτικοποίηση της απόδειξης που προτείνει το σχολικό βιβλίο. Συγκεκριμένα όταν οι μαθητές θα οδηγήσουν το σημείο Π πάνω στο Κ θα παρατηρήσουν ότι το τετράπλευρο ΒΠΓΡ είναι παραλληλόγραμμο. Επειδή το ΝΚ ενώνει τα μέσα πλευρών του ΑΒΡ άρα είναι παράλληλο στην ΒΡ και επομένως είναι συνευθειακό με το τμήμα ΓΠ και ίσο με το μισό του.

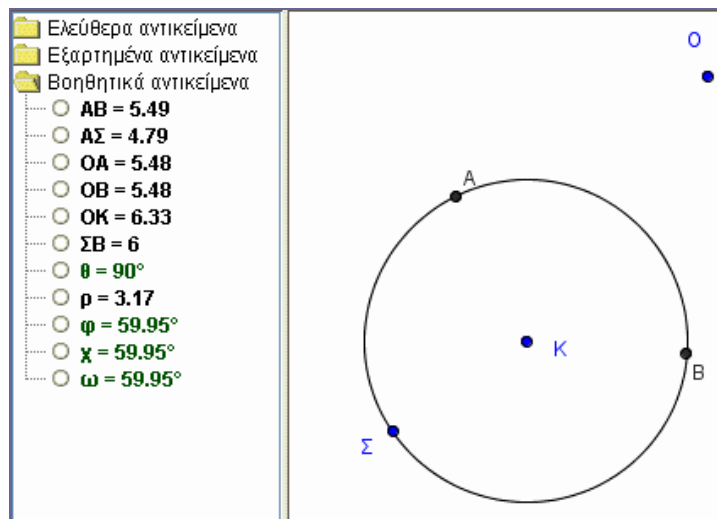


2.1.3 ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗ ΚΥΚΛΟΥ

Με την δραστηριότητα αυτή οι μαθητές θα χειριστούν μία γεωμετρική, δυναμική κατασκευή η οποία θα τους επιτρέψει να συνδέσουν, και κατά κάποιον τρόπο να συνοψίσουν, τις ιδιότητες που αφορούν στο σύστημα των εφαπτόμενων τμημάτων σε έναν κύκλο και των γωνιών που δημιουργούνται.

Φύλλο εργασίας

Στην οθόνη προβάλλεται ένας κύκλος, ένα σημείο O εκτός κύκλου και τρία σημεία Σ , A , B πάνω στον κύκλο.



ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ ΓΙΑ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ

1. Να εμφανίσετε το τμήμα OA , την ακτίνα ρ και την γωνία θ . Να μεταφέρετε το σημείο O σε διάφορες θέσεις. Να αλλάξετε την ακτίνα του κύκλου σύροντας το σημείο Σ . Ποια φαίνεται να είναι η θέση του τμήματος OA ως προς τον κύκλο; Να εμφανίσετε την γωνία θ . Να δικαιολογήσετε την θέση του τμήματος OA ως προς τον κύκλο με βάση την μέτρηση της γωνίας.
2. Να εμφανίσετε το τμήμα OB να σύρετε το σημείο O . Να εξηγήσετε γιατί το τμήμα OB είναι εφαπτόμενο με βάση τις μετρήσεις.
3. Να εμφανίσετε τα τμήματα ΣA , ΣB και AB . Ακόμη να εμφανίσετε τις γωνίες φ και χ . Να σύρετε το σημείο O . Ποια σχέση συνδέει τις δύο γωνίες;
4. Να εμφανίσετε το τμήμα OK και την γωνία ω . Να μετρήσετε την γωνία ω . Να σύρετε το σημείο O και το σημείο Σ . Ποια σχέση συνδέει την γωνία ω με την γωνία φ και ποια με την γωνία χ ; Να δικαιολογήσετε με βάση το σχήμα (όχι τις μετρήσεις) γιατί $\omega = \varphi$. Στην συνέχεια να δικαιολογήσετε γιατί $\omega = \chi$.

Οδηγίες για την υλοποίηση της δραστηριότητας

Προετοιμασία

Η διάρκεια της δραστηριότητας είναι μία διδακτική ώρα και μπορεί να υλοποιηθεί ως εισαγωγή στην παράγραφο που αναφέρεται στις εφαπτόμενες του κύκλου που άγονται από σημείο εκτός του κύκλου και κυρίως στην γωνία υπό χορδής και εφαπτομένης.

Οι μαθητές θα πρέπει να γνωρίζουν τις βασικές ιδιότητες της εφαπτομένης, τον ορισμό της και την σχέση της επίκεντρης με την εγγεγραμμένη γωνία.

Η υλοποίηση

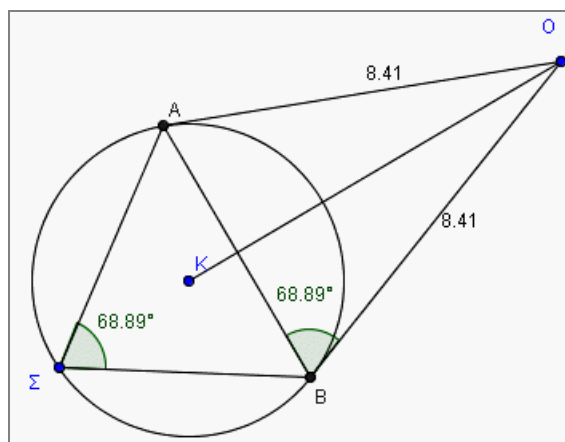
Ο στόχος της δραστηριότητας αυτής είναι η σύνδεση εννοιών και προτάσεων που συνδέονται με την εφαπτομένη σε κύκλο, δηλαδή την συνολική παρουσίαση των προτάσεων που αφορούν στις εφαπτόμενες κύκλου. Οι ιδιότητες αυτές αναφέρονται στην γωνία που σχηματίζεται υπό χορδής και εφαπτομένης καθώς και στην ισότητα των εφαπτόμενων τμημάτων από σημείο προς κύκλο.

Στην πρώτη ερώτηση οι μαθητές θα αναγνωρίσουν ότι το τμήμα OA είναι εφαπτόμενο στον κύκλο αφού είναι κάθετο στην ακτίνα KA στο άκρο της. Εδώ θα χρειαστεί οι μαθητές να κατασκευάσουν την ακτίνα AK και να εμφανίσουν την γωνία θ .

Στην δεύτερη ερώτηση οι μαθητές θα παρατηρήσουν ότι το τμήμα OB παραμένει ίσο με το OA και επομένως θα πρέπει να είναι εφαπτόμενο στον κύκλο.

Στις επόμενες ερωτήσεις οι μαθητές παρατηρούν τις σχέσεις των πλευρών και των γωνιών οι οποίες παραμένουν ακόμη και αν μεταβληθεί η ακτίνα του κύκλου ή μετακινηθεί το σημείο O . Τα τμήματα OK και KB θα δώσουν τις απαραίτητες διαισθήσεις για την απόδειξη των σχέσεων.

Η ολοκληρωμένη κατασκευή φαίνεται παρακάτω.



