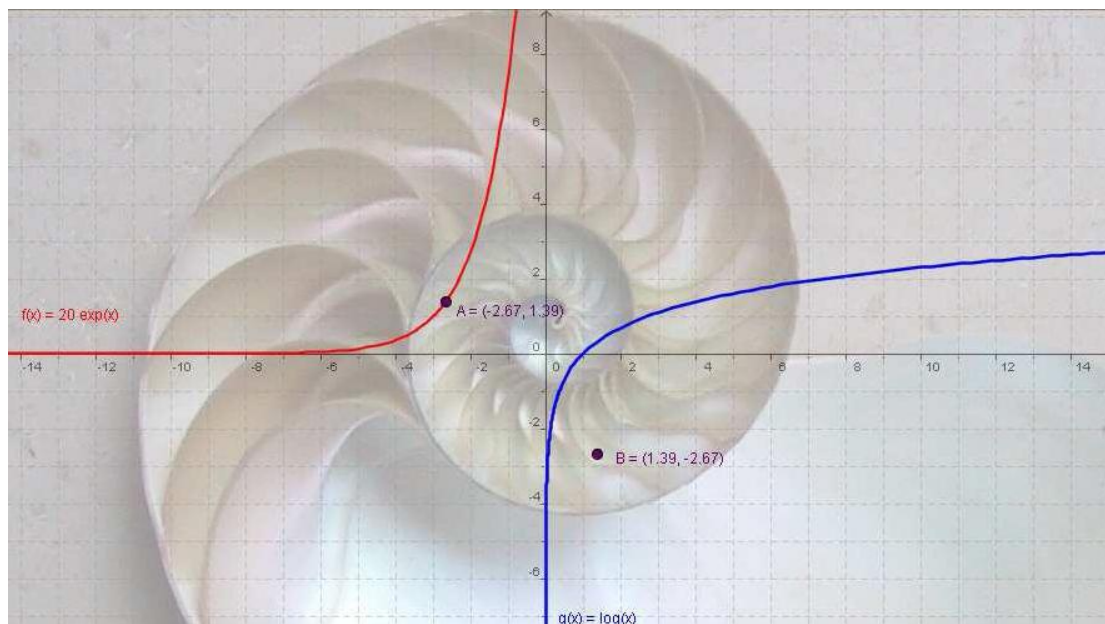


ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΜΕ ΤΟ GeoGebra*

Β' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΒΙΒΛΙΟ ΚΑΘΗΓΗΤΗ



Στέφανος Κεϊσογλου, Καθηγητής Μαθηματικών M.ed

*www.geogebra.org

ΥΠΕΠΘ / ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ «ΚΟΙΝΩΝΙΑ ΤΗΣ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΑΣ»



Γ' ΚΟΙΝΟΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ ΣΤΗΡΙΞΗΣ
ΕΡΓΟ ΣΥΓΧΡΗΜΑΤΟΔΟΤΟΥΜΕΝΟ ΚΑΤΑ 80% ΑΠΟ ΤΟ ΕΚΤ
ΚΑΙ ΚΑΤΑ 20% ΑΠΟ ΕΘΝΙΚΟΥΣ ΠΟΡΟΥΣ
«Ολοκληρωμένη Αξιοποίηση των Τ.Π.Ε. στην Εκπαιδευτική Διαδικασία»

Τεχνική Υποστήριξη

Δικτυακός Τόπος : www.intracom-schools.gr και

Ηλεκτρονικό ταχυδρομείο : support_it@intracom-it.gr

Τηλέφωνο : 210-6679105

Fax : 210-6679106

Υπεύθυνη : κα Μπερτσά Όλγα

Περιεχόμενα

1	ΑΛΓΕΒΡΑ	5
1.1	ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ	5
1.1.1	Σύντομη περιγραφή των σεναρίων	5
1.1.2	Στόχοι.....	5
1.1.3	ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΣ ΚΥΚΛΟΣ.....	6
1.1.4	ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ	9
1.1.5	ΘΕΩΡΗΜΑ ΗΜΙΤΟΝΩΝ.....	12
1.2	ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ	15
1.2.1	Σύντομη περιγραφή των σεναρίων	15
1.2.2	Στόχοι.....	15
1.2.3	ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ.....	16
1.2.4	ΡΙΖΕΣ ΠΟΛΥΩΝΥΜΟΥ	18
1.2.5	ΑΡΡΗΤΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ	20
1.3	ΠΡΟΟΔΟΙ	23
1.3.1	Σύντομη περιγραφή των σεναρίων	23
1.3.2	Στόχοι.....	23
1.3.3	ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΠΡΟΟΔΟΣ.....	24
1.3.4	ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ	27
1.3.5	ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΠΡΟΟΔΟΣ	30
1.4	ΕΚΘΕΤΙΚΗ-ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ	33
1.4.1	Σύντομη περιγραφή των σεναρίων	33
1.4.2	Στόχοι.....	33
1.4.3	ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΤΗΣ ΕΚΘΕΤΙΚΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ.....	35
1.4.4	ΜΕΛΕΤΗ ΤΗΣ ΕΚΘΕΤΙΚΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ.....	37
1.4.5	ΛΟΓΑΡΙΘΜΟΣ ΘΕΤΙΚΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ	39
1.4.6	ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΤΗΣ ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ.....	42
1.4.7	ΜΕΛΕΤΗ ΤΗΣ ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ.....	44
1.4.8	ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΛΟΓΑΡΙΘΜΩΝ	46
2	ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ	49
2.1	ΜΕΤΡΙΚΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ (ΠΥΘΑΓΟΡΕΙΟ ΘΕΩΡΗΜΑ)	49
2.1.1	Σύντομη περιγραφή των σεναρίων	49
2.1.2	Στόχοι.....	49
2.1.3	Διδακτική πρόταση	49
2.1.4	Η ΠΥΘΑΓΟΡΕΙΑ ΑΠΟΔΕΙΞΗ.....	51

2.1.5	Η ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΠΟΥ ΑΠΟΔΙΔΕΤΑΙ ΣΤΟΥΣ ΚΙΝΕΖΟΥΣ	53
2.1.6	ΜΙΑ ΕΠΕΚΤΑΣΗ ΤΟΥ ΠΥΘΑΓΟΡΕΙΟΥ ΘΕΩΡΗΜΑΤΟΣ	56
2.2	ΕΜΒΑΔΑ	59
2.2.1	Σύντομη περιγραφή του σεναρίου	59
2.2.2	Στόχοι.....	59
2.2.3	ΤΡΙΓΩΝΑ ΣΕ ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜΜΟ	60
2.2.4	ΕΜΒΑΔΟΝ ΤΡΙΓΩΝΟΥ	62
2.2.5	ΣΧΕΣΗ ΕΜΒΑΔΩΝ ΤΡΙΓΩΝΩΝ.....	64
2.2.6	ΕΜΒΑΔΑ ΟΜΟΙΩΝ ΠΟΛΥΓΩΝΩΝ	66
2.3	ΚΑΝΟΝΙΚΑ ΠΟΛΥΓΩΝΑ.....	69
2.3.1	Σύντομη περιγραφή των σεναρίων	69
2.3.2	Στόχοι.....	69
2.3.3	ΤΟΞΟ-ΧΟΡΔΗ	70
2.3.4	ΚΑΝΟΝΙΚΑ ΠΟΛΥΓΩΝΑ	72
2.3.5	ΔΙΑΚΟΣΜΗΤΙΚΑ ΜΟΤΙΒΑ	74
3	ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ	77
3.1	ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ	77
3.1.1	Σύντομη περιγραφή των σεναρίων	77
3.1.2	Στόχοι.....	77
3.1.3	ΠΑΡΑΛΛΗΛΑ-ΚΑΘΕΤΑ ΔΙΑΝΥΣΜΑ	78
3.1.4	ΓΩΝΙΑ ΕΥΘΕΙΩΝ ΚΑΙ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ.....	80
3.1.5	ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΣ ΤΟΠΟΣ	82
3.2	ΕΥΘΕΙΕΣ	85
3.2.1	Σύντομη περιγραφή του σεναρίου	85
3.2.2	Στόχοι.....	85
3.2.3	ΕΥΘΕΙΑ ΔΙΑΝΥΣΜΑ	86
3.2.4	ΕΜΒΑΔΟΝ ΤΡΙΓΩΝΟΥ	88
3.2.5	ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΕΣ ΕΥΘΕΙΕΣ 1	90
3.2.6	ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΕΣ ΕΥΘΕΙΕΣ 2	92
3.3	ΚΩΝΙΚΕΣ ΤΟΜΕΣ	95
3.3.1	Σύντομη περιγραφή του σεναρίου	95
3.3.2	Στόχοι.....	95
3.3.3	ΑΝΑΚΛΑΣΗ ΣΕ ΠΑΡΑΒΟΛΗ	96
3.3.4	ΑΝΑΚΛΑΣΗ ΣΕ ΕΛΛΕΙΨΗ	98
3.3.5	Η ΥΠΕΡΒΟΛΗ.....	101

1 ΑΛΓΕΒΡΑ

1.1 ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

1.1.1 Σύντομη περιγραφή των σεναρίων

Οι δραστηριότητες που αναφέρονται στην τριγωνομετρία στηρίζονται στις δυνατότητες του λογισμικού να δημιουργεί δυναμικές αναπαραστάσεις φαινομένων και συναρτήσεων που προκύπτουν από τα φαινόμενα.

Οι συναρτήσεις αυτές διδάσκονται στο σχολικό περιβάλλον με τα διαθέσιμα στατικά μέσα της εικόνας του βιβλίου και του πίνακα. Η δυναμική αναπαράσταση των συναρτήσεων αυτών, δηλαδή η δυνατότητα να μετασχηματίζεται η γραφική παράσταση καθώς αλλάζουν οι παράμετροι, δίνει την ευκαιρία για καλύτερη μελέτη και διερεύνηση άρα και κατανόηση.

Στην πρώτη δραστηριότητα οι μαθητές θα παρατηρήσουν μία κυκλική κίνηση σημείου η οποία παράγει γραφήματα τριγωνομετρικών συναρτήσεων. Εδώ το σημείο που κινείται σε έναν τριγωνομετρικό κύκλο αποτελεί παράδειγμα περιοδικού φαινομένου οπότε οι γραφικές παραστάσεις προκύπτουν ως μοντέλα περιγραφής του φαινομένου αυτού.

Στην δεύτερη δραστηριότητα οι μαθητές έχουν την δυνατότητα να μελετήσουν τους μετασχηματισμούς των γραφικών παραστάσεων παραμετρικών τριγωνομετρικών συναρτήσεων. Επιπλέον θα έχουν την ευκαιρία να κατανοήσουν την σημασία της γραφικής επίλυσης μιας τριγωνομετρικής εξίσωσης.

Στην τρίτη δραστηριότητα οι μαθητές θα προσεγγίσουν τον νόμο των ημιτόνων μέσα από μία συσχέτιση εγγεγραμμένης γωνίας ω και της αντίστοιχης χορδής δ . Η προσέγγιση αυτή είναι καθαρά συναρτησιακή αφού $\delta=2\rho\cdot\eta\mu\omega$ με σταθερό ρ .

1.1.2 Στόχοι

Οι μαθητές μέσα από τις δραστηριότητες που αφορούν στην τριγωνομετρία:

- Θα κατανοήσουν την γραφική παράσταση των τριγωνομετρικών συναρτήσεων ως των γεωμετρικό τόπο σημείων.
- Θα. συνδέσουν τις γραφικές παραστάσεις των τριγωνομετρικών συναρτήσεων με περιοδική κίνηση σημείου.
- Θα μελετήσουν διάφορες μορφές τριγωνομετρικών συναρτήσεων κάνοντας χρήση παραμέτρων.
- Θα. αποκτήσουν δεξιότητες λύσης μιας τριγωνομετρικής εξίσωσης μέσω της γραφικής παράστασης.
- Θα. εντοπίσουν την σχέση που συνδέει μία εγγεγραμμένη γωνία με την απέναντι χορδή (θεώρημα ημιτόνων) μέσα από διερεύνηση.

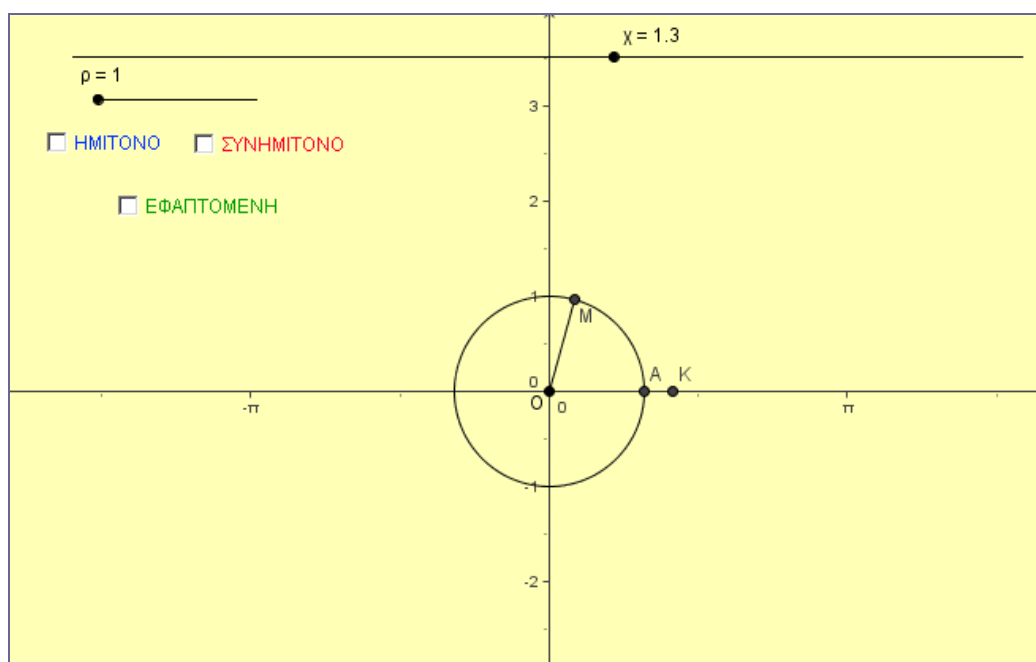
1.1.3 ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΣ ΚΥΚΛΟΣ

Φύλλο εργασίας

Στην οθόνη εμφανίζονται δύο μεταβολείς ρ και χ καθώς και τρία κουμπιά 'ΗΜΙΤΟΝΟ', 'ΣΥΝΗΜΙΤΟΝΟ' και 'ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗ'.

Επιπλέον στο σύστημα των δύο αξόνων έχει προσαρμοστεί ένας κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων μία ευθεία εφαπτόμενη στον κύκλο και ένα σημείο M το οποίο κινείται πάνω στον κύκλο καθώς μεταβάλλονται οι τιμές του χ .

Τέλος ένα σημείο K κινείται στον χ' χ και η τετμημένη του καθορίζεται από τον μεταβολέα χ . Η μονάδα μέτρησης στον άξονα $\chi'\chi$ είναι το π (3,14)



ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ ΓΙΑ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ

1. Με δεδομένο ότι αρχικά η ακτίνα του κύκλου είναι 1 ποιους τριγωνομετρικούς αριθμούς παριστάνουν οι συντεταγμένες του σημείου M ;
2. Με το κουμπί 'ΗΜΙΤΟΝΟ' να εμφανίσετε τα τμήματα MX και HK . Τι σχέση έχουν οι τεταγμένες των σημείων M και H ;
3. Να εντοπίσετε τις συντεταγμένες του σημείου H κάνοντας δεξί κλικ πάνω σε αυτό. Ποια καμπύλη θα γράψει το H αν αφήσει ίχνος;
4. Να δημιουργήσετε το ίχνος του H και να κατασκευάσετε την καμπύλη του ίχνους του. Να δικαιολογήσετε την μορφή της καμπύλης με βάση τις συντεταγμένες του σημείου H .
5. Με το κουμπί 'ΣΥΝΗΜΙΤΟΝΟ' να εμφανίσετε τα τμήματα $M\Psi$ και ΣK επαναλάβετε την διαδικασία για το σημείο Σ .

6. Να αποκρύψετε το 'ΗΜΙΤΟΝΟ' και 'ΣΥΝΗΜΙΤΟΝΟ' και να κάνετε κλικ στο κουμπί 'ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗ'. Να εντοπίσετε τις συντεταγμένες του σημείου Ε κάνοντας δεξί κλικ πάνω σε αυτό. Τι παριστάνει η τεταγμένη του; Να δημιουργήσετε το ίχνος του σημείου Ε και να σύρετε τον μεταβολέα χ . Να δικαιολογήσετε την μορφή της καμπύλης με βάση τις συντεταγμένες του σημείου Μ.
7. Να μεταβάλλετε την τιμή του ρ και να μελετήσετε την συμπεριφορά των σημείων. Συγκεκριμένα να μελετήσετε την καμπύλη του σημείου Η όταν $\rho=2$. Ποια είναι η συνάρτηση που έχει γραφική παράσταση την εν λόγω καμπύλη; Να επαναλάβετε για τα υπόλοιπα σημεία.
8. Με βάση τα προηγούμενα να συμπεράνετε για την σχέση που συνδέει την ακτίνα του κύκλου με τις συναρτήσεις (γραφικές παραστάσεις) που παράγουν τα σημεία Η, Σ και Ε.
9. Να κατασκευάσετε τις γραφικές παραστάσεις των παραπάνω συναρτήσεων με την βοήθεια του λογισμικού ώστε να επιβεβαιώσετε ή να απορρίψετε τα συμπεράσματά σας από την προηγούμενη ερώτηση.

Οδηγίες για την υλοποίηση της δραστηριότητας

Προετοιμασία

Η διάρκεια της δραστηριότητας είναι μία διδακτική ώρα και μπορεί να υλοποιηθεί ως εφαρμογή στο κεφάλαιο των τριγωνομετρικών συναρτήσεων ή ως εισαγωγή σε αυτό.

Οι μαθητές θα πρέπει να γνωρίζουν την διαδικασία δημιουργίας ίχνους.

Στην περίπτωση που η δραστηριότητα υλοποιηθεί ως εφαρμογή οι μαθητές θα πρέπει να γνωρίζουν την γραφική παράσταση των τριών βασικών τριγωνομετρικών συναρτήσεων ημίτονο, συνημίτονο και εφαπτομένη. Επιπλέον θα πρέπει να γνωρίζουν την έννοια του τριγωνομετρικού κύκλου.