2.2 Διερευνητικές δραστηριότητες

Οι διερευνητικές δραστηριότητες έχουν διπλό στόχο. Από την μία επιτρέπουν την δυναμική διερεύνηση γεωμετρικών αντικειμένων και από την άλλη συμβάλουν στην σύνδεση διαφορετικών γεωμετρικών περιοχών.

Συγκεκριμένα η δυνατότητα κίνησης των αντικειμένων και η εισαγωγή παραμέτρων στην κατασκευή μας παρέχουν την ευχέρεια να επεκτείνουμε το πλαίσιο αναφοράς μιας άσκησης ή προβλήματος και να διερευνήσουμε γενικότερες περιπτώσεις.

Επιπλέον μπορούμε να δημιουργήσουμε δραστηριότητες οι οποίες καταργούν τα στεγανά μεταξύ των διαφόρων γεωμετρικών περιοχών και αναδεικνύουν ένα ενιαίο γενικό πλαίσιο μαθηματικής δράσης.

Τέλος, όπως θα φανεί στις δραστηριότητες που ακολουθούν, έχουμε την δυνατότητα να δημιουργήσουμε δυναμικές προσομοιώσεις πραγματικών καταστάσεων. Οι προσομοιώσεις εν γένει διαθέτουν μεγάλη διδακτική αξία αφού δίνουν την δυνατότητα στον μαθητή να γνωρίσει εφαρμογές των μαθηματικών σε πραγματικές καταστάσεις και να μελετήσει γεωμετρικά μοντέλα των καταστάσεων τα οποία φέρουν ενσωματωμένο πλούσιο μαθηματικό περιεχόμενο.

2.2.1 ΙΣΟΤΗΤΑ-ΟΜΟΙΟΤΗΤΑ ΤΡΙΓΩΝΩΝ

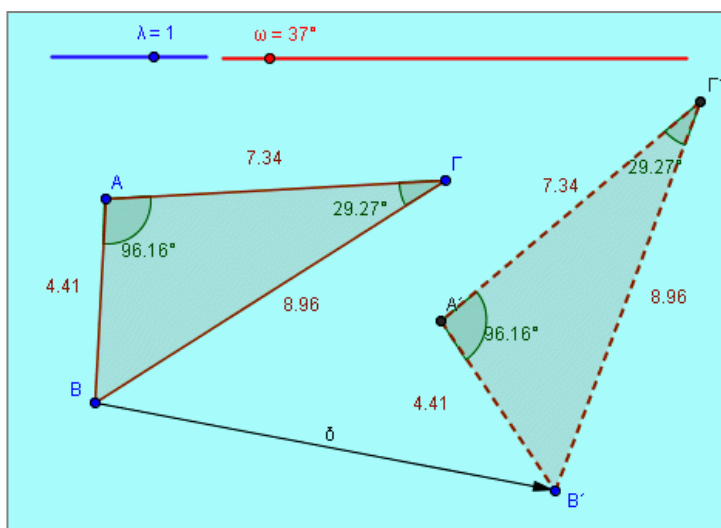
Η **βασική ιδέα** της δραστηριότητας στηρίζεται στην αντίληψη ότι η ισότητα και η ομοιότητα των τριγώνων προκύπτουν μέσα από κοινούς γεωμετρικούς μετασχηματισμούς της μεταφοράς, της περιστροφής και της διαστολής (dilate).

Συγκεκριμένα η δημιουργία δύο ομοίων (μη ίσων) τριγώνων μπορεί να γίνει με έναν συντελεστή διαστολής μικρότερο ή μεγαλύτερο της μονάδας. Η μεταφορά και η περιστροφή είναι ισομετρίες και επομένως δεν καταργούν την αρχική σχέση ομοιότητας των δύο τριγώνων.

Η ισότητα δύο τριγώνων μπορεί να προσδιοριστεί ως διαστολή με συντελεστή 1 και έτσι προκύπτουν κριτήρια ισότητας των τριγώνων.

ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Στην οθόνη προβάλλονται δύο τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ και οι τιμές των γωνιών τους και των πλευρών τους. Επιπλέον προβάλλονται ένας μεταβολέας λ αριθμών και ένας μεταβολέας ω γωνιών.



ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ ΓΙΑ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ

1. Ποια σχέση έχουν οι πλευρές και ποια οι γωνίες των δύο τριγώνων;
2. Πως έχει προκύψει το τρίγωνο $A'B'\Gamma'$ από το $AB\Gamma$; Να απαντήσετε αλλάζοντας τις τιμές της γωνίας ω και σύροντας το σημείο B' μέχρι να ταυτιστεί με το B .
3. Να αλλάξετε τις τιμές του μεταβολέα λ . Ποιες μεταβολές υφίσταται τώρα το τρίγωνο $A'B'\Gamma'$; Ποια μεγέθη παραμένουν σταθερά και ποια μεταβάλλονται;
4. Με ποιόν τρόπο οι τιμές του λ επηρεάζουν την μεταβολή των πλευρών του $A'B'\Gamma'$. Με $\lambda < 1$ να ορίσετε γωνία περιστροφής 0° για το τρίγωνο $A'B'\Gamma'$. Ποια σχέση έχουν τώρα οι πλευρές των δύο τριγώνων.
5. Όπως είδαμε το τρίγωνο $A'B'\Gamma'$ προκύπτει από το τρίγωνο $AB\Gamma$ με την βοήθεια τριών γεωμετρικών μετασχηματισμών. Μεταφορά κατά διάνυσμα δ , περιστροφή κατά γωνία ω και διαστολή κατά συντελεστή λ . Ποιοι από τους

μετασχηματισμούς αυτούς διατηρούν όλα τα μεγέθη ενός τριγώνου και ποιοι διατηρούν μόνο την μορφή του, δηλαδή τα γωνιακά του στοιχεία. Μπορείτε με βάση τα προηγούμενα να ορίσετε πότε δύο τρίγωνα είναι ίσα και πότε όμοια;

Οδηγίες για την υλοποίηση της δραστηριότητας

Προετοιμασία

Η διάρκεια της δραστηριότητας είναι μία διδακτική ώρα και μπορεί να υλοποιηθεί ως εφαρμογή στην παράγραφο που αναφέρεται στην ομοιότητα τριγώνων.

Οι μαθητές θα πρέπει να γνωρίζουν τα κριτήρια ισότητας και ομοιότητας των τριγώνων.

Η υλοποίηση

Αρχικά ο διδάσκων θα πρέπει να αναφέρει στους μαθητές του ότι η Ευκλείδεια γεωμετρία στηρίζεται σε μία σειρά από μετασχηματισμούς εκ των οποίων άλλοι διατηρούν τα μεγέθη των σχημάτων και άλλοι τα μεταβάλλουν.

Η στροφή γι παράδειγμα και η μεταφορά κατά διάνυσμα δεν μεταβάλλουν τα στοιχεία των σχημάτων παρά μόνο την θέση τους. Η ομοιοθεσία μεταβάλλει μόνο τα γραμμικά στοιχεία αλλά όχι τα γωνιακά. Η ομοιοθεσία καλό θα ήταν να παρουσιαστεί ως μεγέθυνση ή σμίκρυνση ενός σχήματος.