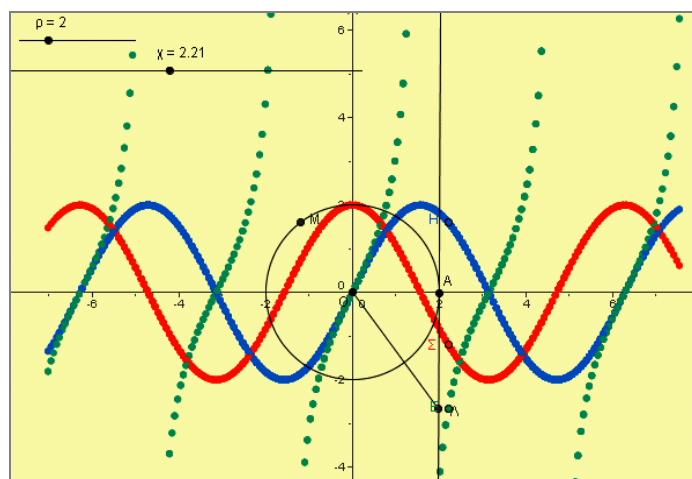
Η υλοποίηση

Η διαπραγμάτευση του πρώτου ερωτήματος είναι σημαντική αφού οι μαθητές θα πρέπει να εντοπίσουν ότι ο μεν κύκλος είναι ο τριγωνομετρικός οι δε συντεταγμένες του σημείου Μ είναι το συνημίτονο και το ημίτονο. Είναι ακόμη σημαντικό να διερευνήσουν την θέση του Μ όταν το χ πάρει τιμή 3,14 ή 6,28 αφού σε αυτές τιμές το Μ θα έχει διαγράψει ημικύκλιο και κύκλο αντίστοιχα. Τέλος θα ήταν χρήσιμο να επισημάνει ο διδάσκων στους μαθητές ότι στην ουσία η κίνηση του Μ παράγει ένα περιοδικό φαινόμενο.

Στην δεύτερη ερώτηση οι μαθητές θα εντοπίσουν ότι η τετμημένη του Η είναι το χ ενώ η τεταγμένη είναι η τεταγμένη του Μ. Στο σημείο αυτό θα πρέπει να υπογραμμιστεί ότι η τεταγμένη του Μ είναι στην ουσία το ημίτονο του χ και επομένως το ύψος του σημείου Η προσδιορίζει αυτό ακριβώς το ημίτονο.

Η καμπύλη που θα προκύψει στο επόμενο ερώτημα θα αναγνωριστεί ως ημιτονοειδής καμπύλη. Εδώ οι μαθητές θα πρέπει να αναγνωρίσουν ότι η αντίστοιχη συνάρτηση είναι η $f(x)=\eta\mu\chi$.

Στις δύο επόμενες ερωτήσεις οι μαθητές θα επαναλάβουν την ίδια διαδικασία οπότε τα ίχνη των τριών σημείων Η, Σ, Ε θα δημιουργήσουν τις γραφικές παραστάσεις των τριών βασικών τριγωνομετρικών συναρτήσεων.



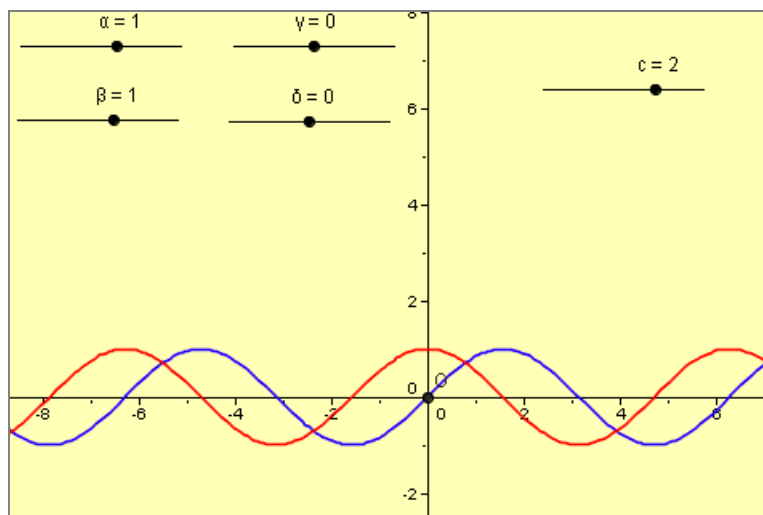
Στις δύο επόμενες ερωτήσεις 7 και 8 οι μαθητές θα συμπεράνουν ότι οι γραφικές παραστάσεις εξαρτώνται από την ακτίνα του κύκλου και ανήκουν στις συναρτήσεις $f(x)=\rho \cdot \eta\mu x$, $g(x)=\rho \cdot \sigma\upsilon\nu x$, $h(x)=\rho \cdot \epsilon\varphi x$

Στην τελευταία ερώτηση οι μαθητές θα πληκτρολογήσουν τους τύπους των τριών συναρτήσεων και θα κατασκευάσουν τις σταθερές πλέον γραφικές παραστάσεις των τριών συναρτήσεων. Θα μελετήσουν την συμπεριφορά των γραφικών παραστάσεων καθώς αλλάζει η ακτίνα του κύκλου.

1.1.4 ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Φύλλο εργασίας

Στην οθόνη εμφανίζονται 4 μεταβολές α , β , γ , δ , c . Επιπλέον εμφανίζονται οι γραφικές παραστάσεις δύο τριγωνομετρικών συναρτήσεων



Να μεταβάλλετε τις τιμές του μεταβολέα α , του β , του γ και τέλος του δ .

ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ ΓΙΑ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ

1. Να εντοπίσετε τις συναρτήσεις των οποίων οι γραφικές παραστάσεις παρουσιάζονται στους άξονες.
2. Πως μεταβάλλονται οι γραφικές παραστάσεις όταν μεταβάλλεται η μεταβλητή α ; Να δικαιολογήσετε την μεταβολή αυτή.
3. Πως μεταβάλλονται οι γραφικές παραστάσεις όταν μεταβάλλεται η μεταβλητή β ;
4. Πως μεταβάλλονται οι γραφικές παραστάσεις όταν μεταβάλλεται η μεταβλητή γ ;
5. Πως μεταβάλλονται οι γραφικές παραστάσεις όταν μεταβάλλεται η μεταβλητή δ ; Να δικαιολογήσετε την μεταβολή αυτή.

Ας επιχειρήσουμε τώρα να βρούμε έναν τρόπο να λύνουμε μία απλή τριγωνομετρική εξίσωση με την βοήθεια των παραπάνω γραφικών παραστάσεων.

6. Να κατασκευάσετε την γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = 3\sin(2x) + 3$ και της συνάρτησης $y = 2$ με την βοήθεια του μεταβολέα c . Να λύσετε την εξίσωση $3\sin(2x) + 3 = 2$. Να χρησιμοποιήσετε την δυνατότητα του λογισμικού να κατασκευάζει σημεία τομής δύο γραφικών παραστάσεων.

Οδηγίες για την υλοποίηση της δραστηριότητας

Προετοιμασία

Η διάρκεια της δραστηριότητας είναι μία διδακτική ώρα και μπορεί να υλοποιηθεί ως εφαρμογή των τριγωνομετρικών εξισώσεων.

Οι μαθητές θα πρέπει να γνωρίζουν την εμφάνιση της εξίσωσης μιας καμπύλης που έχει κατασκευαστεί με το λογισμικό. Ακόμη θα πρέπει να γνωρίζουν τους τύπους με τους οποίους εκφράζονται οι λύσεις των βασικών τριγωνομετρικών εξισώσεων.

Η υλοποίηση

Οι μαθητές αρχικά θα εντοπίσουν ότι οι δύο συναρτήσεις έχουν την μορφή $f(x)=a\cdot\eta\mu(\beta\cdot x+\gamma)+\delta$ και $g(x)=a\cdot\sigma\upsilon\upsilon(\beta\cdot x+\gamma)+\delta$.

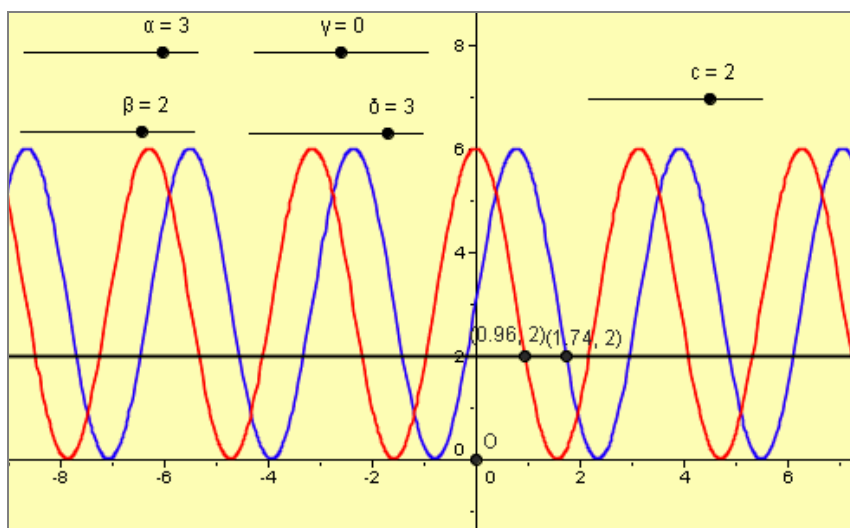
Μεταβάλλοντας το a και κρατώντας σταθερές τις άλλες παραμέτρους θα παρατηρήσουν οι μαθητές ότι το μόνο που μεταβάλλεται είναι το μέγιστο και το ελάχιστο της συνάρτησης. Στο τέλος θα διατυπώσουν και θα γράψουν ένα συμπέρασμα που θα περιγράφει το παραπάνω.

Η μεταβολή του β θα οδηγήσει τους μαθητές στο συμπέρασμα ότι ο συντελεστής της μεταβλητής x καθορίζει την περίοδο της γραφικής παράστασης. Συγκεκριμένα θα γίνει διαπραγμάτευση για την μορφή της γραφικής παράστασης καθώς το β γίνεται μεγαλύτερο του 1 και καθώς παίρνει τιμές μικρότερες του 1. Στο τέλος θα διατυπώσουν και θα γράψουν ένα συμπέρασμα που θα περιγράφει το παραπάνω.

Τα συμπεράσματα για την μεταβολή των γ και δ μπορούν να διατυπωθούν μαζί αφού η μεταβολή του γ έχει σαν αποτέλεσμα την μεταφορά δεξιά ή αριστερά της γραφικής παράστασης, ενώ η μεταβολή του δ έχει σαν αποτέλεσμα την μεταφορά πάνω ή κάτω.

Στην τελευταία ερώτηση οι μαθητές στην αρχή θα συζητήσουν για τον τρόπο με τον οποίο θα μπορούσε να λυθεί μία εξίσωση της μορφής $\eta\mu x=c$. Εδώ καλό θα είναι να τονιστεί ότι μία εξίσωση της μορφής $\eta\mu x=0,23$ δεν είναι δυνατόν να λυθεί χωρίς κάποιο εργαλείο, τουλάχιστον πίνακα ημιτόνων.

Οι μαθητές θα καθορίσουν κατάλληλες τιμές για τα a , β , γ , δ και θα χρησιμοποιήσουν την γραφική παράσταση της ευθείας $y=c$. Για $c=2$ θα δημιουργήσουν τα σημεία τομής ευθείας με την γραφική παράσταση και στην αρχή θα διαπιστώσουν ότι οι λύσεις είναι άπειρες.



Στην συνέχεια ο διδάσκων θα τους επισημάνει ότι αρκεί να εντοπίσουν την τετμημένη του πρώτου σημείου τομής αριστερά του άξονα $\psi'\psi$ που είναι $-0,17\text{rad}$ και του πρώτου σημείου δεξιά του $\psi'\psi$ που είναι $1,74\text{ rad}$. Επιπλέον θα εντοπίσουν ότι κάθε ένα από αυτά επαναλαμβάνεται μετά από $\pi\text{ rad}$ αφού η περίοδος είναι π . Επομένως οι δύο οικογένειες λύσεων είναι $(\kappa.\pi+1,74)\text{rad}$ και $(\kappa\pi-0,17)\text{rad}$.

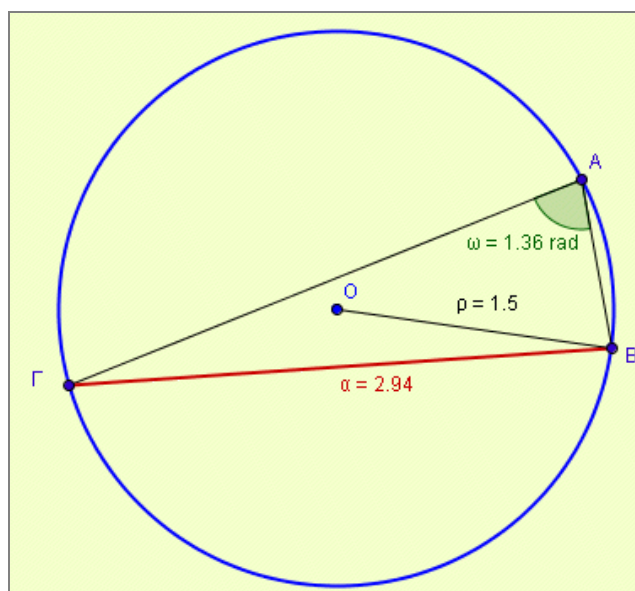
Επέκταση

Ο διδάσκων ως επέκταση θα μπορούσε να προτείνει στους μαθητές την λύση εξισώσεων με τριγωνομετρικό αριθμό το συνημίτονο και την εφαπτομένη.

1.1.5 ΘΕΩΡΗΜΑ ΗΜΙΤΩΝΩΝ

Φύλλο εργασίας

Στην οθόνη εμφανίζεται ένας κύκλος και τρία σημεία A, B, Γ πάνω σε αυτόν. Επιπλέον εμφανίζεται και μία ακτίνα ρ του κύκλου όπως και οι μετρήσεις ορισμένων γεωμετρικών αντικειμένων. Τέλος υπάρχει ένα ελεύθερο σημείο M που μπορείτε να το χρησιμοποιήσετε όταν ζητηθεί από σε κάποιο ερώτημα της δραστηριότητας.



Να σύρετε το σημείο Γ πάνω στον κύκλο. Να απαντήσετε στα παρακάτω ερωτήματα.

ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ ΓΙΑ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ

1. Πως μεταβάλλεται η πλευρά $B\Gamma = \alpha$ του τριγώνου καθώς μεταβάλλεται η γωνία $A = \omega$;
2. Ποια είναι η μέγιστη τιμή του α και για ποια τιμή της γωνίας ω επιτυγχάνεται αυτή;
3. Να δημιουργήσετε το σημείο $M = (\omega, \alpha)$ και το ίχνος του. Να μελετήσετε την τροχιά που διαγράφει καθώς κινείται το σημείο Γ.
4. Ποια σχέση θα μπορούσε να συνδέει τα ποσά ω και α . Πως επηρεάζει η ακτίνα του κύκλου την σχέση αυτή;
5. Να μεταβάλλετε την ακτίνα του κύκλου από το σημείο B. Να επιβεβαιώσετε το προηγούμενο συμπέρασμά σας κατασκευάζοντας την γραφική παράσταση της σχέσης που έχετε εντοπίσει.

Οδηγίες για την υλοποίηση της δραστηριότητας

Προετοιμασία

Η διάρκεια της δραστηριότητας είναι μία διδακτική ώρα και μπορεί να υλοποιηθεί ως εισαγωγή στην διδασκαλία του νόμου των ημιτόνων.

Οι μαθητές θα πρέπει να γνωρίζουν τον επαναπροσδιορισμό ενός σημείου και την δημιουργία ίχνους.

Ακόμη θα πρέπει να γνωρίζουν τις γραφικές παραστάσεις των βασικών τριγωνομετρικών συναρτήσεων, ιδιαίτερα του ημιτόνου.

Η υλοποίηση

Στην πρώτη και δεύτερη ερώτηση οι μαθητές θα σύρουν το Γ στο μεγάλο τόξο AB. Εδώ θα πρέπει να γίνει διαπραγμάτευση για το τι είναι σημαντικό στις παρατηρήσεις. Συγκεκριμένα το μέγιστο της πλευράς α επιτυγχάνεται στις 90^0 δηλαδή όταν η τιμή της γωνίας ω γίνει 1,57. Αυτό αναμένεται να οδηγήσει τους μαθητές να κάνουν την εικασία ότι πρόκειται για κάποια τριγωνομετρική σχέση.

Στην τρίτη ερώτηση οι μαθητές θα επαναπροσδιορίσουν τις συντεταγμένες του σημείου M, θα δημιουργήσουν το ίχνος του και θα παρατηρήσουν ότι το M διαγράφει μία καμπύλη η οποία βέβαια ενισχύει την εικασία που είχαν κάνει στα προηγούμενα ερωτήματα.

Στην τέταρτη ερώτηση, και με βάση το μέγιστο της συνάρτησης θα γράψουν τον τύπο $\alpha = 2\rho\eta\mu\omega$. Στην συνέχεια μεταβάλλοντας την ακτίνα ρ θα ενισχύσουν ακόμη περισσότερο την αρχική τους εικασία.

Προφανώς η κατασκευή της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = 2\rho\eta\mu x$ θα επιβεβαιώσει την ακρίβεια της σχέσης που έχουν εντοπίσει δηλαδή $\alpha = 2\rho\eta\mu\omega$. Η κατασκευή αυτή θα μπορούσε να πραγματοποιηθεί αν οι μαθητές επαναπροσδιορίσουν την βοηθητική συνάρτηση $f(x) = x$.

Στο σημείο αυτό ο διδάσκων καλό θα είναι να ζητήσει από τους μαθητές να

μετασχηματίσουν την σχέση σε $B\Gamma = 2\rho\eta\mu A$ και στην συνέχεια σε $\frac{\alpha}{\eta\mu A} = 2\rho$.

1.2 ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ

1.2.1 Σύντομη περιγραφή των σεναρίων

Τα πολυώνυμα αποτελούν αυτόνομα μαθηματικά αντικείμενα η μελέτη των οποίων μπορεί να πραγματοποιηθεί μέσα σε διαφορετικά μαθηματικά πλαίσια.

Με το σενάριο των πολυωνύμων οι μαθητές θα υλοποιήσουν δραστηριότητες στις οποίες αυτά προσεγγίζονται ως συναρτήσεις των οποίων οι γραφικές παραστάσεις αναδεικνύουν χαρακτηριστικές τους ιδιότητες. Επιπλέον μία δυναμική γραφική παράσταση δίνει την δυνατότητα στον μαθητή να λύσει και διερευνήσει προβλήματα που είναι αδύνατον να αντιμετωπιστούν με τα συμβατικά μέσα που διαθέτει(χαρτί και μολύβι).

Στην πρώτη δραστηριότητα οι μαθητές θα διερευνήσουν την συμπεριφορά ενός παραμετρικού πολυωνύμου και θα επιχειρήσουν να λύσουν γραφικά μία πολυωνυμική εξίσωση με ρίζες άρρητες.

Στην δεύτερη δραστηριότητα θα μελετήσουν την μορφή της γραφικής παράστασης ενός πολυωνύμου σε σχέση με το πλήθος και το είδος των ριζών ενώ θα κατασκευάσουν πολυώνυμα με δοσμένες ρίζες.

Στην τρίτη δραστηριότητα οι μαθητές θα διερευνήσουν άρρητες συναρτήσεις ενώ θα μάθουν την έννοια των ισοδυνάμων εξισώσεων.

1.2.2 Στόχοι

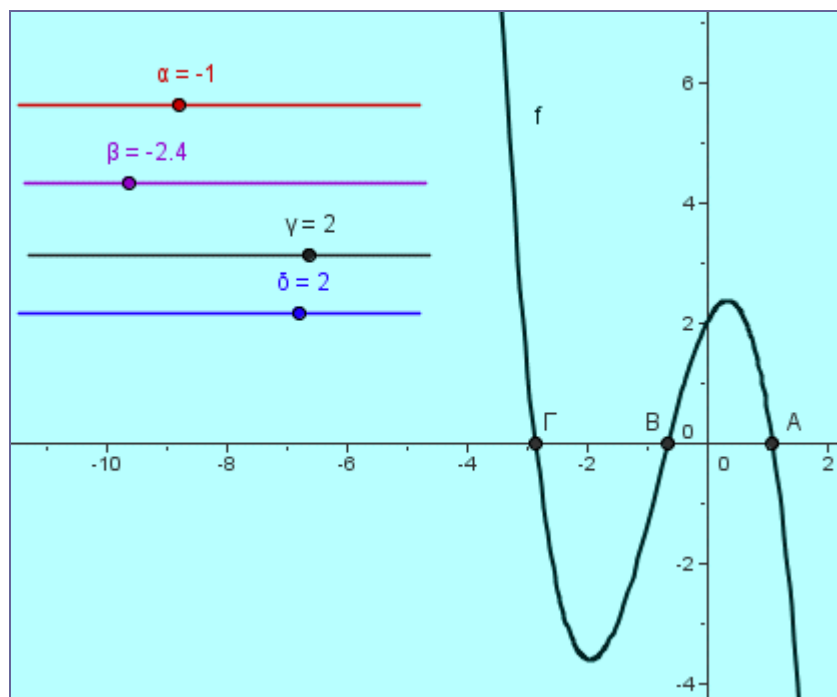
Οι μαθητές μέσα από τις δραστηριότητες που αφορούν στα πολυώνυμα:

- Θα μελετήσουν τρόπους λύσης μιας πολυωνυμικής εξίσωσης μέσω της γραφικής παράστασης.
- Θα μελετήσουν τον τρόπο με τον οποίο μεταβάλλεται η γραφική παράσταση ενός πολυωνύμου όταν μεταβάλλονται οι συντελεστές του.
- Θα συνδέσουν την ύπαρξη ριζών πολλαπλότητας πάνω από 1 με την επαφή της γραφικής παράστασης στον άξονα x .
- Θα μελετήσουν άρρητες συναρτήσεις και θα λύσουν άρρητες εξισώσεις.

1.2.3 ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ

Φύλλο εργασίας

Στην οθόνη προβάλλονται 4 μεταβολείς α , β , γ , δ και μία γραφική παράσταση.



Να μεταβάλλετε τις τιμές των παραμέτρων και να απαντήσετε στα επόμενα ερωτήματα.

ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ ΓΙΑ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ

1. Να βρείτε τον τύπο του πολυωνύμου του οποίου η γραφική παράσταση φαίνεται στην οθόνη.
2. Να μηδενίσετε την τιμή του α . Ποιο πολυώνυμο παριστάνεται μέσω της γραφικής του παράστασης
3. Να επιχειρήσετε να λύσετε την εξίσωση $x^3 - 3x^2 - 2x + 3 = 0$ με τις γνωστές μεθόδους που περιγράφονται στο σχολικό βιβλίο. Τι συμπεραίνετε;
4. Να κατασκευάσετε, με την βοήθεια των μεταβολέων, την γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^3 - 3x^2 - 2x + 3$. Ποια σημεία αντιστοιχούν στην λύση της εξίσωσης της προηγούμενης ερώτησης; Να βρείτε τις λύσεις της συγκεκριμένης εξίσωσης με προσέγγιση χιλιοστού.
5. Με $\alpha \neq 0$ να ερευνήσετε αν υπάρχει πολυώνυμο τρίτου βαθμού το οποίο να μην έχει πραγματική ρίζα.

Οδηγίες για την υλοποίηση της δραστηριότητας

Προετοιμασία

Η διάρκεια της δραστηριότητας είναι μία διδακτική ώρα και μπορεί να υλοποιηθεί ως εφαρμογή στο κεφάλαιο των πολυωνύμων.

Οι μαθητές θα πρέπει να γνωρίζουν την σημασία του σημείου τομής της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης με τον άξονα x' . Επιπλέον θα πρέπει να γνωρίζουν τον τρόπο με τον οποίο λύνεται μία πολυωνυμική εξίσωση με ρητές ρίζες.

Όσον αφορά στο λογισμικό θα πρέπει να γνωρίζουν τον τρόπο να βρίσκουν τον αλγεβρικό τύπο ενός αντικειμένου στην οθόνη μέσω της εντολής επαναπροσδιορισμού του.

Η υλοποίηση

Οι μαθητές αρχικά εντοπίζουν τον τύπο της συνάρτησης δηλαδή την $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$. Εδώ πριν προχωρήσουν στην δεύτερη ερώτηση θα ήταν χρήσιμο να αλλάξουν τυχαία τις τιμές των συντελεστών μέσω των μεταβολέων για να μελετήσουν τον τρόπο με τον οποίο μεταβάλλεται η γραφική παράσταση.

Όταν μηδενιστεί η τιμή του a τότε προκύπτει η γραφική παράσταση ενός τριωνύμου το οποίο και πάλι οι μαθητές θα μελετήσουν αλλάζοντας τις τιμές των b , c και d .

Στο τρίτο ερώτημα ο διδάσκων συζητά με τους μαθητές τους δυνατούς τρόπους με τους οποίους μπορεί να λυθεί μία πολυωνυμική εξίσωση.

Η εξίσωση $x^3-3x^2-2x+3=0$ δεν μπορεί να λυθεί με τους συμβατικούς τρόπους της παραγοντοποίησης μέσω του σχήματος Horner. Η χρήση της γραφικής παράστασης αποτελεί τον μόνο εφικτό τρόπο για την λύση της εξίσωσης.

Οι μαθητές αλλάζουν τις τιμές στους μεταβολείς ώστε να κατασκευάσουν την γραφική παράσταση της $f(x)=x^3-3x^2-2x+3=0$.

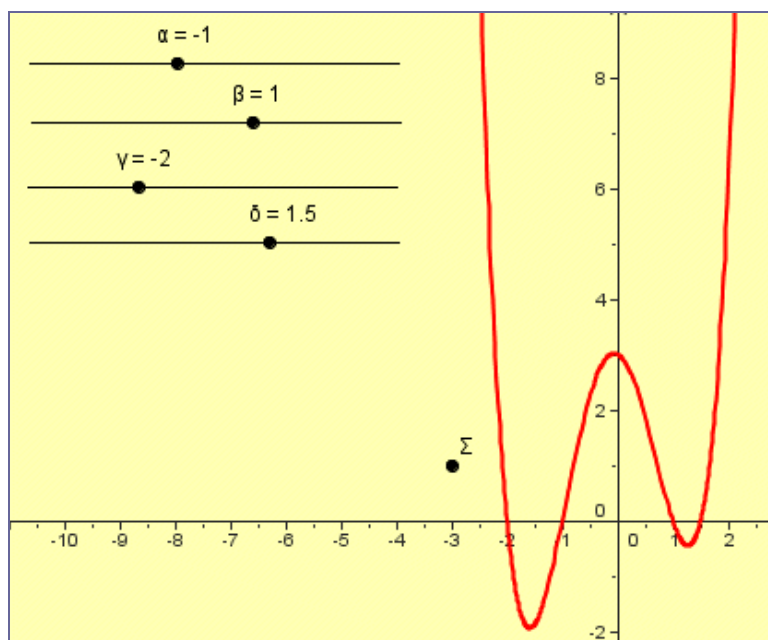
Στην συνέχεια θα αναζητήσουν τις τετμημένες των σημείων τομής με τον άξονα x' και θα εμφανίσουν τις συντεταγμένες τους.

Στο σημείο αυτό καλό θα είναι ο διδάσκων να ζητήσει από τους μαθητές να δημιουργήσουν τριτοβάθμιες εξισώσεις δικής τους επιλογής και να τις λύσουν με τον ίδιο τρόπο. Αυτό θα έχει σαν αποτέλεσμα να διαπιστώσουν ότι δεν μπορεί να κατασκευαστεί τριτοβάθμια εξίσωση η οποία να μην έχει πραγματική ρίζα.

1.2.4 ΡΙΖΕΣ ΠΟΛΥΩΝΥΜΟΥ

Φύλλο εργασίας

Στην οθόνη προβάλλονται 4 μεταβολείς α , β , γ , δ , την γραφική παράσταση μιας συνάρτησης και ένα ελεύθερο σημείο Σ .



ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ ΓΙΑ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ

1. Να μεταβάλλετε τις τιμές των παραμέτρων. Με δεδομένο ότι η γραφική παράσταση ανήκει σε ένα πολυώνυμο, ποιο θα μπορούσε να είναι το πολυώνυμο αυτό;
2. Να ελέγξετε αν η απάντησή σας στο προηγούμενο ερώτημα ήταν σωστή μέσα από την εντολή επαναπροσδιορισμού του τύπου. Ποιος είναι ο βαθμός του πολυωνύμου;
3. Με την βοήθεια των μεταβολέων να κατασκευάσετε ένα πολυώνυμο τετάρτου βαθμού το οποίο να έχει δύο ίσες ρίζες. Ποια είναι τώρα η θέση της γραφικής παράστασης ως προς τον άξονα x ;
4. Να κατασκευάσετε ένα πολυώνυμο τετάρτου βαθμού του οποίου οι 4 ρίζες να είναι ίσες. Ποια είναι η θέση της γραφικής παράστασης ως προς το άξονα x ;
5. Να επινοήσετε έναν τρόπο ώστε με την βοήθεια της γραφικής παράστασης να μπορούμε να υπολογίζουμε άμεσα το γινόμενο $\alpha \cdot \beta \cdot \gamma \cdot \delta$.

Οδηγίες για την υλοποίηση της δραστηριότητας

Προετοιμασία

Η διάρκεια της δραστηριότητας είναι μία διδακτική ώρα και μπορεί να υλοποιηθεί ως εφαρμογή στο κεφάλαιο των πολυωνύμων.

Οι μαθητές θα πρέπει να γνωρίζουν την παραγοντοποίηση ενός πολυωνύμου με βάση τις ρίζες του.

Ακόμη θα πρέπει να γνωρίζουν τον τρόπο εντοπισμού του τύπου μιας συνάρτησης από την γραφική της παράσταση μέσω της εντολής επαναπροσδιορισμού της.

Η υλοποίηση

Οι μαθητές αρχικά μεταβάλλουν τις τιμές των τεσσάρων παραμέτρων μέσω των μεταβολέων και διαπραγματεύονται τον τρόπο με τον οποίο μεταβάλλεται η γραφική παράσταση.

Ο διδάσκων επισημαίνει ιδιαίτερα το γεγονός ότι τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης με τον x , δηλαδή οι ρίζες, συμπίπτουν με τις τιμές των μεταβολέων. Εδώ θα πρέπει οι μαθητές να εμφανίσουν τις συντεταγμένες του σημείου Σ , να το σύρουν μέχρι την τομή της γραφικής παράστασης με τον άξονα x για να εντοπίσουν τις συντεταγμένες του σημείου τομής. Εν γένει κάθε φορά που αναζητούν τις συντεταγμένες σημείων τομής μπορούν να χρησιμοποιούν το σημείο Σ .

Το γεγονός αυτό, σε συνδυασμό με το ότι το πολυώνυμο έχει 4 ρίζες, θα οδηγήσει στην εικασία ότι αυτό θα μπορούσε να έχει την μορφή $(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)$. Εδώ θα ήταν χρήσιμο να τονιστεί ότι ίσως υπάρχει και ένας συντελεστής k μπροστά από τις παρενθέσεις.

Στην δεύτερη ερώτηση οι μαθητές κάνουν δεξί κλικ πάνω στην γραφική παράσταση και επιβεβαιώνουν την εικασία τους μέσω της εντολής επαναπροσδιορισμού της συνάρτησης, όπου εμφανίζεται ο τύπος της. Το πλήθος των παραγόντων είναι 4 επομένως συμπεραίνουν ότι ο βαθμός του πολυωνύμου είναι 4.

Στην τρίτη ερώτηση οι μαθητές θα μεταβάλλουν τις τιμές δύο παραμέτρων ώστε να είναι ίσες (π.χ $\alpha=\beta=1$). Εδώ ο διδάσκων προτείνει να μεταβάλλουν τις δύο άλλες παραμέτρους και να διαπραγματευτούν την θέση της γραφικής παράστασης ως προς τον άξονα x . Αυτό που προκύπτει είναι ότι η γραφική παράσταση εφάπτεται συνεχώς στον άξονα x στο σημείο με τετμημένη 1.

Στην επόμενη ερώτηση οι μαθητές θα ορίσουν τιμές για τους μεταβολείς που θα είναι ίσες (π.χ $\alpha=\beta=\gamma=\delta=1$) και θα παρατηρήσουν ότι η γραφική παράσταση έχει ένα μόνο κοινό σημείο με τον x στο οποίο μάλιστα εφάπτεται. Στο σημείο αυτό καλό θα είναι να ζητήσει ο διδάσκων από τους μαθητές να διατυπώσουν έναν κανόνα. Ο κανόνας αυτός θα μπορούσε να έχει την εξής διατύπωση: «Η γραφική παράσταση ενός πολυωνύμου, το οποίο διαθέτει μία ρίζα με βαθμό πολλαπλότητας 2, 3, 4 κ.λ.π., εφάπτεται στον άξονα x ».

Στο σημείο αυτό είναι ευκαιρία να ζητήσει ο διδάσκων από τους μαθητές να λύσουν γραφικά της ανίσωση: $(x-2)^2(x+1)(x-1)<0$. Ο στόχος εδώ είναι να διαπιστώσουν οι μαθητές ότι η λύση μιας πολυωνυμικής ανίσωσης καθορίζεται κατά κύριο λόγο από τις απλές ρίζες του.

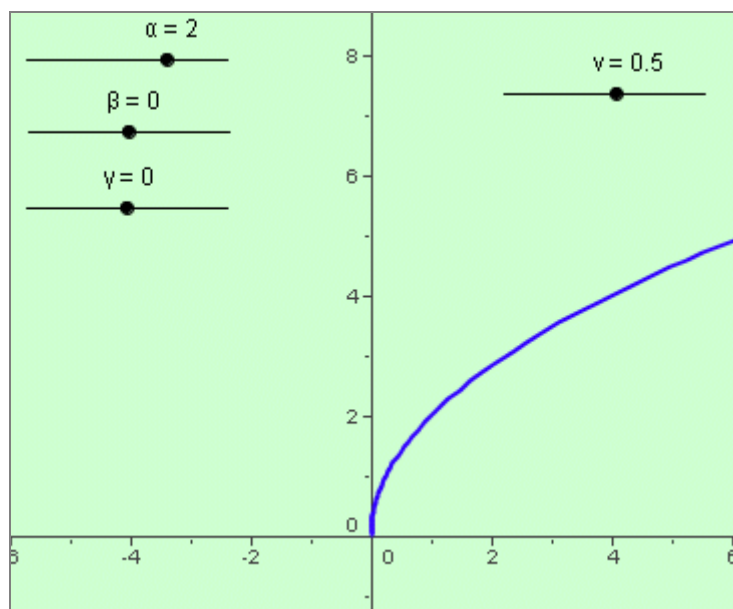
Στην τελευταία ερώτηση οι μαθητές θα συζητήσουν για το γινόμενο των αριθμών $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ και με την υπόδειξη του διδάσκοντα θα καταλήξουν στο ότι αυτό εκφράζει τον σταθερό όρο του πολυωνύμου (αν εκτελεστούν οι πράξεις).

Επειδή ο σταθερό όρος είναι το σημείο τομής της γραφικής παράστασης με τον άξονα y θα μπορούσαν να προσδιορίσουν το σημείο αυτό, με την βοήθεια του σημείου Σ , και η τεταγμένη του θα είναι ίση με ζητούμενο γινόμενο.

1.2.5 ΑΡΡΗΤΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Φύλλο εργασίας

Στην οθόνη προβάλλονται οι μεταβολείς α , β , γ , ν και η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης.



ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ ΓΙΑ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ

- 1) Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης της οποίας η γραφική παράσταση φαίνεται στην οθόνη. Είναι πολυωνυμική η συνάρτηση αυτή;
- 2) Να αλλάξετε τις τιμές της παραμέτρου ν ώστε να κατασκευάσετε την γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ και την $f(x) = \sqrt[5]{x^2}$. Σε τι διαφέρουν οι συναρτήσεις με ριζικά από τις πολυωνυμικές; Που οφείλονται οι διαφορές αυτές;
- 3) Να κατασκευάσετε την γραφική παράσταση της συνάρτησης για $\alpha=1$ $\beta=\gamma=0$ και $\nu=-2$. Ποια είναι η συνάρτηση αυτή; Να δώσετε μία εξήγηση για την μορφή που έχει η γραφική παράσταση.
- 4) Αλλάζοντας τις τιμές στους μεταβολείς να λύσετε την εξίσωση

$$\sqrt{x} - \frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x^3}} = 0.$$

Οδηγίες για την υλοποίηση της δραστηριότητας

Προετοιμασία

Η διάρκεια της δραστηριότητας είναι μία διδακτική ώρα και μπορεί να υλοποιηθεί ως εφαρμογή στο κεφάλαιο των πολυωνύμων.

Οι μαθητές θα πρέπει να γνωρίζουν τον τρόπο εντοπισμού του τύπου μιας συνάρτησης από την γραφική της παράσταση μέσω της εντολής επαναπροσδιορισμού της.