Στην πρώτη ερώτηση οι μαθητές θα αναγνωρίσουν ότι τα δύο τρίγωνα είναι ίσα και στην δεύτερη ερώτηση θα επιχειρήσουν να τα ταυτίσουν μέσω στροφής και μεταφοράς.

Στην τρίτη ερώτηση οι μαθητές θα εφαρμόσουν έναν επιπλέον μετασχηματισμό για το τρίγωνο $A'B'T'$ την ομοιοθεσία ως προς μία κορυφή του και στην τέταρτη ερώτηση θα πειραματιστούν με τις διάφορες τιμές του λ ακόμη και τις αρνητικές.

Στην τελευταία ερώτηση οι μαθητές θα συνοψίσουν τα ευρήματά τους για τους μετασχηματισμούς που έχουν εφαρμόσει στο τρίγωνο $A'B'T'$.

2.2.2 Η ΣΚΑΛΑ

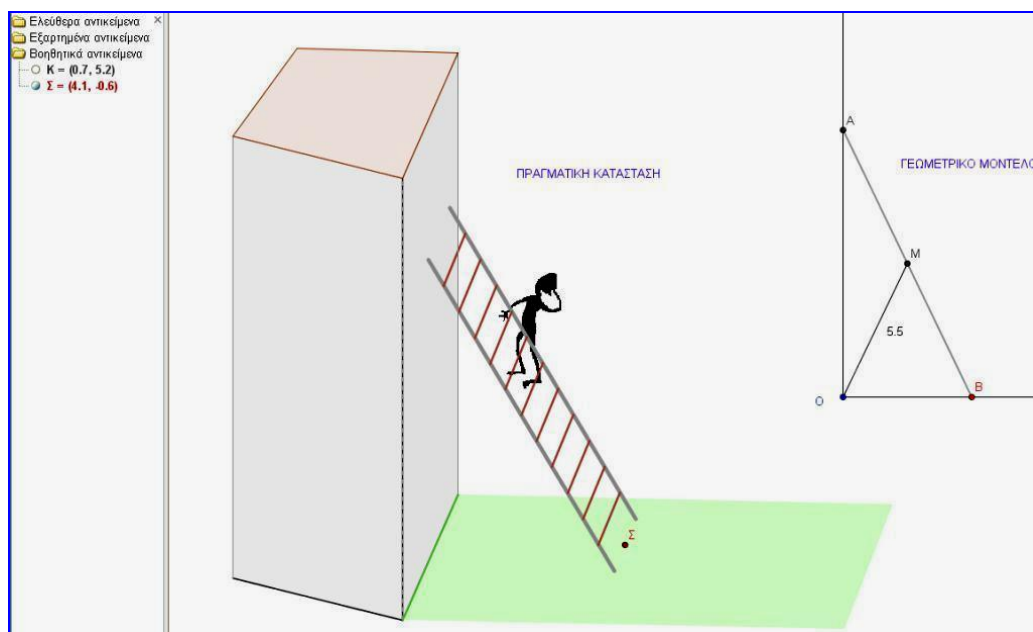
Η βασική ιδέα της δραστηριότητας είναι η προσομοίωση της κίνησης μιας σκάλας καθώς ολισθαίνει προς το έδαφος. Το ζητούμενο είναι η τροχιά που θα διαγράψει ένας άνθρωπος που βρίσκεται στο μεσαίο σκαλί.

Η σχεδίαση της προσομοίωσης στηρίζεται στην προβολή δύο θεμάτων. Το ένα χαρακτηρίζεται ως πραγματική κατάσταση και περιλαμβάνει μία σκάλα με 11 σκαλοπάτια. Στο 6^ο σκαλοπάτι βρίσκεται ένας άνθρωπος ενώ η σκάλα ολισθαίνει πάνω ή κάτω αν σύρουμε το σημείο Σ.

Το δεύτερο θέμα αφορά στο γεωμετρικό μοντέλο της πραγματικής κατάστασης, δηλαδή σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο στο οποίο μεταβάλλονται οι δύο κάθετες πλευρές, αν σύρουμε την κορυφή Γ, ενώ το μήκος της υποτείνουσας παραμένει σταθερό. Τέλος προβάλλεται το μήκος της διαμέσου του τριγώνου που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα.

Φύλλο εργασίας

Στην οθόνη προβάλλεται η προσομοίωση μιας πραγματικής κατάστασης (όχι και τόσο ευχάριστη για τον άνθρωπο που βρίσκεται πάνω στην σκάλα) Δίπλα από την κατάσταση βρίσκεται ένα γεωμετρικό μοντέλο της κατάστασης, δηλαδή ένα ορθογώνιο τρίγωνο με σταθερή υποτείνουσα.



ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ ΓΙΑ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ

Να απαντήσετε στα παρακάτω ερωτήματα

1. Να σύρετε το σημείο Σ. Ποια πορεία ακολουθεί ο άνθρωπος καθώς η σκάλα κατέρχεται ή ανέρχεται;

2. Να εμφανίσετε το σημείο K πάνω στο σκαλί που βρίσκεται ο άνθρωπος και να εμφανίσετε το ίχνος του. Ποια καμπύλη φαίνεται να διαγράφει το σημείο αυτό όταν σύρεται η σκάλα;
3. Ας έρθουμε τώρα στο γεωμετρικό μοντέλο της σκάλας. Να σύρετε την κορυφή Γ . Ποια μεγέθη του ορθογωνίου τριγώνου μεταβάλλονται και ποια παραμένουν σταθερά; Να διατυπώσετε μία πρόταση που φαίνεται να ισχύει για την διάμεσο ενός ορθογωνίου τριγώνου που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα.
4. Μπορείτε με βάση το μοντέλο να δικαιολογήσετε την γραμμή που διαγράφει ο άνθρωπος καθώς ολισθαίνει η σκάλα;

Οδηγίες για την υλοποίηση της δραστηριότητας

Προετοιμασία

Η διάρκεια της δραστηριότητας είναι μία διδακτική ώρα και μπορεί να υλοποιηθεί ως εφαρμογή ή και εισαγωγή στην παράγραφο που αναφέρεται στην διάμεσο ορθογωνίου τριγώνου.

Οι μαθητές θα πρέπει να γνωρίζουν βασικές λειτουργικότητες του λογισμικού όπως αυτή που αναφέρεται στο ίχνος ενός σημείου.

Η υλοποίηση

Το γεωμετρικό μοντέλο της πραγματικής κατάστασης ανάγεται σε ορθογώνιο τρίγωνο του οποίου μεταβάλλονται οι κάθετες πλευρές χωρίς να μεταβάλλεται το μήκος της υποτείνουσας. Η αντίστοιχη γεωμετρικής πρόταση που οδηγεί στην λύση του προβλήματος είναι αυτή που αναφέρεται στην σχέση της διαμέσου ενός ορθογωνίου τριγώνου, που αντιστοιχεί στην διάμεσο, και της υποτείνουσας.