Όσον αφορά στα μαθηματικά θα πρέπει να γνωρίζουν την έννοια της πολυωνυμικής συνάρτησης.

Η υλοποίηση

Οι μαθητές αρχικά εντοπίζουν τον τύπο της συνάρτησης, κάνοντας δεξί κλικ πάνω στην γραφική παράσταση που προβάλλεται στην οθόνη και διατυπώνουν την άποψη ότι δεν μπορεί να είναι πολυωνυμική αφού η μεταβλητή x είναι υψωμένη σε κλάσμα και όχι σε φυσικό αριθμό.

Στην συνέχεια επιλέγουν για την μεταβλητή x τις τιμές 1,5 και 2,5 περνώντας από ακέραιες τιμές. Αυτό που θα παρατηρήσουν είναι το ότι οι γραφικές παραστάσεις με ριζικά περιορίζονται μόνο στο πρώτο τεταρτημόριο. Η εξήγηση που θα πρέπει να δοθεί εδώ είναι ότι οι ρίζες (οποιασδήποτε τάξης) πραγματικών θετικών αριθμών είναι θετικές ποσότητες.

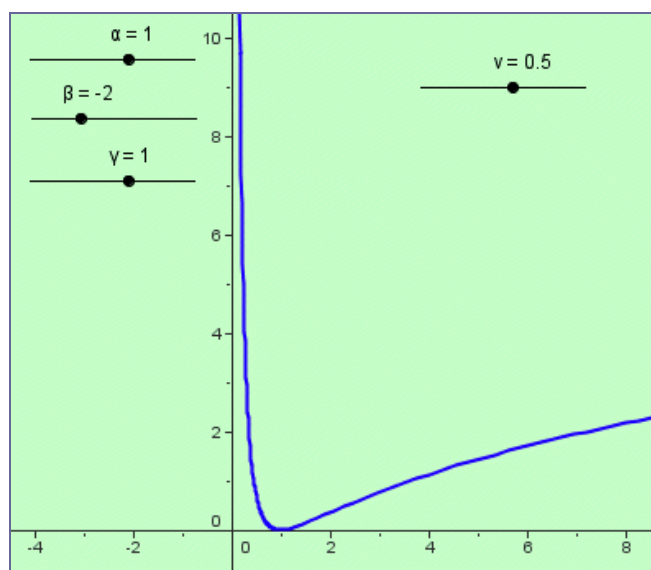
Στην τρίτη ερώτηση οι μαθητές θα κατασκευάσουν στην ουσία την γραφική

παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \frac{1}{x^2}$. Η μελέτη της γραφικής παράστασης θα

οδηγήσει στην διαπίστωση ότι οι τιμές της συνάρτησης είναι θετικές ενώ μπορεί να πλησιάζει απερίοριστα τους δύο άξονες χωρίς να τους κόψει. Εδώ και πάλι η συνάρτηση δεν είναι πολυωνυμική.

Στην τέταρτη ερώτηση οι μαθητές θα επιλέξουν $\alpha=1$, $\beta=-2$, $\gamma=1$ και $\nu=0,5$. Η λύση της εξίσωσης που αντιστοιχεί στην γραφική παράσταση θα αναζητηθεί στα σημεία τομής της με τον άξονα $x'x$.

Εδώ είναι προφανές ότι η εξίσωση έχει ρίζα τον αριθμό 1 και από την γραφική παράσταση προκύπτει ότι αυτή είναι η μοναδική.



1.3 ΠΡΟΟΔΟΙ

1.3.1 Σύντομη περιγραφή των σεναρίων

Οι δραστηριότητες που αναφέρονται στις προόδους επιτρέπουν μία οπτικοποίηση της έννοιας της ακολουθίας. Ιδιαίτερα η αριθμητική πρόοδος θα μπορούσε να παρασταθεί γεωμετρικά μέσα από μία σειρά ευθυγράμμων τμημάτων των οποίων το ύψος συνεχώς αυξάνεται ή ελαττώνεται.

Το σενάριο αποτελείται από δύο δραστηριότητες. Η πρώτη δραστηριότητα αφορά στην διερεύνηση δύο αριθμητικών προόδων, μιας αύξουσας και μιας φθίνουσας των οποίων οι τιμές είναι συμπληρωματικές, δηλαδή έχουν σταθερό άθροισμα για ορισμένο πλήθος όρων. Η ιδιότητα αυτή θα επιτρέψει στους μαθητές να κατανοήσουν την μέθοδο αντιστροφής της σειράς των όρων μιας αριθμητικής προόδου με στόχο να υπολογιστεί το άθροισμα ορισμένου πλήθους όρων της προόδου.

Στην δεύτερη δραστηριότητα οι μαθητές θα μελετήσουν μία ακολουθία η οποία δεν παραπέμπει άμεσα σε κάποια από τις γνωστές προόδους.

Τέλος στην τρίτη δραστηριότητα οι μαθητές θα μελετήσουν μία οπτικοποίηση της γεωμετρικής προόδου που θα αποτελέσει γέφυρα για την έννοια της εκθετικής συνάρτησης.

1.3.2 Στόχοι

Οι μαθητές μέσα από τις δραστηριότητες που αφορούν στις προόδους:

- Θα συνδέσουν την έννοια της ακολουθίας αριθμών με την έννοια της συνάρτησης
- Θα εφαρμόσουν τις γνώσεις τους που αφορούν στις προόδους σε ένα καθαρά γεωμετρικό πλαίσιο.
- Θα οπτικοποιήσουν τον τρόπο με τον οποίο αποδεικνύεται ο τύπος που δίνει το άθροισμα n όρων μιας αριθμητικής προόδου.
- Θα διερευνήσουν την γραφική παράσταση μιας παραμετρικής συνάρτησης και θα την προσαρμόσουν πάνω σε ένα σύνολο σημείων του επιπέδου.
- Θα εμπλακούν σε διαδικασίες απόδειξης ενός τύπου τον οποίο δημιούργησαν μέσα από τις δυνατότητες του λογισμικού.
- Θα συνδέσουν την γραφική παράσταση καμπύλης με ακολουθίες που δεν είναι αριθμητικές προόδοι.

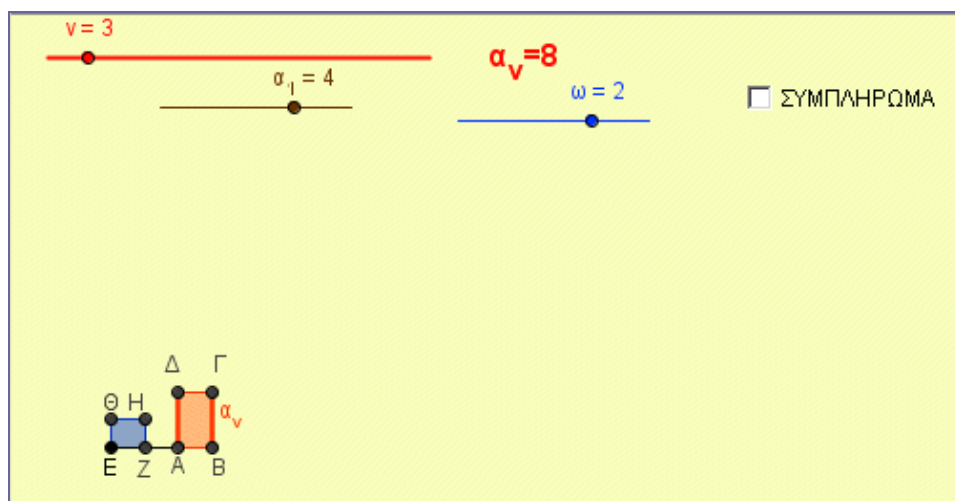
1.3.3 ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΠΡΟΟΔΟΣ

Φύλλο εργασίας

Στην οθόνη προβάλλονται 3 μεταβολείς v , a_1 και ω καθώς και 2 ορθογώνια παραλληλόγραμμα διαφορετικού χρώματος των οποίων τα μήκη είναι γνωστά.

Επιπλέον εμφανίζεται ένα κουμπί 'ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑ' με το οποίο εμφανίζεται ή αποκρύπτεται ένα μεταβολέας κ και ένα επιπλέον πράσινο ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.

Τέλος εμφανίζεται μία μέτρηση a_v η οποία αντιστοιχεί στο ύψος ενός από τα ορθογώνια παραλληλόγραμμα.



Να μεταβάλλετε τις τιμές του μεταβολέα v .

ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ ΓΙΑ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ

- 1) Πως μεταβάλλεται το ύψος a_v του παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$, καθώς μεταβάλλονται οι τιμές του v ;
- 2) Ποια σχέση συνδέει την τιμή a_v του τμήματος με την a_{v-1} δηλαδή με την προηγούμενή της; Να εξηγήσετε με οποιονδήποτε τρόπο γιατί οι τιμές του a_v τμήματος αποτελούν μία αριθμητική πρόοδο.
- 3) Ποιος είναι ο πρώτος όρος και ποιος ο 20^{ος} όρος της προόδου; Να απαντήσετε στο ερώτημα αυτό με βάση τον τύπο που μας δίνει τον νιοστό όρο προόδου και να επιβεβαιώσετε το αποτέλεσμα.
- 4) Να εμφανίσετε, με το κουμπί 'ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑ', τον μεταβολέα κ όταν $v=20$. Να μεταβάλλετε τις τιμές του κ (όταν $v=20$). Πως μεταβάλλεται το ύψος a_κ του παραλληλογράμμου $K\Lambda M N$; Να εξηγήσετε γιατί οι τιμές του a_κ αποτελούν όρους αριθμητικής προόδου.
- 5) Ποια σχέση συνδέει τους όρους της μίας προόδου με τους όρους της άλλης; Μέχρι τώρα ασχοληθήκαμε με κάθε πρόοδο ξεχωριστά. Να ενεργοποιήσετε το ίχνος των κατακόρυφων πλευρών του $K\Lambda M N$ και να σύρετε τους μεταβολείς μέχρι το 20 ώστε να καλύψουν όλο το φάσμα των τιμών τους.

- 6) Πόσο είναι το συνολικό μήκος δύο παραλληλογράμμων (κόκκινο, πράσινο) που βρίσκονται στην ίδια ευθεία, δηλαδή στην ίδια θέση, για τις διάφορες τιμές των κ και ν ;
- 7) Ας υποθέσουμε ότι μας θέτουν το εξής πρόβλημα: «Πόσο θα είναι το συνολικό ύψος όλων των παραλληλογράμμων, κόκκινα και πράσινα μαζί, αν τα βάλλουμε το ένα πάνω στο άλλο;» Να δώσετε μία απάντηση με βάση την εικόνα που παρουσιάζεται στην οθόνη όταν πλέον έχετε ενεργοποιήσει τα ίχνη των πλευρών του ΚΛΜΝ και έχετε διατρέξει όλο το φάσμα των τιμών των μεταβολέων ν και κ . Πόσο είναι το συνολικό μήκος μόνο των κόκκινων παραλληλογράμμων;
- 8) Με βάση το προηγούμενο να περιγράψετε μία μέθοδο να βρίσκουμε το άθροισμα των όρων μίας αριθμητικής προόδου.
- 9) Έχετε στη διάθεσή σας κατάλληλους μεταβολείς με τους οποίους μπορείτε να δημιουργήσετε διάφορες αριθμητικές προόδους. Να πειραματιστείτε ιδιαίτερα με περιπτώσεις στις οποίες η διαφορά ω είναι αρνητική.

Οδηγίες για την υλοποίηση της δραστηριότητας

Προετοιμασία

Η διάρκεια της δραστηριότητας είναι μία διδακτική ώρα και μπορεί να υλοποιηθεί ως εφαρμογή στο κεφάλαιο των αριθμητικών προόδων.

Οι μαθητές θα πρέπει να γνωρίζουν την διαδικασία δημιουργίας ίχνους. Επιπλέον θα πρέπει να γνωρίζουν την έννοια της ακολουθίας, τον ορισμό της αριθμητικής προόδου και τους τύπους του νιοστού όρου και του αθροίσματος.

Η υλοποίηση

Στις δύο πρώτες ερωτήσεις οι μαθητές θα εντοπίσουν ότι τα ύψη του παραλληλογράμμου αποτελούν διαδοχικούς όρους μιας αριθμητικής προόδου με πρώτο όρο το 4 και διαφορά 2. Αυτό μπορούν να το επιβεβαιώσουν αν καταγράψουν μερικές τιμές της ακολουθίας a_n , δηλαδή της ακολουθίας των υψών των παραλληλογράμμων.

Στην τρίτη ερώτηση ο $20^{\text{ος}}$ όρος θα υπολογιστεί με βάση τον τύπο του νιοστού όρου της αριθμητικής προόδου ενώ η επιβεβαίωση θα γίνει όταν οι μαθητές δώσουν μέσω του μεταβολέα την τιμή 20 στον μεταβολέα ν .

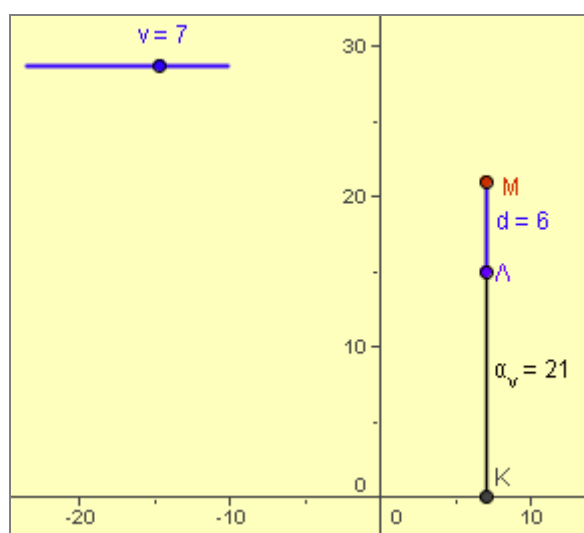
Στο επόμενο ερώτημα οι μαθητές θα επικεντρωθούν στις τιμές της ακολουθίας a_k δηλαδή στις τιμές των υψών των νέων παραλληλογράμμων που εμφανίζονται. Εδώ θα παρατηρήσουν ότι οι τιμές αυτές αποτελούν διαδοχικούς όρους μιας αριθμητικής προόδου με πρώτο όρο το 42 και διαφορά 2.

Η πέμπτη ερώτηση είναι σημαντική για την κατανόηση της βασικής ιδέας της δραστηριότητας. Οι μαθητές, με την βοήθεια του διδάσκοντα, θα παρατηρήσουν ότι η δεύτερη πρόοδος έχει τους ίδιους όρους με την πρώτη μόνο που οι όροι αυτοί εμφανίζονται με αντίστροφη σειρά. Συγκεκριμένα ο πρώτος όρος της μίας είναι ίσος με τον τελευταίο όρο της άλλης, ο δεύτερος όρος της μίας ισούται με τον προτελευταίο όρο της άλλης κ.ο.κ.

1.3.4 ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ

Φύλλο εργασίας

Στην οθόνη εμφανίζονται ένας μεταβολέας v και ένα ευθύγραμμο τμήμα $KM=a_v$ το οποίο μεταβάλλεται καθώς μεταβάλλονται οι τιμές του v . Ακόμη εμφανίζεται το τμήμα $LM=d$.



Να μεταβάλλετε τις τιμές του μεταβολέα v .

ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ ΓΙΑ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ:

1. Να καταγράψετε τις τιμές του τμήματος a_v για τις διάφορες τιμές του v . Υπάρχει κάποιος κανόνας με τον οποίο προκύπτουν οι τιμές αυτές;
2. Να καταγράψετε τις τιμές του τμήματος d . Υπάρχει κάποιος κανόνας που δημιουργούνται; Ποια σχέση έχουν οι τιμές του d με τις τιμές του a_v ;
3. Να εμφανίσετε το ίχνος του σημείου M . Να μεταβάλετε τις τιμές του v . Τι παρατηρείτε για τα σημεία που δημιουργούνται;
4. Ποια μορφή καμπύλης θα μπορούσε να δημιουργηθεί αν το σημείο M κινηθεί σε συνεχή γραμμή και όχι απλά σημείο προς σημείο;
5. Να εμφανίσετε τους τρεις μεταβολείς α , β , γ και την συνάρτηση f . Να κατασκευάσετε μία παραμετρική συνάρτηση επαναπροσδιορίζοντας την f και να προσαρμόσετε την γραφική της παράσταση πάνω στο ίχνος του σημείου M .

Ας επιχειρήσουμε τώρα να εντοπίσουμε τον τύπο που δίνει τον τυχαίο όρο a_v της ακολουθίας που δημιουργούν οι τιμές του α .

6. Να συμπληρώσετε την τελική γραμμή με βάση τις προηγούμενες.

$$\alpha_1=1$$

$$\alpha_2=\alpha_1+2$$

$$\alpha_3=\alpha_2+3$$

$$\alpha_4=\alpha_3+4$$

.....

.....

 $a_n =$

7. Να προσθέσετε κατά μέλη τις ισότητες. Να υπολογίσετε τον όρο a_n σαν συνάρτηση του αριθμού n . Να συγκρίνετε τον τύπο που σας προέκυψε με την απάντηση που έχετε δώσει στην ερώτηση 5.

Οδηγίες για την υλοποίηση της δραστηριότητας

Προετοιμασία

Η διάρκεια της δραστηριότητας είναι μία διδακτική ώρα και μπορεί να υλοποιηθεί ως επέκταση της έννοιας της ακολουθίας και της προόδου.

Οι μαθητές θα πρέπει να γνωρίζουν την δημιουργία ίχνους και την εμφάνιση αντικειμένων και τον επαναπροσδιορισμό τους.

Επιπλέον θα πρέπει να γνωρίζουν τον τύπο που δίνει το άθροισμα των n όρων μιας αριθμητικής προόδου.

Η υλοποίηση

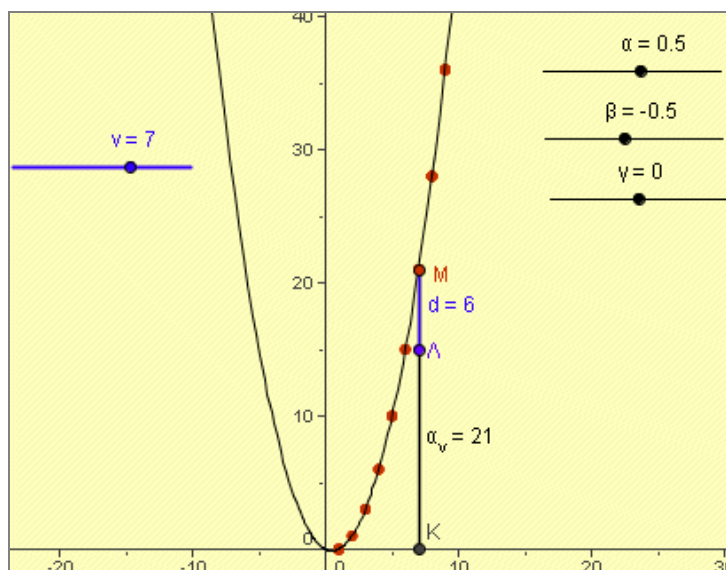
Στην συγκεκριμένη δραστηριότητα οι μαθητές θα προσπαθήσουν να βρουν έναν τύπο για τον νιοστό όρο μιας ακολουθίας που όμως δεν είναι ούτε αριθμητική ούτε γεωμετρική πρόοδος. Οι όροι της συγκεκριμένης ακολουθίας ανήκουν πάνω σε μία παραβολή την οποία οι μαθητές θα πρέπει να κατασκευάσουν μέσα από τις δυνατότητες του λογισμικού.

Στην πρώτη ερώτηση οι μαθητές θα σύρουν τον μεταβολέα στην θέση 0. Στην συνέχεια θα αυξάνουν τις τιμές σταδιακά και θα παρατηρήσουν ότι πράγματι υπάρχει μία κανονικότητα. Συγκεκριμένα κάθε όρος a_n προκύπτει από τον προηγούμενο a_{n-1} αν προσθέσουμε μία ποσότητα κατά ένα μεγαλύτερη από αυτή που προσθέσαμε στον a_{n-2} για να προκύψει ο a_{n-1} .

Στην δεύτερη ερώτηση οι μαθητές θα συνδέσουν τις τιμές του τμήματος d με τον τρόπο που αυξάνονται οι τιμές του a_n . Δηλαδή θα παρατηρήσουν ότι κάθε τιμή του d δείχνει τον αριθμό που έχει προστεθεί στον όρο a_{n-1} για να προκύψει ο a_n .

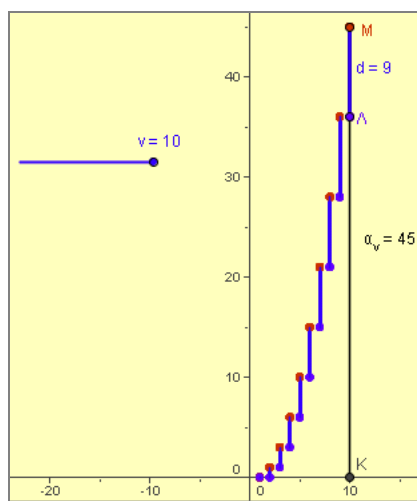
Στην τρίτη και τέταρτη ερώτηση αφού οι μαθητές εμφανίσουν το ίχνος του σημείου M θα παρατηρήσουν ότι τα ίχνη διατάσσονται πάνω σε μία καμπύλη η οποία θυμίζει έντονα παραβολή.

Στην πέμπτη ερώτηση οι μαθητές θα εμφανίσουν τους 3 μεταβολείς α , β , γ και την βοηθητική συνάρτηση f . Στην συνέχεια θα επαναπροσδιορίσουν την f σε $ax^2+bx+\gamma$ και θα προσπαθήσουν να την προσαρμόσουν πάνω στα σημεία που ήδη υπάρχουν. Εδώ θα πρέπει να μελετήσουν προσεκτικά τα χαρακτηριστικά σημεία και κυρίως αυτό που βρίσκεται στον άξονα $x'x$. Το συγκεκριμένο σημείο έχει συντεταγμένες $(1, 0)$ ενώ υπάρχει ένδειξη ότι η συνεχής καμπύλη θα περάσει από την αρχή των αξόνων. Αυτό θα το επιβεβαιώσουν αν επιλέξουν $\gamma=0$ οπότε για $\alpha=0,5$ και $\beta=-0,5$ η καμπύλη θα προσαρμοστεί πάνω στα σημεία που έχουν δημιουργήσει τα ίχνη του M .



Μία επιβεβαίωση για την ορθότητα της απάντησης στο ερώτημα αυτό μπορεί να γίνει κάνοντας δεξί κλικ πάνω στο σημείο M όπου εμφανίζονται οι συντεταγμένες του $(v, 0,5v^2 - 0,5v)$ και η τετμημένη υποδεικνύει την συνάρτηση στην οποία ανήκουν τα ζεύγη των τιμών.

Μία ενδιαφέρουσα παράπλευρη δραστηριότητα θα μπορούσε να υλοποιηθεί αν ο διδάσκων ζητήσει από τους μαθητές να εμφανίσουν το ίχνος του τμήματος d και να σαρώσουν τις τιμές του v.



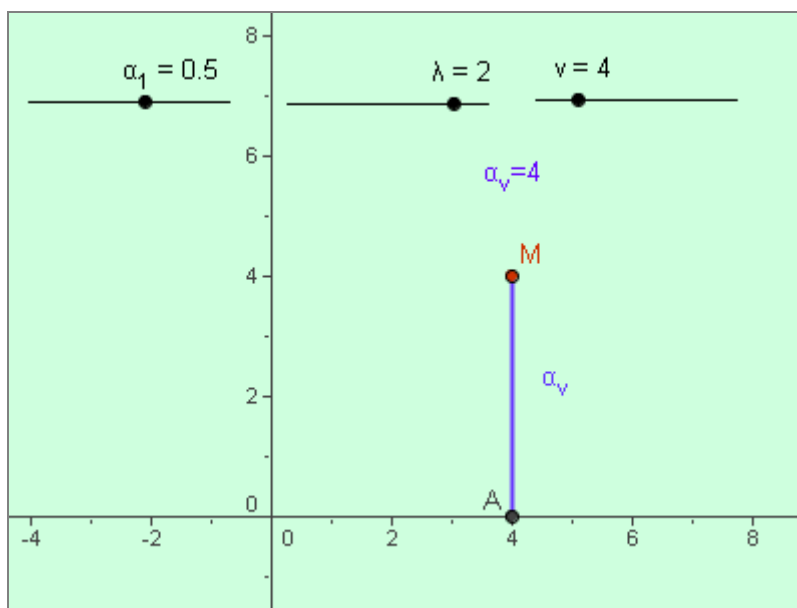
Εδώ δημιουργείται μία οπτικοποίηση της ακολουθίας των τιμών του d. Στην συνέχεια μπορεί να ζητήσει από τους μαθητές να γράψουν έναν αναδρομικό τύπο για την ακολουθία a_v . Ο τύπος αυτός είναι $a_v = a_{v-1} + (v-1)$

Στην έκτη ερώτηση οι μαθητές θα χρησιμοποιήσουν τον τύπο αυτό για να εφαρμόσουν μία τυπική διαδικασία με την οποία θα κατασκευάσουν έναν τύπο που θα δίνει τον νιοστό όρο της ακολουθίας. Ο τύπος αυτός θα συμπέσει με τον τύπο που είχαν βρει οι μαθητές μέσω της γραφικής παράστασης του τριωνύμου.

1.3.5 ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΠΡΟΟΔΟΣ

Φύλλο εργασίας

Στην οθόνη εμφανίζονται 3 μεταβολείς a_1 , λ και v καθώς και ένα ευθύγραμμο τμήμα AM με γνωστό μήκος a_v .



Να μεταβάλλετε τις τιμές του μεταβολέα v .

ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ ΓΙΑ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ

1. Πως μεταβάλλεται το μήκος του τμήματος AM καθώς μεταβάλλονται οι τιμές του v ;
2. Ποια σχέση συνδέει την τιμή a_v του τμήματος με την a_{v-1} , δηλαδή με την προηγούμενή της; Να εξηγήσετε με οποιονδήποτε τρόπο γιατί οι τιμές του τμήματος αποτελούν μία γεωμετρική πρόοδο.
3. Ποιος είναι ο $10^{\text{ος}}$ όρος της προόδου; Να απαντήσετε στο ερώτημα αυτό με βάση τον τύπο που μας δίνει τον νιοστό όρο προόδου και να επιβεβαιώσετε το αποτέλεσμα.
4. Να μεταβάλλετε τις τιμές του λ (όταν $v=1$). Για ποιες τιμές του λ το μήκος του τμήματος συνεχώς αυξάνει (ανεξάρτητα αν βρίσκετε πάνω ή κάτω από τον άξονα $x'x$) καθώς αυξάνονται οι τιμές του v ;
5. Για ποιες τιμές του λ το μήκος του τμήματος συνεχώς μειώνεται. Να συνοψίσετε τα συμπεράσματά σας.

Προετοιμασία

Η διάρκεια της δραστηριότητας είναι μία διδακτική ώρα και μπορεί να υλοποιηθεί ως εφαρμογή στο κεφάλαιο των γεωμετρικών προόδων.

Οι μαθητές θα πρέπει να γνωρίζουν την έννοια της ακολουθίας, τον ορισμό της γεωμετρικής προόδου και τον τύπο του νιοστού όρου.

Η υλοποίηση

Η δραστηριότητα της γεωμετρικής προόδου έχει στόχο να ενισχύσει την διερευνητική στάση των μαθητών και να αποσαφηνίσει τις ιδιότητες της γεωμετρικής προόδου.

Ο διδάσκων μπορεί να χρησιμοποιήσει την δραστηριότητα ως εφαρμογή στις γεωμετρικές προόδους αλλά και ως εισαγωγή στην διδασκαλία της παραγράφου αυτής. Η προτεινόμενη πορεία που ακολουθεί αναφέρεται στην χρήση της δραστηριότητας ως εφαρμογή.

Στην πρώτη και δεύτερη ερώτηση οι μαθητές θα σημειώσουν διαδοχικές τιμές του a_n και θα παρατηρήσουν ότι ο λόγος παραμένει σταθερός επομένως η ακολουθία αποτελεί γεωμετρική πρόοδο.

Ένας άλλος τρόπος για να διαπιστώσουν οι μαθητές ότι πράγματι πρόκειται για γεωμετρική πρόοδο είναι να κάνουν οι μαθητές δεξί κλικ στο σημείο M και να διαπιστώσουν ότι η τεταγμένη του έχει την μορφή του γενικού όρου μιας γεωμετρικής προόδου.

Στην τρίτη ερώτηση οι μαθητές θα υπολογίσουν τον δέκατο όρο, με βάση τον τύπο, και στην συνέχεια θα το επιβεβαιώσουν σύροντας τον μεταβολέα του n στην τιμή 10 και σημειώνοντας την τιμή του a_{10} .

Στην τέταρτη ερώτηση οι μαθητές θα μεταβάλλουν τις τιμές του λ και θα παρατηρήσουν ότι αν $\lambda > 1$ ή $\lambda < -1$ το μήκος του τμήματος a_n συνεχώς αυξάνεται. Ακόμη θα παρατηρήσουν ότι τα τμήματα, στην περίπτωση που $\lambda < -1$, εναλλάσσουν την θέση τους πάνω και κάτω από τον άξονα $x'x$.

Στην πέμπτη ερώτηση οι μαθητές θα πειραματιστούν για τιμές του λ μεταξύ -1 και 1. Θα παρατηρήσουν ότι το μήκος του τμήματος a_n συνεχώς μειώνεται.

Τέλος οι μαθητές θα συνοψίσουν τα συμπεράσματά τους ενώ ο διδάσκων θα τους υποδείξει να χρησιμοποιήσουν την απόλυτη τιμή του λόγου λ για να περιγράψουν την αύξουσα ή την φθίνουσα γεωμετρική πρόοδο.

Επέκταση

Ο διδάσκων έχει τη ευχέρεια να επεκτείνει την δραστηριότητα ζητώντας από τους μαθητές να δημιουργήσουν το ίχνος του σημείου M και να μελετήσουν τον γεωμετρικό του τόπο καθώς μεταβάλλεται το n . Εδώ είναι ευκαιρία να τονιστεί ότι η καμπύλη στην οποία φαίνεται να ανήκουν τα ίχνη είναι ίσως η γραφική παράσταση μιας νέας συνάρτησης. Με τον τρόπο δημιουργείται μία γέφυρα μεταξύ της γεωμετρικής προόδου και της εκθετικής συνάρτησης.

1.4 ΕΚΘΕΤΙΚΗ-ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

1.4.1 Σύντομη περιγραφή των σεναρίων

Οι δραστηριότητες του σεναρίου της εκθετικής και λογαριθμικής συνάρτησης αρθρώνονται γύρω από τις δυνατότητες που μας παρέχει το λογισμικό να οπτικοποιήσουμε και να διερευνήσουμε με δυναμικό τρόπο αλγεβρικές σχέσεις.

Οι έξι δραστηριότητες οδηγούν σταδιακά τον μαθητή από την γεωμετρική πρόοδο στην λογαριθμική συνάρτηση και κλιμακώνονται σε επίπεδα δυσκολίας.

Η πρώτη δραστηριότητα έχει στόχο να αποτελέσει μία εισαγωγή στην εκθετική συνάρτηση μέσω μίας πύκνωσης των όρων της διακριτής γεωμετρικής προόδου.

Η δραστηριότητα ξεκινά με την κατασκευή τμημάτων μήκους $MN=a^v$. Όταν το v παίρνει ακέραιες τιμές τότε έχουμε μία ΓΠ με $\lambda=a$. όταν το v παίρνει τιμές ανά 0,5 τότε προκύπτει άλλη γεωμετρική πρόοδος

Στην δεύτερη δραστηριότητα οι μαθητές θα μελετήσουν τον τρόπο που μεταβάλλεται η μορφή της γραφικής παράστασης της εκθετικής συνάρτησης $f(x)=a^x$ καθώς μεταβάλλεται το a .

Επιπλέον θα μελετήσουν τις γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων που προκύπτουν από την βασική εκθετική $f(x)=a^x$ όταν μεταβάλουμε το πρόσημο του x ή της ίδιας της συνάρτησης. Δηλαδή θα μελετήσουν τις συναρτήσεις $g(x)=a^{-x}$ και $h(x)=-a^x$.

Τέλος θα λύσουν γραφικά εκθετικές εξισώσεις οι οποίες δεν θα μπορούσαν να λυθούν με αλγεβρική διαδικασία.

Στην τρίτη δραστηριότητα οι μαθητές θα γνωρίσουν την έννοια του λογάριθμου μέσω της ανάγκης να λύσουν, πάντα μέσω γραφικής παράστασης, εξισώσεις της μορφής $2^x=10$. Ακόμη θα γνωρίσουν βασικές ιδιότητες των λογαρίθμων.

Στην τέταρτη δραστηριότητα οι μαθητές θα μελετήσουν την σχέση της λογαριθμικής συνάρτησης με την εκθετική. Ακόμη θα μελετήσουν την μονοτονία της λογαριθμικής συνάρτησης και θα την συνδέσουν με τις τιμές του a .

Στην πέμπτη δραστηριότητα οι μαθητές θα μελετήσουν την γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\log_a(x)$ για τις διάφορες τιμές της βάσης a . Επειδή το λογισμικό κατασκευάζει μόνο την συνάρτηση $\ln x$ (πληκτρολόγηση $\log x$) θα πρέπει να γίνει χρήση του τύπου της αλλαγής βάσης ώστε η $f(x)=\log_a(x)$ να μετασχηματιστεί σε

$f(x)=\frac{\ln x}{\ln a}$ Όταν οι μαθητές μελετήσουν τις βασικές ιδιότητες της λογαριθμικής συνάρτησης τότε θα μπορούσαν να επιχειρήσουν μία γραφική απόδειξη της σχέσης $\log(\alpha\beta)=\log\alpha+\log\beta$.

1.4.2 Στόχοι

Οι μαθητές μέσα από τις δραστηριότητες του σεναρίου:

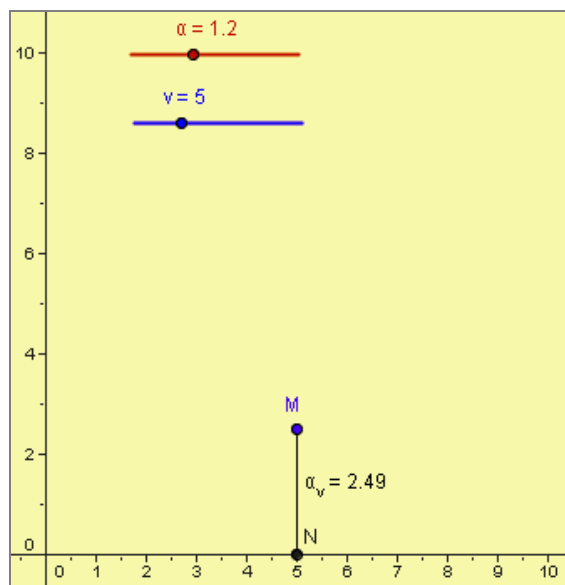
- Θα χρησιμοποιήσουν το λογισμικό μέσα στα πλαίσια των σχολικών τους υποχρεώσεων αλλά και ως εργαλείο επέκτασης και διερεύνησης.
- Θα εμπλακούν σε δραστηριότητες απόδειξης πιθανών σχέσεων που υποδεικνύει η συμπεριφορά των δυναμικών γεωμετρικών αντικειμένων στην οθόνη.

- Θα κατασκευάσουν την εκθετική συνάρτηση μέσα από συνεχείς ρητές προσεγγίσεις.
- Θα λύσουν γραφικά μη συμβατικές εξισώσεις, δηλαδή εξισώσεις που δεν λύνονται με μολύβι και χαρτί.
- Θα μελετήσουν τις συναρτησιακές ιδιότητες της εκθετικής συνάρτησης.
- Θα κατασκευάσουν την λογαριθμική συνάρτηση από την εκθετική μέσα από διαδικασίες ανάκλασης ως προς την ευθεία $\psi=\chi$.
- Θα μελετήσουν ιδιότητες των λογαρίθμων.

1.4.3 ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΤΗΣ ΕΚΘΕΤΙΚΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Φύλλο εργασίας

Στην οθόνη εμφανίζονται δύο μεταβολείς α , ν . Οι μεταβολείς μεταβάλλουν την θέση και το ύψος του τμήματος NM, το οποίο στην οθόνη εμφανίζεται και ως α_ν .



Να μεταβάλλετε το τμήμα αλλάζοντας τις τιμές του ν .

ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ ΓΙΑ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ

- 1) Να αποδείξετε ότι οι τιμές του α_ν δημιουργούν γεωμετρική πρόοδο. Ποια είναι τα στοιχεία της προόδου και πως σχετίζονται με τους μεταβολείς;
- 2) Να δημιουργήσετε το ίχνος του σημείου M. Να μεταβάλλετε τις τιμές του ν . Με ποιον τρόπο διατάσσονται τα ίχνη του σημείου M;
- 3) Να αλλάξετε το βήμα στον μεταβολέα ν από 1 σε 0.5. Να μεταβάλλετε τις τιμές του ν . Να αποδείξετε ότι και πάλι οι τιμές του α_ν αποτελούν όρους γεωμετρικής προόδου.
- 4) Τι παρατηρείτε για τα ίχνη του σημείου M. Τι σχέση έχουν τα νέα ίχνη με τα προηγούμενα;
- 5) Να πειραματιστείτε αλλάζοντας το βήμα του μεταβολέα ν αλλά και τις τιμές του α . Τι θα συμβεί με τα ίχνη του σημείου M όταν το βήμα είναι πολύ μικρό π.χ 0,01;
- 6) Ποια συνάρτηση θα μπορούσε να έχει μία γραφική παράσταση που να περιέχει όλα τα ίχνη του σημείου M, για οποιαδήποτε τιμή του βήματος;
- 7) Να επαναπροσδιορίσετε την συνάρτηση που βρίσκεται στα ελεύθερα αντικείμενα ώστε να κατασκευάσετε την γραφική παράσταση της συνάρτησης που έχετε εντοπίσει στο προηγούμενο ερώτημα. Τι παρατηρείτε;

Οδηγίες για την υλοποίηση της δραστηριότητας

Προετοιμασία

Η διάρκεια της δραστηριότητας είναι μία διδακτική ώρα και μπορεί να υλοποιηθεί για την υποστήριξη της διδασκαλίας της εκθετικής συνάρτησης. Οι μαθητές θα πρέπει να γνωρίζουν τον ορισμό της γεωμετρικής προόδου και τον τύπο εύρεσης του νιοστού της όρου ως συνάρτηση της τάξης n του όρου και του λόγου λ .

Επιπλέον θα πρέπει να γνωρίζουν την δημιουργία ίχνους σε ένα σημείο και την αλλαγή του βήματος στον μεταβολέα από το menu των ιδιοτήτων του.

Τέλος θα πρέπει να γνωρίζουν τον τρόπο επαναπροσδιορισμού μίας συνάρτησης.

Η υλοποίηση

Στην αρχή της δραστηριότητας οι μαθητές θα εντοπίσουν τα στοιχεία της γεωμετρικής προόδου καταγράφοντας τις τιμές του τμήματος a_n .

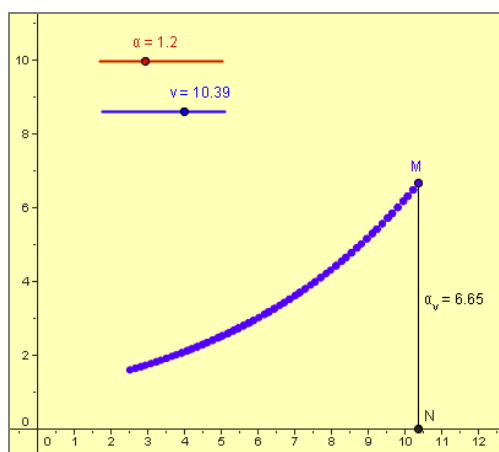
Θα παρατηρήσουν ότι η τιμή του μεταβολέα a προσδιορίζει τον όρο a_1 .

Στην συνέχεια θα δημιουργήσουν το ίχνος του σημείου M και θα σύρουν τον μεταβολέα του n . Θα εμφανιστούν τα ίχνη του σημείου M τα οποία θα είναι διατεταγμένα σε μία καμπύλη. Αυτό θα σχολιαστεί ως χαρακτηριστικό των μεταβολών που δεν δημιουργούν αριθμητική πρόοδο.

Από την τρίτη ερώτηση αρχίζει μία διαδικασία πύκνωσης των σημείων που δημιουργούν τα ίχνη του M . Η νέα πρόοδος έχει τον ίδιο πρώτο όρο αλλά τώρα ο λόγος λ είναι η τετραγωνική ρίζα του προηγούμενου λόγου.

Εδώ οι μαθητές θα παρατηρήσουν ότι και τα νέα σημεία διατάσσονται 'κανονικά' σε σχέση με τα προηγούμενα σημεία.

Καθώς οι μαθητές αλλάζουν τις τιμές του a αλλάζει και η πρόοδος, ενώ πυκνώνουν τα ίχνη του σημείου M σε σημείο που να δημιουργείται η εντύπωση συνεχόμενης καμπύλης για πού μικρές τιμές του βήματος της μεταβλητής n .



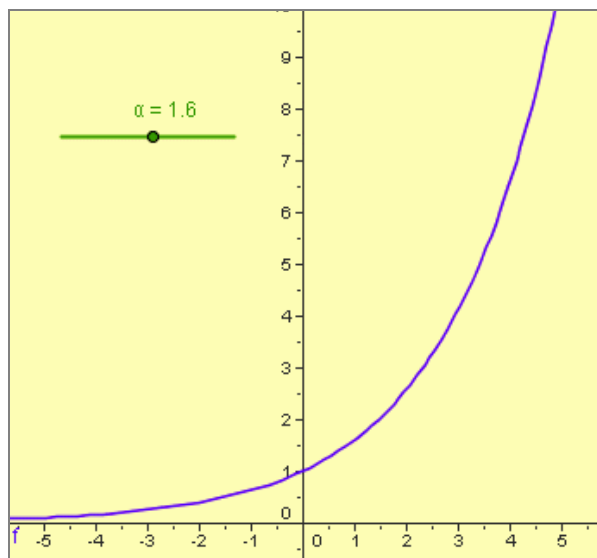
Η συνάρτηση που θα μπορούσε να ενώσει σε μία συνεχή καμπύλη όλα τα ίχνη είναι η $f(x)=a^x$. Οι μαθητές θα κατασκευάσουν την γραφική της παράσταση, επαναπροσδιορίζοντας την ήδη υπάρχουσα συνάρτηση, και θα διαπιστώσουν ότι πράγματι η συνάρτηση αυτή αποτελεί μία 'οριακή' περίπτωση γεωμετρικής προόδου όταν το βήμα του μεταβολέα n έχει όριο το 0.

1.4.4 ΜΕΛΕΤΗ ΤΗΣ ΕΚΘΕΤΙΚΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Φύλλο εργασίας

Στην οθόνη προβάλλεται ένας μεταβολέας α και οι εξισώσεις δύο συναρτήσεων f, g στο παράθυρο των αντικειμένων.

Να εμφανίσετε την γραφική παράσταση της συνάρτησης f .



ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ ΓΙΑ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ

- 1) Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης.
- 2) Να μεταβάλλετε τις τιμές του α . Να χαρακτηρίσετε την μονοτονία της συνάρτησης ανάλογα με τις τιμές του α . Πότε η συνάρτηση είναι αύξουσα και πότε φθίνουσα;
- 3) Να κατασκευάσετε την γραφική παράσταση της συνάρτησης $h(x) = -\alpha^x$. Να μελετήσετε τα χαρακτηριστικά της συνάρτησης καθώς μεταβάλλεται το α .
- 4) Να λύσετε την εξίσωση $(1,7)^x = x+2$ να δώσετε τις λύσεις με προσέγγιση εκατοστού.

Οδηγίες για την υλοποίηση της δραστηριότητας

Προετοιμασία

Η διάρκεια της δραστηριότητας είναι μία διδακτική ώρα και μπορεί να υλοποιηθεί ως εφαρμογή στην παράγραφο που αναφέρεται στις ιδιότητες της εκθετικής συνάρτησης.

Οι μαθητές θα πρέπει να γνωρίζουν την διαδικασία επανακαθορισμού μίας συνάρτησης.

Ακόμη θα πρέπει να γνωρίζουν τον τρόπο εισαγωγής μίας συνάρτησης στην περιοχή εισόδου εντολών.

Όσον αφορά στα μαθηματικά, θα πρέπει να έχουν ήδη κατανοήσει τον ορισμό της γνησίως αύξουσας και φθίνουσας συνάρτησης καθώς και την έννοια του 1-1.

Προφανώς ο διδάσκων θα μπορούσε να προγραμματίσει την διδασκαλία των δύο αυτών εννοιών μέσα από την συγκεκριμένη δραστηριότητα.

Τέλος οι μαθητές θα πρέπει να γνωρίζουν τον τρόπο λύσης μιας απλής εκθετικής εξίσωσης.

Η υλοποίηση

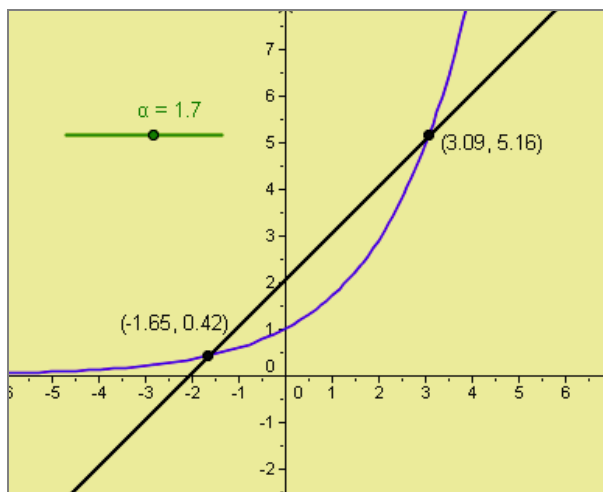
Οι μαθητές αρχικά θα εντοπίσουν τον τύπο της συνάρτησης μέσα από την δυνατότητα που δίνει το λογισμικό για να επανακαθορίσουν τον τύπο της συνάρτησης. Εδώ υπάρχει και ένας περισσότερο δημιουργικός τρόπος. Οι μαθητές μπορεί να δημιουργήσουν ένα σημείο πάνω στην γραφική παράσταση, να εμφανίσουν τις συντεταγμένες του και να καταγράψουν μερικά ζεύγη από αυτές καθώς μετακινούν το σημείο. Επιλέγοντας ως τετμημένη ακέραιους αριθμούς, και με δεδομένο ότι η γραφική παράσταση περνά από το $(0, 0)$, οι μαθητές θα εντοπίσουν ότι πρόκειται για την $f(x)=(1,6)^x$.

Στην συνέχεια θα συμπεράνουν για την μονοτονία της εκθετικής αναλόγως της σχέσης της τιμής του a με τον αριθμό 1.

Στο ίδιο σύστημα αξόνων, δηλαδή στο ίδιο αρχείο, θα μελετήσουν τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $g(x)=a^{-x}$ και $h(x)=-a^x$ και θα σχολιάσουν την μορφή τους καθώς και την μονοτονία των συναρτήσεων.

Η λύση της εξίσωσης θα οδηγήσει τους μαθητές σε διαπραγμάτευση σχετικά με τον τρόπο που οι δυνατότητες του λογισμικού θα επιτρέψουν της άμεση λύση οποιασδήποτε εκθετικής εξίσωσης με προσέγγιση.

Κατ' αρχήν θα αναγνωρίσουν ότι η λύση είναι ανέφικτη με τον κλασσικό τρόπο που διδάσκονται στην σχολική τάξη. Στην συνέχεια θα αναγνωρίσουν την σημασία των σημείων τομής των γραφικών παραστάσεων $f(x)=(1,7)^x$ και $g(x)=x+2$. Οι τετμημένες των σημείων τομής αποτελούν προσεγγίσεις των λύσεων της εξίσωσης $(1,7)^x=x+2$.



Επέκταση: Εδώ ο διδάσκων θα μπορούσε να ζητήσει από τους μαθητές να δημιουργήσουν στο τετράδιό τους σύνθετες εξισώσεις, δικής τους επινοήσης, και να τις λύσουν με την βοήθεια του λογισμικού.

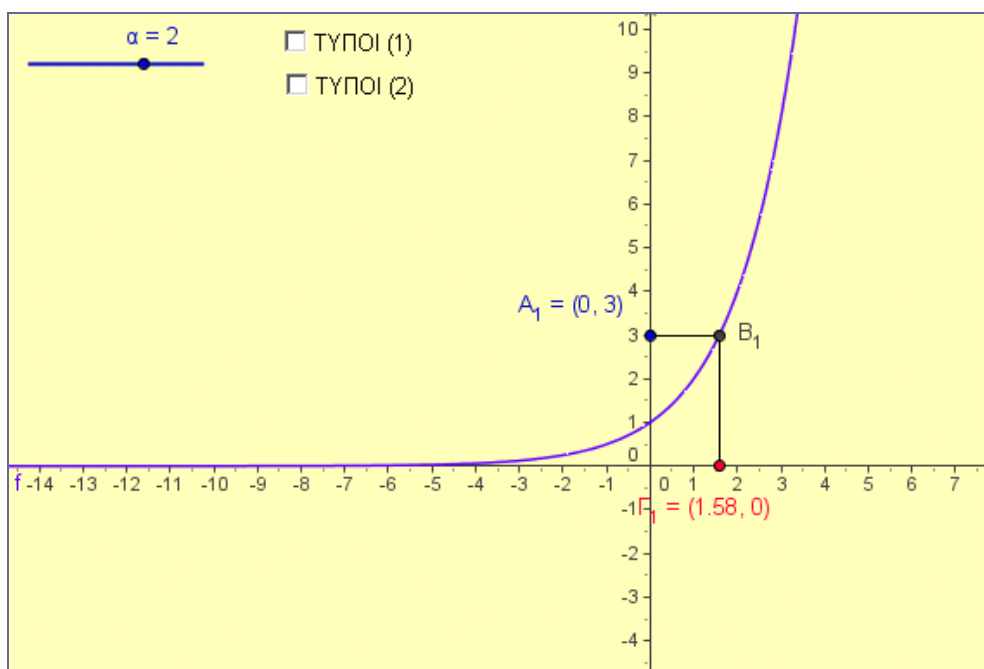
1.4.5 ΛΟΓΑΡΙΘΜΟΣ ΘΕΤΙΚΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ

Φύλλο εργασίας

Στην οθόνη εμφανίζεται ένας μεταβολέας a και η γραφική παράσταση της εκθετικής συνάρτησης με βάση το a .

Πάνω στην γραφική παράσταση της εκθετικής συνάρτησης υπάρχει το σημείο B_1 του οποίου η θέση μπορεί να μεταβάλλεται αν σύρουμε το σημείο A_1 , δηλαδή όταν στην ουσία αλλάζουμε την τεταγμένη του B_1 . Επιπλέον μπορούμε να παρατηρούμε την τετμημένη του B_1 .

Τέλος υπάρχουν δύο κουμπιά με τα οποία μπορούμε να αποκρύπτουμε ή να εμφανίζουμε διάφορες ιδιότητες.



ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ ΓΙΑ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ

Φανταστείτε ότι θέλουμε να λύσουμε μία εξίσωση της μορφής $2^x = 10$. Εδώ χρειαζόμαστε από τη μία κάποια εργαλεία υπολογισμών και από την άλλη νέες μαθηματικές έννοιες. Αυτά ακριβώς τα εργαλεία και τις έννοιες θα μελετήσουμε με την συγκεκριμένη δραστηριότητα.

- 1) Να κινήσετε το σημείο A_1 πάνω στον άξονα $\psi\psi$ μέχρι το σημείο με τεταγμένη 10. Ποια είναι η λύση της εξίσωσης $2^x = 10$; Να λύσετε τις εξισώσεις $2, 7^x = 10$ και $3^x = 0,5$
- 2) Με το κουμπί ΤΥΠΟΙ (1) να εμφανίσετε τις δύο ιδιότητες. Να σύρετε το σημείο A_1 πάνω στον άξονα $\psi\psi$. Να παρατηρήσετε την τετμημένη του σημείου B_1 . Αν την τετμημένη αυτή την ονομάσουμε λογάριθμο της

τεταγμένης του B_1 με βάση τον αριθμό a , να υπολογίσετε τους λογάριθμους $\log_2 10$, $\log_2 1$, $\log_2 0,5$.

- 3) Να διερευνήσετε με την βοήθεια του σημείου A_1 πότε ο λογάριθμος ενός αριθμού με βάση το a είναι θετικός, πότε 0, και πότε αρνητικός.
- 4) Με το κουμπί ΤΥΠΟΙ (2) να εμφανίσετε δύο επιπλέον σημεία τα A_2 και A_3 μαζί με τα αντίστοιχα σημεία πάνω στην γραφική παράσταση και τον άξονα x' . Θέλουμε τώρα να εξετάσουμε τις ιδιότητες αυτής της νέας έννοιας του λογάριθμου. Να υπολογίσετε με την βοήθεια των σημείων A_1 , A_2 και A_3 τους λογάριθμους των αριθμών 3, 5 και 15 αντίστοιχα. Τι παρατηρείτε; Να επαναλάβετε για τους αριθμούς 4, 5 και 20. Να διατυπώσετε έναν κανόνα που φαίνεται να ισχύει για τον λογάριθμο του γινομένου δύο αριθμών.

Οδηγίες για την υλοποίηση της δραστηριότητας

Προετοιμασία

Η διάρκεια της δραστηριότητας είναι μία διδακτική ώρα και μπορεί να υλοποιηθεί για την υποστήριξη της διδασκαλίας που αναφέρεται στην εισαγωγή της έννοιας του λογαρίθμου. Οι μαθητές θα πρέπει να γνωρίζουν την γραφική παράσταση της εκθετικής συνάρτησης καθώς και την έννοια της εκθετικής εξίσωσης.

Οι παραπάνω γνώσεις είναι αρκετές και δεν απαιτούνται ιδιαίτερες δεξιότητες σε σχέση με το λογισμικό.

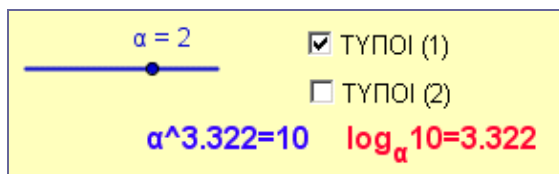
Η υλοποίηση

Στην αρχή της δραστηριότητας οι μαθητές θα αναγνωρίσουν ότι η εξίσωση $2^x=10$ δεν είναι αδύνατη. Το σημαντικό είναι να προκληθεί συζήτηση για το γεγονός ότι μόνο μικρό μέρος των εκθετικών εξισώσεων μπορούν να επιλυθούν χωρίς εργαλεία υπολογισμού. Στην συνέχεια θα πρέπει να αναγνωρίσουν ότι η γραφικής παράσταση που παρουσιάζεται στην οθόνη ανήκει στη συνάρτηση $f(x)=2^x$.