Προφανώς όταν η υποτείνουσα παραμένει σταθερή το ίδιο συμβαίνει και με την διάμεσο άρα η απόσταση του μέσου της υποτείνουσας από την κορυφή της ορθής γωνίας παραμένει σταθερή και επομένως το μέσον της υποτείνουσας γράφει τμήμα κύκλου.

Εδώ το σημαντικό είναι η διαπραγμάτευση που θα προκληθεί μεταξύ των μαθητών. Αρχικά καλό θα είναι πριν ασχοληθούν με την δραστηριότητα να κάνουν εικασίες για το ποια θα μπορούσε να είναι η πορεία του ανθρώπου και στην συνέχεια να πειραματιστούν με το μοντέλο.

Στην δεύτερη ερώτηση αναμένεται να διατυπώσουν την πρόταση ότι τελικά η πορεία του ανθρώπου είναι ένα τεταρτοκύκλιο.

Στην τρίτη ερώτηση οι μαθητές θα αναγνωρίσουν ότι εκτός από την υποτείνουσα σταθερή παραμένει και η διάμεσος του ορθογωνίου τριγώνου κα μάλιστα είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας.

Στην τελευταία ερώτηση οι μαθητές θα πρέπει να ανακαλέσουν τον ορισμό του κύκλου (σταθερή απόσταση από σταθερό σημείο) για να δικαιολογήσουν την κίνηση του μέσου της υποτείνουσας πάνω σε κύκλο.

2.2.3 ΤΟ ΤΡΑΠΕΖΙΟ

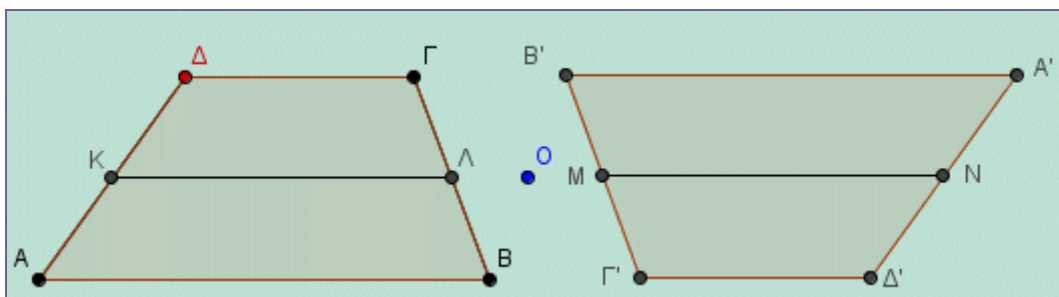
Η βασική ιδέα της δραστηριότητας ανάγεται στην χρήση της κεντρικής συμμετρίας για την απόδειξη της σχέσης που συνδέει την διάμεσο ενός τραpezίου με τις βάσεις του.

Στην περίπτωση που η κατασκευή μας επιτρέπει να μηδενίσουμε την μια από τις δύο βάσεις του τραpezίου τότε η προηγούμενη σχέση αναφέρεται στο τμήμα που συνδέει τα μέσα δύο πλευρών ενός τριγώνου.

Φύλλο εργασίας

Στην οθόνη προβάλλονται:

Ένα τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ του οποίου μεταβάλλονται οι διαστάσεις σύροντας μία κορυφή του. Ένα ελεύθερο σημείο O και ένα δεύτερο τραπέζιο $A'B'\Gamma'\Delta'$.



ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ ΓΙΑ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ

1. Να σύρετε τις κορυφές του τραpezίου $AB\Gamma\Delta$ και στην συνέχεια το σημείο O . Ποια σχέση συνδέει τα δύο τραpezία;
2. Να προβάλλετε τις μετρήσεις των πλευρών των δύο τραpezίων. Ποια σχέση συνδέει το τμήμα $ΚΛ$ με τις βάσεις του τραpezίου στο οποίο ανήκει; Να απαντήσετε με βάση τις τιμές των τμημάτων.
3. Να σύρετε το σημείο O ώστε να 'ενωθούν' τα δύο τραpezία, δηλαδή να συμπίσουν τα σημεία B και Γ' . Τι σχήμα είναι το $\Delta A' \Delta' A$;
4. Να διατυπώσετε τα συμπεράσματά σας για την διάμεσο ενός τραpezίου. Να δικαιολογήσετε, με βάση τα όσα ισχύουν από το πρώτο και τρίτο ερώτημα, τα συμπεράσματά σας.
5. Να σύρετε την κορυφή Δ ώστε να συμπίσει με την Γ . Τώρα το τραπέζιο έγινε τρίγωνο. Ποια σχέση συνδέει το τμήμα $ΚΛ$ με την βάση AB του τριγώνου; Πως μπορείτε να δικαιολογήσετε την σχέση αυτή με βάση τα προηγούμενα;

Οδηγίες για την υλοποίηση της δραστηριότητας

Προετοιμασία

Η διάρκεια της δραστηριότητας είναι μία διδακτική ώρα και μπορεί να υλοποιηθεί ως εφαρμογή ή και εισαγωγή στην παράγραφο που αναφέρεται στην διάμεσο ενός τραpezίου.

Οι μαθητές θα πρέπει να γνωρίζουν την κεντρική συμμετρία καθώς και τις ιδιότητες των παραλληλογράμμων.

Η υλοποίηση

Η πρώτη ερώτηση έχει διερευνητικό χαρακτήρα και στόχο να αναγνωρίσουν οι μαθητές την κεντρική συμμετρία που συνδέει τα δύο σχήματα με κέντρο το σημείο O . Ακόμη οι μαθητές μπορούν να σύρουν το σημείο Δ ώστε να παρατηρήσουν τους αντίστοιχους μετασχηματισμούς του τραπεζίου $A'B'T'\Delta'$.

Στην δεύτερη ερώτηση οι μαθητές θα στηριχτούν στις μετρήσεις του λογισμικού για να διαπιστώσουν ότι η διάμεσος είναι ίση με το ημιάθροισμα των βάσεων του τραπεζίου $AB\Gamma\Delta$.

Η τρίτη ερώτηση είναι η αφετηρία της απόδειξης της παραπάνω πρότασης αφού οι μαθητές θα αναγνωρίσουν ότι το συνολικό τετράπλευρο είναι παραλληλόγραμμο.

Στην τέταρτη ερώτηση οι μαθητές με την βοήθεια του διδάσκοντα θα δικαιολογήσουν την πρόταση που αφορά στην διάμεσο τραπεζίου αφού το διπλάσιό της είναι ίσο με την πλευρά του συνολικού παραλληλογράμμου.

Ο στόχος της πέμπτης ερώτησης είναι να αναγνωρίσουν οι μαθητές την πρόταση που αφορά στο τμήμα που ενώνει τα μέσα δύο πλευρών ενός τριγώνου.