Στο πρώτο ερώτημα οι μαθητές θα σύρουν το σημείο A μέχρι τον αριθμό 10 και θα παρατηρήσουν ότι η τετμημένη του σημείου B_1 είναι περίπου 3,32 και αυτή είναι και η λύση της αρχικής εξίσωσης.

Με τον ίδιο τόπο θα επιλύσουν και τις υπόλοιπες εξισώσεις του πρώτου ερωτήματος.

Στην δεύτερη ερώτηση οι μαθητές θα έχουν στην διάθεσή τους δύο επιπλέον δυναμικές αναπαραστάσεις των εννοιών που θα συνδεθούν δηλαδή της εκθετικής μορφής και του λογάριθμου.

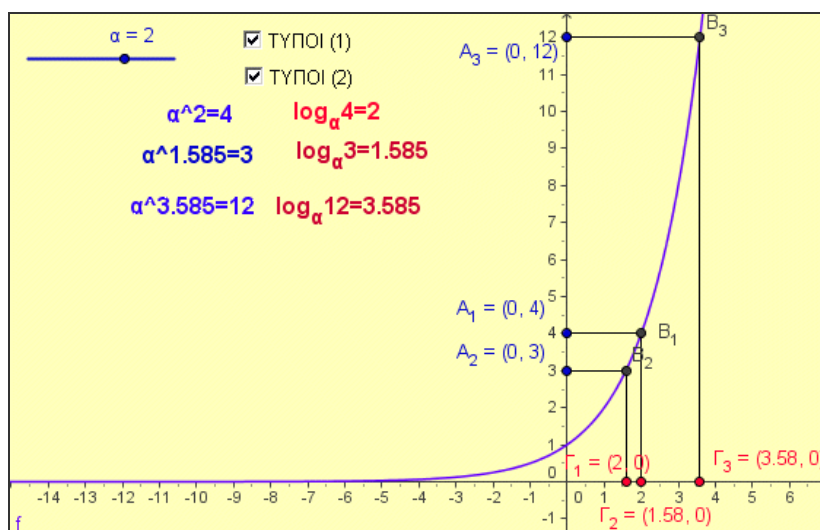


Εδώ είναι χρήσιμο να συζητηθεί η αντίστροφη σχέση του 3,32, δηλαδή του λογάριθμου και της εκθετικής μορφής του αριθμού 10 σε συνδυασμό με το γεγονός ότι οι δύο αυτοί αριθμοί ανήκουν σε διαφορετικούς άξονες στην καρτεσιανή αναπαράσταση του σημείου B_1 .

Στην τρίτη ερώτηση οι μαθητές θα αναζητήσουν τον αριθμό του οποίου ο λογάριθμος είναι 0 και κυρίως θα διαπιστώσουν ότι ο λογάριθμος μπορεί να πάρει και αρνητικές τιμές.

Το τέταρτο ερώτημα έχει στόχο να διαπιστώσουν οι μαθητές ότι ο λογάριθμος του γινομένου ισούται με το άθροισμα των λογαρίθμων. Αυτό θα προκύψει επαγωγικά καθώς οι μαθητές θα πειραματιστούν με αρκετούς λογάριθμους γινομένων.

Στην αρχή καλό θα είναι να επιλεγούν αριθμοί των οποίων το γινόμενο δεν είναι ιδιαίτερα μεγάλο με στόχο να βρίσκεται σε σημείο του άξονα x ευδιάκριτο.

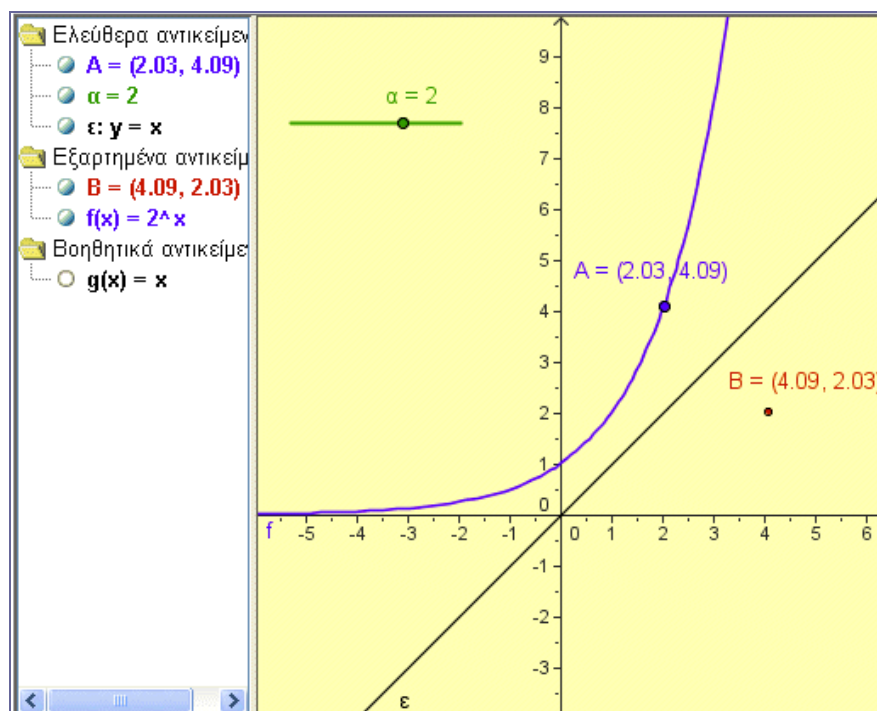


Για παράδειγμα η επιλογή του γινομένου $3 \cdot 4 = 12$ επιβεβαιώνει πολλαπλώς ότι το γινόμενο $3 \cdot 4$ έχει λογάριθμο το άθροισμα των λογαρίθμων των δύο αριθμών. Ο διδάσκων θα μπορούσε να προτείνει στους μαθητές να συζητήσουν και να διερευνήσουν τον λογάριθμο του πηλίκου δύο αριθμών καθώς και τον λογάριθμο της δύναμης ενός αριθμού.

1.4.6 ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΤΗΣ ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Φύλλο εργασίας

Στην οθόνη εμφανίζεται ένας μεταβολέας α , η γραφική παράσταση της εκθετικής συνάρτησης με βάση το α και η ευθεία $y=x$. Πάνω στην γραφική παράσταση της εκθετικής συνάρτησης υπάρχει το σημείο A ενώ συγχρόνως εμφανίζεται και το σημείο B.



ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ ΓΙΑ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ

- 1) Να κινήσετε το σημείο A πάνω στην γραφική παράσταση της συνάρτησης. Ποια είναι η γεωμετρική σχέση του σημείου B ως προς το σημείο A;
- 2) Ποια είναι η σχέση των συντεταγμένων των δύο σημείων;
- 3) Να δημιουργήσετε το ίχνος του σημείου B. Η συνάρτηση που έχει γραφική παράσταση την καμπύλη που δημιουργήσαν τα ίχνη θα ονομάζεται αντίστροφη της εκθετικής. Να παρατηρήσετε ότι η συνάρτησης αυτή αντιστοιχεί σε κάθε αριθμό x τον εκθέτη της δύναμης, με βάση τον αριθμό a , η οποία δύναμη είναι ίση με x , δηλαδή τον λογάριθμο του x με βάση το a . Η συνάρτηση αυτή είναι φυσικό να ονομάζεται λογαριθμική. Να κατασκευάσετε την γραφική παράσταση της συνάρτησης αυτής για τις διάφορες τιμές του a , επαναπροσδιορίζοντας την βοηθητική συνάρτηση $g(x)$.
- 4) Να μελετήσετε την μονοτονία της συνάρτησης για τις διάφορες τιμές του a .

Οδηγίες για την υλοποίηση της δραστηριότητας

Προετοιμασία

Η διάρκεια της δραστηριότητας είναι μία διδακτική ώρα και μπορεί να υλοποιηθεί ως εισαγωγή στην παράγραφο που αφορά στην λογαριθμική συνάρτηση.

Οι μαθητές θα πρέπει να γνωρίζουν την δημιουργία ίχνους, και τον επαναπροσδιορισμό του τύπου μιας συνάρτησης .

Όσον αφορά στα μαθηματικά θα πρέπει να γνωρίζουν τον ορισμό και την έννοια του λογαρίθμου και την ιδιότητα αλλαγής βάσης δηλαδή $\log_a x = \frac{\log x}{\log a}$.

Η υλοποίηση

Οι μαθητές θα κινήσουν το σημείο A πάνω στην γραφική παράσταση και θα παρατηρήσουν την συμπεριφορά του σημείου B. Η κίνηση αυτή αναμένεται να οδηγήσει στην εικασία ότι το B είναι το συμμετρικό του A ως προς την ευθεία $y=x$.

Στο σημείο αυτό ο διδάσκων μπορεί να ζητήσει από τους μαθητές να βεβαιωθούν ότι πράγματι υπάρχει συμμετρία. Η διαπίστωση μπορεί να γίνει με βάση τις συντεταγμένες των δύο σημείων αλλά και με δεξί κλικ πάνω στο σημείο όπου σαφώς αναφέρεται ότι πρόκειται για το συμμετρικό του A.

Στην τρίτη ερώτηση οι μαθητές θα δημιουργήσουν το ίχνος του σημείου B οπότε σύροντας το A θα δημιουργηθεί η καμπύλη της λογαριθμικής συνάρτησης.

Εδώ ο διδάσκων θα πρέπει να διαπραγματευτεί τόσο την σχέση των συντεταγμένων των δύο σημείων όσο και την κατάλληλη ονομασία της νέας συνάρτησης.

Όσον αφορά στην κατασκευή της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $g(x)=\log_a(x)$

Ο διδάσκων θα πληροφορήσει τους μαθητές ότι το λογισμικό κατασκευάζει γραφικές παραστάσεις λογαριθμικών συναρτήσεων μόνο με συγκεκριμένη βάση την $\log(x)$.

Αυτό αναμένεται να οδηγήσει τους μαθητές να εισάγουν έμμεσα την $g(x)=\log_a(x)$

μέσω του τύπου $g(x)=\frac{\log x}{\log a}$ χρησιμοποιώντας την βοηθητική συνάρτηση $g(x)$ και

επαναπροσδιορίζοντάς την.

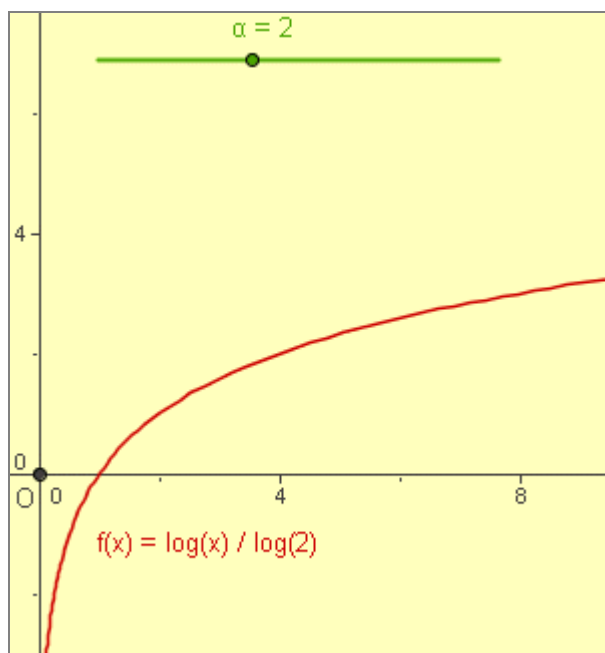
Όσον αφορά στην μονοτονία της νέας συνάρτησης οι μαθητές αναμένεται να παρατηρήσουν ότι ακολουθεί την μονοτονία της αντίστοιχης εκθετικής. Αυτό θα γίνει εφικτό πειραματιζόμενοι με τις τιμές της βάσεις a .

1.4.7 ΜΕΛΕΤΗ ΤΗΣ ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Φύλλο εργασίας

Στην οθόνη εμφανίζονται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης και ένας μεταβολέας

Ο τύπος της συνάρτησης προβάλλεται στην οθόνη.



ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ ΓΙΑ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ

- 1) Να γράψετε τον τύπο της συνάρτησης κάνοντας χρήση ενός μόνο λογαρίθμου.
- 2) Να μεταβάλετε την τιμή του α . Πότε η συνάρτηση είναι αύξουσα και πότε φθίνουσα. Ποια είναι η σχέση της γραφικής παράστασης με τον άξονα $\psi\psi$;
- 3) Να εμφανίσετε την γραφική παράσταση της βοηθητικής συνάρτησης $g(x)$ και τα σημεία A, B. Να λύσετε την εξίσωση $\log_2 x = 2x - 3$ και στην συνέχεια την ανίσωση $\log_2 x > 2x - 3$.
- 4) Να αποκρύψετε την $g(x)$ και τα σημεία τομής της A, B με την αρχική καμπύλη. Να εξετάσετε αν υπάρχουν αριθμοί των οποίων ο λογάριθμος συμπίπτει με τον ίδιο τον αριθμό.

Οδηγίες για την υλοποίηση της δραστηριότητας

Προετοιμασία

Η διάρκεια της δραστηριότητας είναι μία ή δύο διδακτικές ώρες και μπορεί να υλοποιηθεί κατά την διδασκαλία της μελέτης των ιδιοτήτων της λογαριθμικής συνάρτησης και των αντίστοιχων εξισώσεων.

Οι μαθητές θα πρέπει να γνωρίζουν επαναπροσδιορισμό μιας συνάρτησης.

Όσον αφορά στα μαθηματικά θα πρέπει να γνωρίζουν τον ορισμό και την έννοια του λογαρίθμου και την ιδιότητα αλλαγής βάσης, δηλαδή $\log_a x = \frac{\log x}{\log a}$, καθώς και τον ορισμό της γνησίως αύξουσας και φθίνουσας συνάρτησης.

Ακόμη θα πρέπει να γνωρίζουν την γεωμετρική λύση μιας εξίσωσης και μιας ανίσωσης.

Η υλοποίηση

Όταν οι μαθητές ανοίξουν το αρχείο exp_4 θα αναγνωρίσουν την γραφική παράσταση μιας λογαριθμικής συνάρτησης. Στην συνέχεια θα σημειώσουν στο τετράδιό τους τον τύπο της συνάρτησης αυτής δηλαδή $f(x) = \log_2 x$.

Ο στόχος τα δεύτερης ερώτησης είναι να συνδέσουν οι μαθητές την μονοτονία της λογαριθμικής συνάρτησης με τις τιμές της βάσης a . Εδώ θα ήταν χρήσιμο να ζητήσει ο διδάσκων από τους μαθητές να ανακαλέσουν την μονοτονία της εκθετικής συνάρτησης και να συμπεράνουν ότι τόσο η εκθετική όσο και η λογαριθμική συνάρτηση έχουν παρόμοιους κανόνες μονοτονίας.

Σε κάθε περίπτωση οι μαθητές θα αναγνωρίσουν ότι ο άξονας $y'y$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη.

Όταν οι μαθητές εμφανίσουν την γραφική παράσταση της $g(x) = 2x - 3$ και τα σημεία A , B θα παρατηρήσουν ότι δημιουργούνται δύο σημεία τομής.

Εδώ θα ήταν χρήσιμο να συζητηθεί με τους μαθητές το γεγονός ότι η λύση της συγκεκριμένης εξίσωσης είναι ανέφικτη με τον τρόπο που προβλέπεται από την ύλη του βιβλίου.

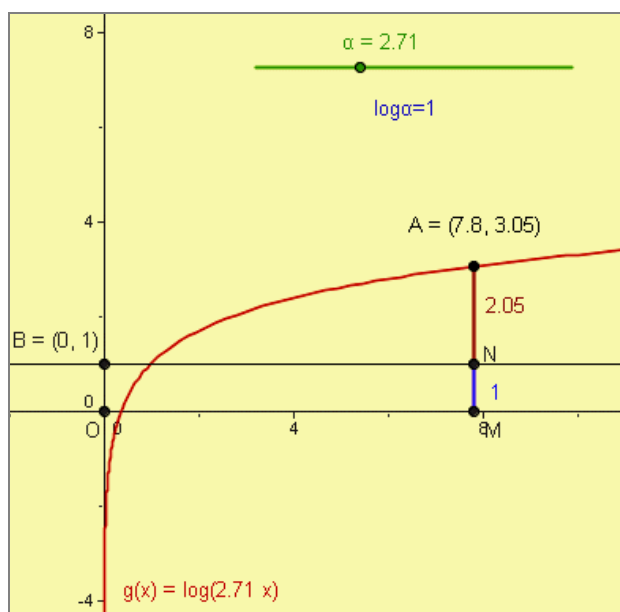
Η τελευταία ερώτηση έχει στόχο να προκαλέσει μία διερεύνηση και συζήτηση για το τι σημαίνει 'ένας αριθμός συμπίπτει με τον λογάριθμό του'. Κατ αρχήν θα πρέπει να μεταφράσουν την συγκεκριμένη έκφραση μέσα στο πλαίσιο των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων. Συγκεκριμένα θα εμφανίσουν την συνάρτηση $h(x) = x$ και θα μεταβάλλουν τις τιμές του a μέχρις ότου η λογαριθμική καμπύλη να συναντήσει την ευθεία. Τα σημεία Γ , Δ είναι τα σημεία τομής. Εδώ οι μαθητές θα διερευνήσουν ουσιαστικά για ποιες τιμές της βάσης a συμπίπτει ο αριθμός με τον λογάριθμό του.

1.4.8 ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΛΟΓΑΡΙΘΜΩΝ

Φύλλο εργασίας

Στην οθόνη εμφανίζονται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης και ένας μεταβολέας. Ακόμη εμφανίζεται η τιμή του λογαρίθμου της παραμέτρου a . Ένα σημείο A κινείται πάνω στην γραφική παράσταση και συγχρόνως κινείται και το κάθετο τμήμα από το A προς τον άξονα x .

Τέλος υπάρχει μία ευθεία παράλληλη προς τον x η οποία περνά από το σημείο B που βρίσκεται πάνω στον άξονα y .