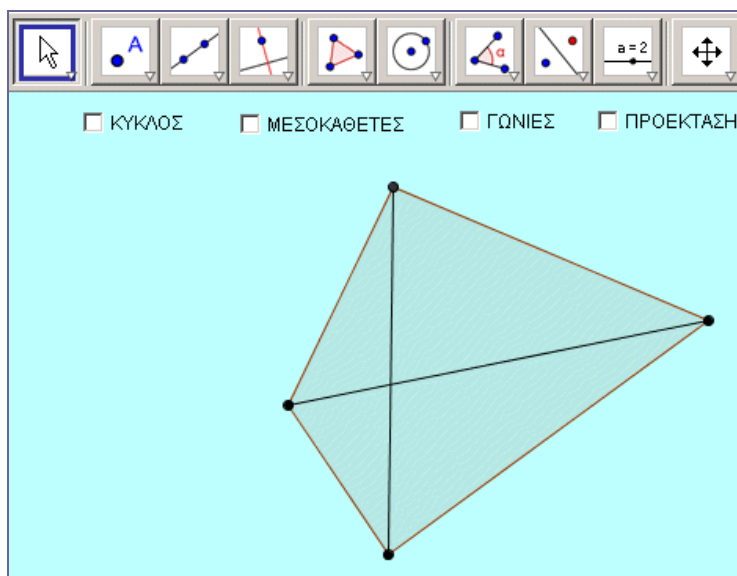
2.2.4 ΤΟ ΕΓΓΡΑΨΙΜΟ ΤΕΤΡΑΠΛΕΥΡΟ

Η βασική ιδέα της δραστηριότητας του εγγράψιμου τετραπλεύρου στηρίζεται στις δυνατότητες του λογισμικού να κατασκευάζει κύκλο από τρία σημεία, μεσοκάθετες τμημάτων και να παρουσιάζει μετρήσεις γωνιών. Οι δυνατότητες αυτές επιτρέπουν στον μαθητή να ελέγξει αν ένα δοσμένο τετράπλευρο είναι εγγράψιμο. Ο έλεγχος επομένως για το αν ένα τετράπλευρο είναι εγγράψιμο μπορεί να πραγματοποιηθεί με πολλούς τρόπους μερικοί από τους οποίους δεν μπορούν να υλοποιηθούν με τα συμβατικά μέσα(μολύβι και χαρτί).

Φύλλο εργασίας

Στην οθόνη προβάλλεται ένα τετράπλευρο και οι διαγώνιοί του. Τέσσερα κουμπιά επιτρέπουν να εμφανίζονται ή να αποκρύπτονται γεωμετρικά αντικείμενα που περιγράφει η ονομασία των κουμπιών.

Ο στόχος μας είναι να μελετήσουμε τις ιδιότητες των εγγεγραμμένων τετραπλεύρων σε κύκλο.



ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ ΓΙΑ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ

Να απαντήσετε στα παρακάτω ερωτήματα:

1. Να ελέγξετε αν το τετράπλευρο είναι εγγράψιμο εμφανίζοντας τον κύκλο που περνά από τα σημεία ΑΔΓ.
2. Να εμφανίσετε τις μεσοκάθετους των πλευρών του τετραπλεύρου, δηλαδή τις ευθείες e_1 , e_2 , e_3 , e_4 . Τι παρατηρείτε; Να μετακινήσετε τις κορυφές του τετραπλεύρου. Τι παρατηρείτε; Πως συνδέεται η πρώτη με την δεύτερη ερώτηση;
3. Να εμφανίσετε τις γωνίες του τετραπλεύρου, δηλαδή τις γωνίες Α, Β, Γ, Δ. Τι σχέση έχουν οι απέναντι γωνίες;. Να μετακινήσετε τις κορυφές του τετραπλεύρου. Υφίσταται η ίδια σχέση;
4. Να εμφανίσετε και τα υπόλοιπα βοηθητικά αντικείμενα, δηλαδή την προέκταση και τις γωνίες α , β , γ . Να μετακινήσετε τις κορυφές του

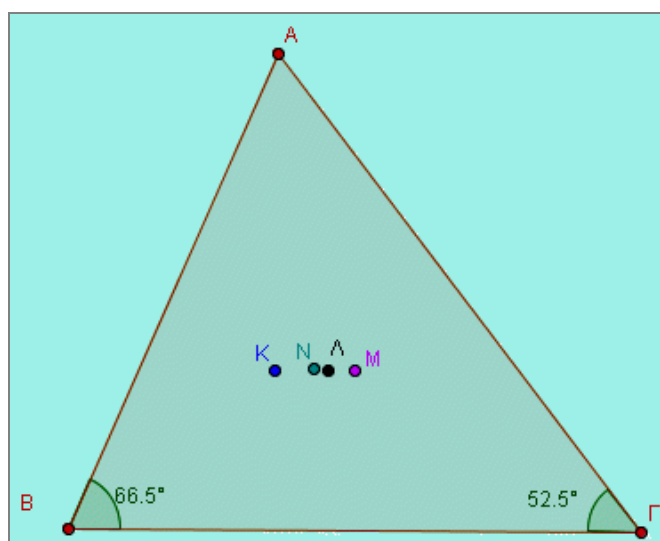
2.2.5 ΤΑ ΚΕΝΤΡΑ ΤΟΥ ΤΡΙΓΩΝΟΥ

Η βασική ιδέα της δραστηριότητας αναφέρεται στην διερεύνηση της θέσης των τεσσάρων βασικών κέντρων ενός τριγώνου. Συγκεκριμένα όταν εμφανίζονται και τα τέσσερα κέντρα, χωρίς καμία άλλη ένδειξη για το ποιο είναι το κάθε ένα από αυτά, τότε απαιτείται διερεύνηση για την διάκριση μεταξύ τους, για τον εντοπισμό του ορθόκεντρου, του βαρύκεντρου, του έκκεντρου και του περίκεντρου.

Στο τρίγωνο ΑΒΓ έχουν κατασκευαστεί τα τέσσερα κέντρα του τριγώνου (περίκεντρο, έκκεντρο, βαρύκεντρο και ορθόκεντρο). Στην συνέχεια έγινε απόκρυψη των τμημάτων (ύψη, διχοτόμοι, μεσοκάθετοι, διάμεσοι). Ο στόχος είναι να εντοπίσουν οι μαθητές τα κέντρα μεταβάλλοντας το σχήμα του τριγώνου, σύροντας τις κορυφές του, να εντοπίσουμε ποιο σημείο αντιστοιχεί σε κάθε κέντρο.

Φύλλο εργασίας

Στο τρίγωνο ΑΒΓ έχουν κατασκευαστεί τα τέσσερα κέντρα του τριγώνου (περίκεντρο, έκκεντρο, βαρύκεντρο και ορθόκεντρο). Στην συνέχεια ο κατασκευαστής απέκρυψε όλες τις ευθείες που τα έχουν δημιουργήσει και τους έδωσε από ένα όνομα, αλλά ξέχασε να σημειώσει ποιο είναι το καθένα. Ο στόχος μας είναι μεταβάλλοντας το σχήμα του τριγώνου, σύροντας τις κορυφές του, να εντοπίσουμε ποιο σημείο αντιστοιχεί σε κάθε κέντρο.



ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ ΓΙΑ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ

Να απαντήσετε στα παρακάτω ερωτήματα:

1. Με ποιόν τρόπο μπορούμε να εντοπίσουμε το ορθόκεντρο και το περίκεντρο συγχρόνως. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.
2. Με ποιόν τρόπο μπορούμε να εντοπίσουμε το βαρύκεντρο και το έκκεντρο συγχρόνως. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

3. Σύροντας την κορυφή A , και με βάση την θέση των τεσσάρων σημείων, να κατασκευάσετε ένα τρίγωνο για το οποίο θα μπορείτε να υποστηρίξετε ότι είναι ισόπλευρο.
4. Ποια είναι η θέση των τεσσάρων κέντρων όταν το τρίγωνο γίνει ισοσκελές. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Οδηγίες για την υλοποίηση της δραστηριότητας

Προετοιμασία

Η διάρκεια της δραστηριότητας είναι μία διδακτική ώρα και μπορεί να υλοποιηθεί ως εφαρμογή ή σύνοψη των κέντρων του τριγώνου.

Οι μαθητές θα πρέπει να έχουν υπ όψιν τους τόσο τους ορισμούς όσο και τις ιδιότητες των βασικών κέντρων του τριγώνου, δηλαδή του ορθόκεντρου, του βαρύκεντρου, του περίκεντρου και του έγκεντρου.

Η υλοποίηση

Ο βασικός στόχος της δραστηριότητας είναι αφενός να προκαλέσει το ενδιαφέρον των μαθητών για πειραματισμό και διερεύνηση και αφετέρου να προκαλέσει κατάλληλες νοητικές δράσεις με τις οποίες θα πρέπει να ανακαλέσουν αλλά και να συνθέσουν τους ορισμούς των κέντρων των τριγώνων.

Αρχικά οι μαθητές καλό θα είναι να μετακινήσουν την κορυφή A και να παρατηρήσουν την διάταξη των τεσσάρων σημείων. Κατά τον πειραματισμό με τα σημεία αναμένεται να παρατηρήσουν ότι μόνο δύο σημεία περνούν έξω από το τρίγωνο όταν το $ABΓ$ γίνεται αμβλυγώνιο.

Στην πρώτη ερώτηση ο διδάσκων ζητά από τους μαθητές να παρατηρήσουν το σημείο το οποίο για κάποια θέση της κορυφής A συμπίπτει με το B όταν ιδιαίτερα η γωνία B είναι ορθή. Με τον τρόπο αυτό θα εντοπίσουν το ορθόκεντρο.

Καθώς το ορθόκεντρο θα βρίσκεται στο B το περίκεντρο θα βρίσκεται στο μέσον της απέναντι πλευράς και εδώ είναι ευκαιρία να δημιουργηθεί συζήτηση για την περίπτωση του ορθογωνίου τριγώνου και των κέντρων του.

Στην επόμενη ερώτηση οι μαθητές θα επικεντρωθούν στα δύο άλλα σημεία για τα οποία μπορούν να παρατηρήσουν ότι ένα από αυτά απομακρύνεται δυσανάλογα από μία πλευρά από ότι το άλλο. Αυτό το σημείο θα πρέπει να είναι το βαρύκεντρο αφού το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου θα πρέπει να διατηρεί σταθερή απόσταση από τις τρεις πλευρές.

Ο διδάσκων θα ζητήσει να δημιουργήσουν ισόπλευρο τρίγωνο $ABΓ$ προφανώς όταν τα κέντρα συμπίπτουν και ισοσκελές όταν τα κέντρα βρίσκονται σε ευθεία.

2.2.6 ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΜΠΙΛΙΑΡΔΟΥ

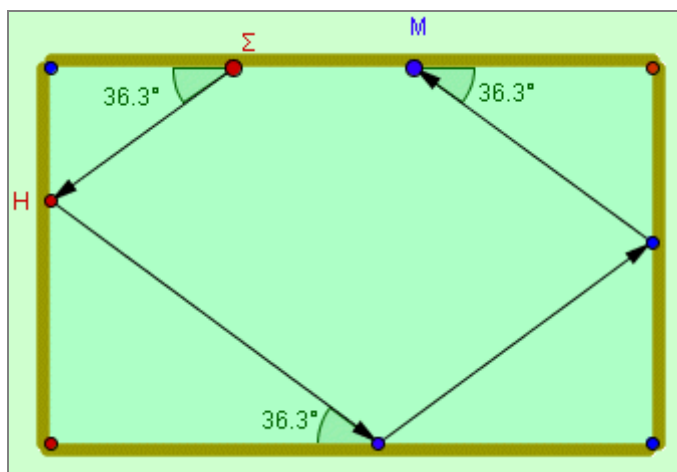
Η βασική ιδέα της δραστηριότητας στηρίζεται στην προσομοίωση της πορείας μιας μπάλας μπιλιάρδου όταν αυτή ανακλάται στα τοιχώματα του τραπέζιου.

Το γεωμετρικό περιεχόμενο της δραστηριότητας ανάγεται στην παραλληλία των ευθειών ενώ η δραστηριότητα αποτελεί επέκταση ενός προβλήματος του σχολικού βιβλίου.

Φύλλο εργασίας

Βρισκόμαστε μπροστά σε έναν προσομοιωτή μπιλιάρδου. Η προσομοίωση περιέχει μία μόνο μπάλα Σ τις οποίες μπορούμε να μελετούμε την διαδρομή τις καθώς ανακλάται πάνω τις πλευρές του μπιλιάρδου. Η θέση Σ τις μπάλας μπορεί να αλλάξει κατά μήκος μιας πλευράς. Ακόμη μπορεί να αλλάξει η θέση του πρώτου σημείου H , στο οποίο η μπάλα θα συναντήσει μία διαδοχική πλευρά του μπιλιάρδου. Η αρχική θέση Σ και η αμέσως επόμενη H παριστάνονται με σημεία κόκκινα πάνω τις δύο πλευρές του μπιλιάρδου.

Ακόμη υπάρχουν δύο κορυφές του (τα δύο γωνιακά, κόκκινα σημεία) από τις οποίες μπορούμε να μεταβάλουμε τις διαστάσεις του.



ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ ΓΙΑ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ

1. Να αλλάξετε την αρχική θέση Σ της μπάλας. Ποιος κανόνας φαίνεται να ισχύει για τις γωνίες που δημιουργεί η πορεία της μπάλας μέχρι το τελικό σημείο M ;
2. Να αποδείξετε τον κανόνα αυτό με αυστηρά μαθηματικό τρόπο.
3. Να αλλάξετε την θέση του σημείου H . Ισχύει ο προηγούμενος κανόνας;
4. Η μπάλα Σ έχει διαγράψει 4 πορείες μετά από 3 ανακλάσεις στις πλευρές του μπιλιάρδου. Να διερευνήσετε τις θέσεις του Σ και του H για τις οποίες η μπάλα θα καταλήξει και πάλι στην αρχική της θέση. Τι είδους τετράπλευρο σχηματίζει τώρα η πορεία της μπάλας; Να αποδείξετε τα συμπεράσματά σας

5. Να μεταβάλλεται τις διαστάσεις του μπιλιάρδου. Τι παρατηρείτε; Τι μορφή παίρνει το τετράπλευρο της πορείας της μπάλας όταν το μπιλιάρδο γίνει τετράγωνο;

Οδηγίες για την υλοποίηση της δραστηριότητας

Προετοιμασία

Η διάρκεια της δραστηριότητας δεν μπορεί να καθοριστεί αφού κινείται μεταξύ ενός παιγνιδιού και μιας μαθηματικής δραστηριότητας.

Οι μαθητές θα πρέπει να έχουν υπ όψιν τους τον βασικό κανόνα για την ισότητα της γωνίας πρόσπτωσης και της γωνίας ανάκλασης καθώς και βασικά στοιχεία για τις γωνίες τριγώνου ή για γωνίες παραλληλογράμμου.

Η υλοποίηση

Στο πρώτο ερώτημα οι μαθητές αναμένεται να διαπιστώσουν σύντομα ότι οι τρεις γωνίες των οποίων προβάλλεται η μέτρηση παραμένουν συνεχώς ίσες μεταξύ τους αν και μεταβάλλεται το μέτρο τους.

Στην δεύτερη ερώτηση οι μαθητές καλό θα είναι να χρησιμοποιήσουν το τετράδιο σημειώσεων στο οποίο θα αποδείξουν την ισότητα των συγκεκριμένων γωνιών χρησιμοποιώντας τον νόμο της ανάκλασης (γωνία πρόσπτωσης = γωνία ανάκλασης) καθώς θα εργάζονται στα ορθογώνια τρίγωνα του σχήματος.

Στην τρίτη ερώτηση θα πειραματιστούν με την θέση του σημείου Η για να διαπιστώσουν ότι ο βασικός κανόνας για τις γωνίες παραμένει σε ισχύ.

Στην τέταρτη ερώτηση οι μαθητές θα πρέπει να ανακαλέσουν τις ιδιότητες του παραλληλογράμμου για να εντοπίσουν το είδος του τετραπλεύρου που δημιουργούν οι ανακλάσεις. Θα πρέπει να δικαιολογήσουν με μαθηματικό τρόπο γιατί οι απέναντι γωνίες είναι ίσες.

Στην τελευταία ερώτησης οι μαθητές θα σύρουν ένα από τα κόκκινα σημεία στις γωνίες του μπιλιάρδου ώστε αυτό να τείνει προς τετράγωνο. Αναμένεται να παρατηρήσουν ότι στην περίπτωση αυτή το παραλληλόγραμμο γίνεται ορθογώνιο. Η δικαιολόγηση θα γίνει στο τετράδιο των μαθητών.

2.2.7 ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΣ ΤΟΠΟΣ

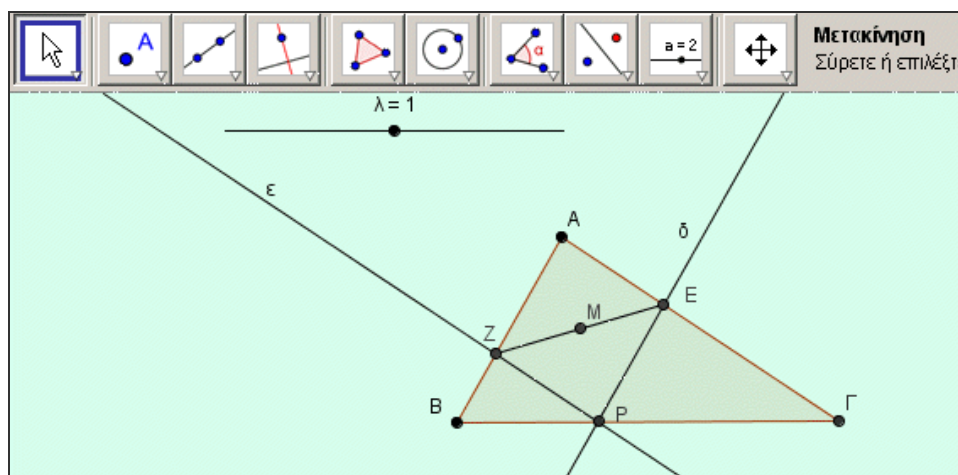
Η βασική ιδέα της δραστηριότητας στηρίζεται στην αντιστροφή του προβλήματος της εύρεσης ενός γεωμετρικού τόπου όταν γίνεται χρήση εκπαιδευτικού λογισμικού. Συγκεκριμένα στα συνήθη προβλήματα γεωμετρικών τόπων ζητείται από τους μαθητές να χρησιμοποιήσουν ένα σημείο A που κινείται πάνω σε ένα γεωμετρικό αντικείμενο και πάνω σε αυτό το σημείο να 'χτίσουν' μία κατασκευή. Η κατασκευή αυτή οδηγεί συνήθως στην δημιουργία ενός νέου σημείου B , οπότε ζητείται η καμπύλη πάνω στην οποία θα κινηθεί το B όταν το αρχικό σημείο A κινηθεί πάνω στον φορέα του.

Στην συγκεκριμένη δραστηριότητα θα δοθεί μία έτοιμη κατασκευή στους μαθητές, οι οποίοι θα μελετήσουν την δομή της, θα εντοπίσουν μέσω του λογισμικού τον γεωμετρικό τόπο ενός σημείου μέσα στην κατασκευή και τέλος θα διατυπώσουν την όλη κατάσταση υπό μορφή προβλήματος. Εδώ δηλαδή προηγείται η παρατήρηση του γεωμετρικού τόπου και έπεται η διατύπωση του προβλήματος και η αυστηρή απόδειξή του. Σε δεύτερη φάση οι μαθητές θα διερευνήσουν τον τρόπο που μετασχηματίζεται ο γεωμετρικός τόπος όταν μετασχηματίζεται η δομή της κατασκευής.

Φύλλο εργασίας

Σε ένα τρίγωνο $AB\Gamma$ έχουμε κατασκευάσει ένα ελεύθερο σημείο P πάνω στην πλευρά $B\Gamma$ και με την βοήθεια των ευθειών (δ) και (ϵ) , που είναι παράλληλες προς τις πλευρές AB και $A\Gamma$, έχουμε δημιουργήσει το σημείο M . Το σημείο M χωρίζει το τμήμα ZE σε δύο τμήματα MZ , ME που έχουν λόγο λ . Η τιμή του λ μεταβάλλεται από τον μεταβολέα λ .

Στην οθόνη εμφανίζεται η παρακάτω εικόνα.



ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ ΓΙΑ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ

Να απαντήσετε στα παρακάτω ερωτήματα.

1. Για την τιμή $\lambda=1$ να σύρετε το σημείο P . Τι γραμμή διαγράφει το σημείο M καθώς κινείται;

2. Να εμφανίσετε το ίχνος του M και να σύρετε το P . Ποιος είναι ο γεωμετρικός τόπος του σημείου M ; Να σύρετε το σημείο P στις οριακές θέσεις B και Γ . Να διατυπώσετε τα προηγούμενα υπό μορφή μιας γεωμετρικής πρότασης.
3. Να αποδείξετε με αυστηρά μαθηματικό τρόπο την πρόταση που διατυπώσατε.

Μέχρι τώρα μελετήσαμε ένα πρόβλημα γεωμετρικού τόπου με βάση μία ορισμένη θέση του σημείου M . Τώρα θα μελετήσουμε την συμπεριφορά του σημείου M όταν αυτό βρίσκεται σε μία θέση πάνω στο τμήμα ZE που δημιουργεί σταθερό λόγο μεταξύ των τμημάτων μεταξύ των τμημάτων ZM και ME .

4. Να μεταβάλλετε την τιμή του λ ώστε να είναι διαφορετική του 1 και να επαναλάβετε την προηγούμενη διερεύνηση. Να βρείτε τον γεωμετρικό του τόπο του σημείου M σύροντας το σημείο P . Τι παρατηρείτε; Να διατυπώσετε μία γεωμετρική πρόταση σε αυστηρά μαθηματική ορολογία.

Οδηγίες για την υλοποίηση της δραστηριότητας

Προετοιμασία

Η διάρκεια της δραστηριότητας είναι μία διδακτική ώρα και μπορεί να υλοποιηθεί ως επέκταση άσκησης του σχολικού εγχειριδίου. Η άσκηση βρίσκεται στην παράγραφο που διαπραγματεύεται γεωμετρικούς τόπους.

Σύνθετα Θέματα

1. Από ένα μεταβλητό σημείο P της πλευράς $B\Gamma$ ενός τριγώνου $AB\Gamma$ φέρουμε ευθείες παράλληλες προς τις πλευρές AB και $A\Gamma$ που τέμνουν τις $A\Gamma$ και AB στα σημεία E και Z αντίστοιχα. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο του μέσου M του ZE .

Οι μαθητές θα πρέπει να έχουν υπόψη τους τις ιδιότητες των παραλληλογράμμων και τις ιδιότητες του τμήματος που ενώνει τα μέσα πλευρών τριγώνου.

Η υλοποίηση

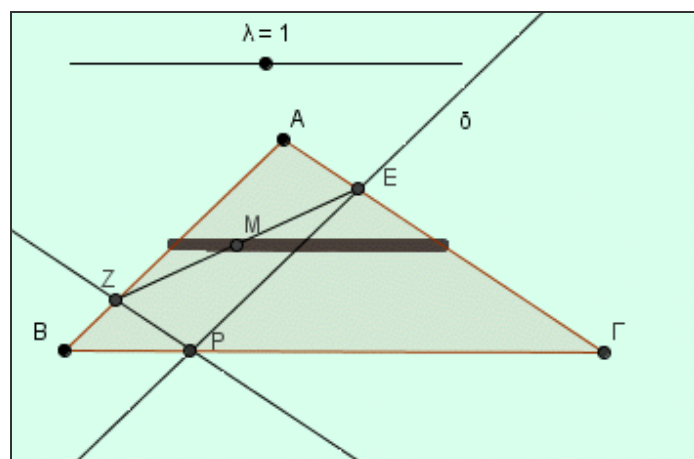
Ο διδάσκων θα μπορούσε να σχεδιάσει την δική του διδακτική προσέγγιση σε θέματα όπως αυτό που πρόκειται να υλοποιηθεί.

Για παράδειγμα θα μπορούσε να λύσει στην τάξη την άσκηση του βιβλίου και στην συνέχεια να δώσει στους μαθητές να διερευνήσουν με το λογισμικό την επέκτασή της.

Η πορεία που προτείνεται στην συνέχεια προβλέπει την εμπλοκή των μαθητών εξ αρχής με το πρόβλημα του γεωμετρικού τόπου.

Στην πρώτη ερώτηση οι μαθητές αναμένεται να παρατηρήσουν ότι το σημείο M φαίνεται να κινείται σε μία ευθεία.

Στην δεύτερη ερώτηση η εικασία γίνεται βεβαιότητα με το ίχνος του σημείου M .

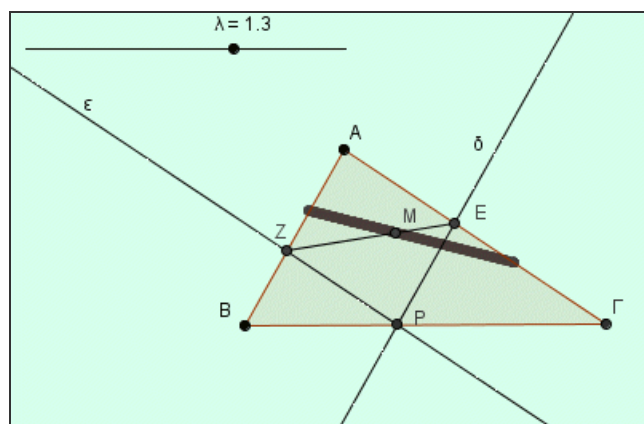


Εδώ ο διδάσκων καλό είναι να ζητήσει από τους μαθητές να οδηγήσουν το σημείο M στις οριακές του θέσεις που είναι τα μέσα των πλευρών AB και AC .

Η παραπάνω ενέργεια θα μπορούσε να οδηγήσει τους μαθητές στην εικασία ότι ο γεωμετρικός τόπος είναι το τμήμα που ενώνει τα μέσα των AB και AC .

Στην τρίτη ερώτηση ο διδάσκων θα ζητήσει από τους μαθητές να αξιοποιήσουν το παραλληλόγραμμο που υπάρχει στο σχήμα καθώς και τις ιδιότητές του.

Η τέταρτη ερώτηση έχει στόχο να κινητοποιήσει τους μαθητές στην κατεύθυνση της διερεύνησης του γεωμετρικού τόπου όταν πλέον το M δεν είναι μέσον της ZE . Εδώ για τις διάφορες τιμές του λ θα παρατηρήσουν ότι και πάλι ο γεωμετρικός τόπος είναι μία ευθεία



Οι μαθητές ίσως δεν διαθέτουν ακόμη τις απαραίτητες γνώσεις (θ. Θαλή και ομοιότητα) οπότε μία αυστηρή απόδειξη ίσως δεν ανήκει μέσα στους διδακτικούς στόχους της διερεύνησης.

Τεχνική Υποστήριξη

Δικτυακός Τόπος : www.intracom-schools.gr και

Ηλεκτρονικό ταχυδρομείο : support_it@intracom-it.gr

Τηλέφωνο : 210-6679105

Fax : 210-6679106

Υπεύθυνη : κα Μπερτσά Όλγα

ΥΠΕΠΘ / ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ «ΚΟΙΝΩΝΙΑ ΤΗΣ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΑΣ»



Γ' ΚΟΙΝΟΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ ΣΤΗΡΙΞΗΣ
ΕΡΓΟ ΣΥΓΧΡΗΜΑΤΟΔΟΤΟΥΜΕΝΟ ΚΑΤΑ 80% ΑΠΟ ΤΟ ΕΚΤ
ΚΑΙ ΚΑΤΑ 20% ΑΠΟ ΕΘΝΙΚΟΥΣ ΠΟΡΟΥΣ
«Ολοκληρωμένη Αξιοποίηση των Τ.Π.Ε. στην Εκπαιδευτική Διαδικασία»