- 1) Να μεταβάλετε τις τιμές της μεταβλητής a και να παρατηρήσετε την συμπεριφορά της γραφικής παράστασης και των τιμών των διαφόρων τμημάτων.
- 2) Ποιος είναι ο γενικός τύπος της συνάρτησης g ; Ποια είναι η εξίσωση της ευθείας που περνά από το σημείο B ;
- 3) Με την βοήθεια του μεταβολέα να δημιουργήσετε την γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x)=\log x$. Να αυξήσετε σταδιακά τις τιμές του a . Πως μεταβάλλονται οι συντεταγμένες του σημείου A ;
- 4) Κατά πόσο αυξάνεται η τεταγμένη του A όταν το a πάρει την τιμή 1,6 κατά πόσο όταν πάρει την τιμή 2 και κατά πόσο όταν πάρει την τιμή 2,71;
- 5) Ποια γνωστή ιδιότητα των λογαρίθμων υλοποιείται με την κατασκευή αυτή;
- 6) Πως θα μπορούσαμε να υλοποιήσουμε και άλλες ιδιότητες;

Οδηγίες για την υλοποίηση της δραστηριότητας

Προετοιμασία

Η διάρκεια της δραστηριότητας είναι μία ή δύο διδακτικές ώρες και μπορεί να υλοποιηθεί ως εφαρμογή στο τέλος του κεφαλαίου των λογαρίθμων.

Οι μαθητές θα πρέπει να γνωρίζουν την προσεγγιστική τιμή του αριθμού $e=2,71$ καθώς και την έννοια του φυσικού λογάριθμου. Θα πρέπει να έχουν πληροφορηθεί ότι το λογισμικό υπολογίζει απ ευθείας μόνο τον φυσικό λογάριθμο. Ακόμα είναι απαραίτητη η γνώση του τύπου αλλαγής βάσης.

Εδώ θα πρέπει να σημειωθεί ότι ο στόχος της δραστηριότητας είναι η οπτικοποίηση των ιδιοτήτων του λογάριθμου. Εφόσον οι ιδιότητες προσεγγίζονται μέσω των συναρτήσεων είναι προφανές ότι οι μαθητές έχουν ήδη διδαχτεί την απόδειξή τους με αλγεβρικό τρόπο.

Η υλοποίηση

Στην πρώτη ερώτηση οι μαθητές θα πρέπει καταρχήν να εντοπίσουν ότι η τεταγμένη του σημείου A αποτελείται από δύο τμήματα, ένα σταθερό AN και ένα μεταβαλλόμενο NM .

Το NM είναι στην ουσία ο λογάριθμος του a επομένως η ευθεία που περνά από το B είναι η $y=\log a$.

Όταν ολοκληρωθούν οι παραπάνω διαπιστώσεις οι μαθητές θα πρέπει να ορίσουν στον μεταβολέα την τιμή $a=1$ και τότε θα γίνει φανερό ότι το σταθερό τμήμα AN είναι ο λογάριθμος της τετμημένης του A δηλαδή $AN=\log x$.

Η τέταρτη ερώτηση θα απαντηθεί με την προϋπόθεση ότι αρχικά $a=1$. Εδώ οι μαθητές θα παρατηρήσουν ότι η αύξηση της τεταγμένης του A είναι ίση πάντα με τον λογάριθμο του a για κάθε τιμή του a . Καλό θα είναι τώρα να εκφράσουν τα μήκη των τμημάτων μέσω των λογαρίθμων. Συγκεκριμένα θα πρέπει να οδηγηθούν σε μία σχέση της μορφής $AM=AN+NM$ η οποία μετασχηματίζεται σε $\log(a \cdot x)=\log x+\log a$.

Τέλος όσον αφορά την απόδειξη της σχέσης που αφορά στον λογάριθμο πηλίκου, ο διδάσκων θα καλέσει τους μαθητές να χρησιμοποιήσουν για την παράμετρο a τιμές μικρότερες του 1. Για παράδειγμα για $a=2$ και για $x=7$ θα προκύψει ότι $AM=1,95+0,69$. Αν τώρα το a πάρει την τιμή $1/2$ δηλαδή $0,5$ τότε $AM=1,95-0,69$. Αυτό σημαίνει ότι $\log(x/2)=\log x-\log 2$.

2 ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

2.1 ΜΕΤΡΙΚΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ (ΠΥΘΑΓΟΡΕΙΟ ΘΕΩΡΗΜΑ)

2.1.1 Σύντομη περιγραφή των σεναρίων

Το Πυθαγόρειο θεώρημα και το θεώρημα του Θαλή αποτελούν τα δύο θεωρήματα με τα οποία δομείται ο Ευκλείδειος χώρος. Το Πυθαγόρειο θεώρημα όμως κατέχει ένα απλυσίαστο ρεκόρ, διαθέτει περί τις 400 διαφορετικές αποδείξεις από τις οποίες η πρώτη ανήκει στον Πυθαγόρα. Οι αποδείξεις αυτές αποτελούν μία πρώτης τάξεως ευκαιρία να γνωρίσουν οι μαθητές την ιστορική διαδρομή του θεωρήματος και την πληθώρα των προσεγγίσεων που χρησιμοποίησαν κατά καιρούς όσοι ασχολήθηκαν με το θέμα. Η χρήση ενός δυναμικού λογισμικού δίνει την δυνατότητα στον διδάσκοντα να δημιουργήσει ένα διερευνητικό περιβάλλον μέσα στο οποίο ο μαθητής θα ανακαλύψει αναλλοίωτες σχέσεις μεταξύ γεωμετρικών μεγεθών και θα οδηγηθεί σταδιακά στην απόδειξη του θεωρήματος. Η Πυθαγόρεια απόδειξη και αυτή που αποδίδεται στους Κινέζους αποτελούν δύο χαρακτηριστικές και πολιτισμικά σημαντικές αποδείξεις. Επιπλέον η επέκταση του Πυθαγορείου στα όμοια σχήματα είναι μία δυνατότητα την οποία η χρήση του λογισμικού την καθιστά διδακτικά υλοποιήσιμη μέσα στα πλαίσια των χρονικών περιορισμών του σχολικού προγράμματος.

2.1.2 Στόχοι

Οι μαθητές μέσα από τις δραστηριότητες που αφορούν στο Πυθαγόρειο θεώρημα

- Θα αποδείξουν το Πυθαγόρειο θεώρημα με δύο διαφορετικούς τρόπους..
- Θα συγκρίνουν δύο ιστορικές αποδείξεις και θα εντοπίσουν τις ομοιότητες και τις διαφορές τους.
- Θα διερευνήσουν την επέκταση του Πυθαγορείου θεωρήματος από τα τετράγωνα σε οποιαδήποτε όμοια σχήματα.
- Θα προσεγγίσουν την έννοια του θεωρήματος μέσα από την αντίληψη της αναλλοίωτης σχέσης η οποία συνδέει γεωμετρικά ποσά που μεταβάλλονται.

2.1.3 Διδακτική πρόταση

Οργάνωση της τάξης

Οι δραστηριότητες αυτές ενδείκνυται να διδάσκονται στο εργαστήριο υπολογιστών και οι μαθητές να εργάζονται σε ομάδες 2-3 ατόμων με φύλλο εργασίας. Ωστόσο με μικρές τροποποιήσεις στο φύλλο εργασίας – που αφορούν τον τρόπο διερεύνησης – μπορούν να διεξαχθούν με την παρουσία ενός υπολογιστή με βιντεοπροβολέα.

Πορεία της εφαρμογής του σεναρίου

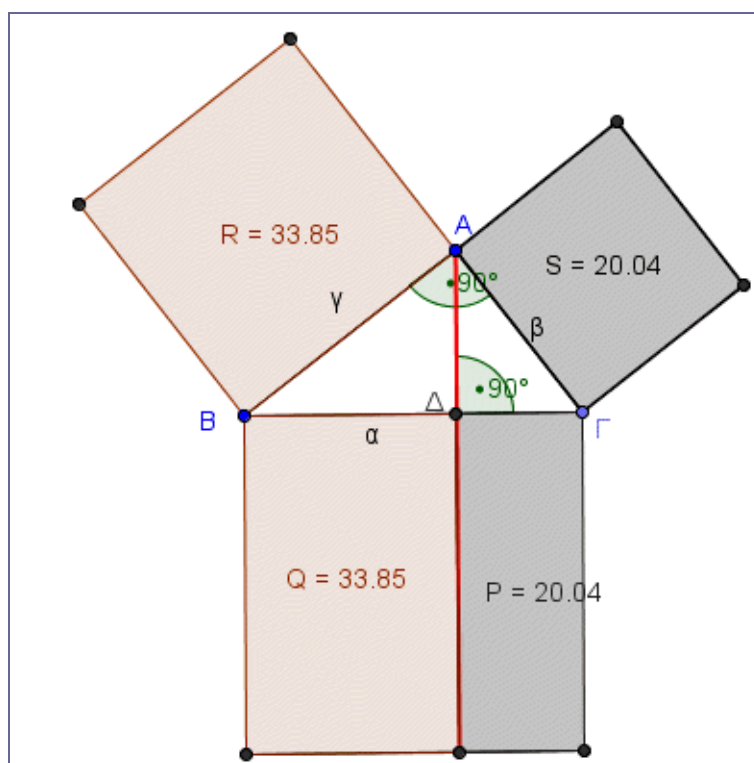
Το σενάριο αποτελείται από τρεις δραστηριότητες. Στην πρώτη φάση οι μαθητές θα μελετήσουν ένα αρχείο με το οποίο, μέσα από μία έτοιμη κατασκευή, θα εντοπίσουν μία αριθμητική άτυπη σχέση μεταξύ εμβαδών την οποία στην συνέχεια θα αποδείξουν με βάση το σχήμα. Στην δεύτερη δραστηριότητα οι μαθητές θα χρησιμοποιήσουν ένα μισοέτοιμο αρχείο και θα υλοποιήσουν σταδιακά, μέσα από τις

δυνατότητες του λογισμικού, την απόδειξη που αποδίδεται στους Κινέζους. Τέλος με την τρίτη δραστηριότητα οι μαθητές θα κατασκευάσουν εξ αρχής ένα αρχείο του λογισμικού και θα διαπραγματευτούν την επέκταση του Πυθαγορείου θεωρήματος έξω από το πλαίσιο της χρήσης τετραγώνων. Η επέκταση αυτή θα οδηγήσει και σε αναδιατύπωση του θεωρήματος με όρους που αφορούν σε όμοια σχήματα εν γένει.

2.1.4 Η ΠΥΘΑΓΟΡΕΙΑ ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Φύλλο εργασίας

Στην οθόνη εμφανίζονται ένα τρίγωνο και τρία τετράγωνα που έχουν βάσεις τις πλευρές του. Επιπλέον προβάλλονται οι μετρήσεις διαφόρων μεγεθών όπως οι πλευρές α , β , γ του τριγώνου και τα εμβαδά των τετραπλεύρων P , Q , R , S .



Να μεταβάλλετε το σχήμα σύροντας τα σημεία A , B , Γ .

ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ ΓΙΑ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ

1. Τι τρίγωνο είναι το $AB\Gamma$;
2. Ποια είναι η σχέση του τμήματος $A\Delta$ με το τρίγωνο $AB\Gamma$;
3. Υπάρχουν σταθερές σχέσεις μεταξύ των μεταβαλλόμενων εμβαδών των τετραπλεύρων P , Q , R , S ;
4. Ποια σχέση συνδέει τα εμβαδά των τριών τετραγώνων;
5. Ποια σχέση συνδέει τις πλευρές του τριγώνου $AB\Gamma$;

Μέχρι τώρα στηριχτήκαμε μόνο στις μετρήσεις για να βγάλουμε συμπεράσματα για τα ποσά που μεταβάλλονται. Θα προσπαθήσουμε τώρα να κάνουμε μία περισσότερο αυστηρή απόδειξη.

6. Να εκφράσετε τα συμπεράσματα του ερωτήματος 3 χρησιμοποιώντας τα τμήματα AB , $A\Gamma$, ΔB , $\Delta\Gamma$.

7. Να δικαιολογήσετε τα συμπεράσματα αυτά συγκρίνοντας τα τρίγωνα $AB\Gamma$, $AB\Delta$, $A\Delta\Gamma$.

Οδηγίες για την υλοποίηση της δραστηριότητας

Προετοιμασία

Η διάρκεια της δραστηριότητας είναι μία διδακτική ώρα και μπορεί να υλοποιηθεί ως εισαγωγή στο κεφάλαιο των μετρικών σχέσεων.

Οι μαθητές είναι απαραίτητο να γνωρίζουν την ομοιότητα των τριγώνων.

Καλό θα είναι ο διδάσκων να ζητήσει από τους μαθητές να αποκρύψουν τόσο τα ανεξάρτητα όσο και τα εξαρτώμενα γεωμετρικά και αριθμητικά αντικείμενα.

Η υλοποίηση

Ο διδάσκων στην αρχή της δραστηριότητας ζητά από τους μαθητές να αναγνωρίσουν το ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ αλλά και την ύπαρξη του ύψους $A\Delta$.

Στην συνέχεια σύρουν διαδοχικά τις τρεις κρυφές του τριγώνου και συζητούν την ισότητα των εμβαδών Q και R καθώς και των P και S .

Οι μαθητές χρησιμοποιούν το φύλλο εργασίας για να γράψουν τις ισότητες αλλά και να δικαιολογήσουν, με βάση τα παραπάνω, γιατί το εμβαδόν που αντιστοιχεί στο τετράγωνο της υποτεινουσας είναι ίσο με το άθροισμα των εμβαδών των δύο άλλων τετραγώνων.

Η ισότητα αυτή θα εκφραστεί στην ερώτηση 5 με την βοήθεια των συμβόλων α , β , γ δηλαδή τα μήκη των τριών πλευρών του ορθογωνίου τριγώνου.

Ολοκληρώνοντας την ερώτηση 5 οι μαθητές έχουν περιγράψει με άτυπο, δηλαδή με εμπειρικό τρόπο, το Πυθαγόρειο θεώρημα. Στο σημείο αυτό θα ήταν χρήσιμο ο διδάσκων να υπογραμμίσει στους μαθητές ότι η άτυπη αυτή απόδειξη, η οποία στηρίζεται μόνο στις μετρήσεις, ήταν η πρώτη προσέγγιση του Πυθαγορείου θεωρήματος από την ανθρώπινη κοινότητα. Επιπλέον θα πρέπει να επισημανθεί ότι μία γενική απόδειξη, η οποία δεν θα στηρίζεται σε μετρήσεις, εξασφαλίζει την εγκυρότητα μιας εικασίας.

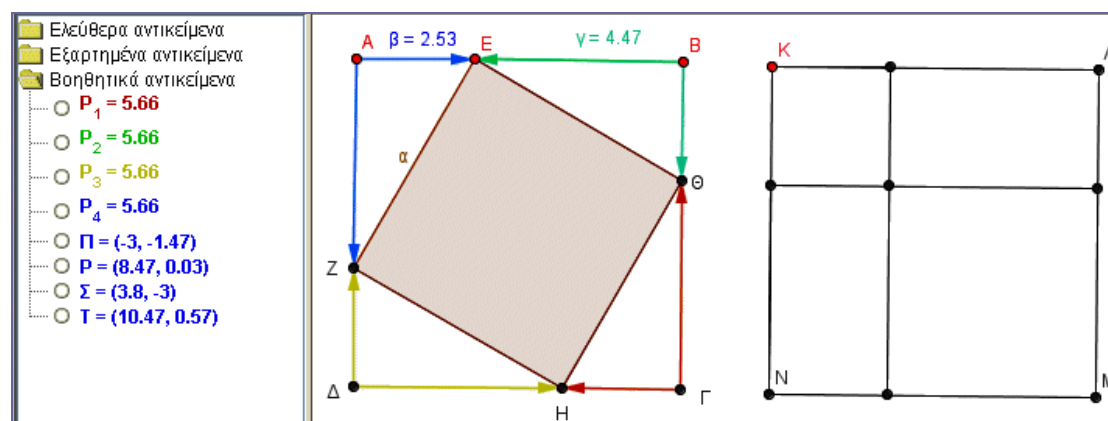
Στις ερωτήσεις 6 και 7 οι μαθητές θα εκφράσουν την ισότητα των εμβαδών Q και R μέσω των τμημάτων AB , $B\Gamma$ και $B\Delta$ αφού $R = AB^2$ και $Q = B\Delta \cdot B\Gamma$.

Η ισότητα $AB^2 = B\Delta \cdot B\Gamma$ μπορεί να μετασχηματιστεί σε αναλογία οπότε οι μαθητές θα οδηγηθούν στην ανάγκη να αποδείξουν την ομοιότητα των τριγώνων $AB\Gamma$ και $AB\Delta$. Η ομοιότητα αυτή είναι προφανής από την ισότητα των γωνιών των δύο τριγώνων.

2.1.5 Η ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΠΟΥ ΑΠΟΔΙΔΕΤΑΙ ΣΤΟΥΣ ΚΙΝΕΖΟΥΣ

Φύλλο εργασίας

Στην οθόνη εμφανίζονται δύο ίσα τετράγωνα. Σε ένα από αυτά είναι εγγεγραμμένο ένα δεύτερο τετράγωνο πλευράς a το οποίο μπορεί να μεταβάλλεται από την κορυφή E . Το δεύτερο τετράγωνο διαιρείται σε τέσσερα μέρη από δύο κάθετα τμήματα.



Να μεταβάλλετε το τετράγωνο $EZHΘ$ σύροντας το σημείο E .

ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ ΓΙΑ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ

1. Να εμφανίσετε όλα τα βοηθητικά αντικείμενα. Να τα σύρετε από τις κορυφές τους και να τα τοποθετήσετε στα αντίστοιχα τρίγωνα του τετραγώνου $ABΓΔ$ ώστε να καλύψουν τον χώρο που μένει ελεύθερος γύρω από το τετράγωνο $EZHΘ$. Να σύρετε το σημείο E . Τι παρατηρείτε;
2. Να μεταφέρετε τώρα τα τρίγωνα αυτά μέσα στα ορθογώνια παραλληλόγραμμα του τετραγώνου $KΛΜΝ$ ώστε να καλυφθούν πλήρως.
3. Να εξηγήσετε γιατί τα δύο άλλα τετράπλευρα που καλύπτουν το τετράγωνο $KΛΜΝ$ είναι και αυτά τετράγωνα.
4. Ποια σχέση συνδέει τα εμβαδά των δύο αυτών τετραγώνων με το τετράγωνο που έχει πλευρά a ;
5. Να εκφράσετε την σχέση αυτή με την βοήθεια των τμημάτων α , β , γ .
6. Να επιβεβαιώσετε αριθμητικά τις σχέσεις που έχετε εντοπίσει.

Στην ουσία έχετε αποδείξει το Πυθαγόρειο θεώρημα με μία μέθοδο που θα μπορούσαμε να αποκαλέσουμε αποκοπή εμβαδών και επικόλληση.

Σε τι διαφέρει κατά την γνώμη σας η απόδειξη αυτή από την Πυθαγόρεια και σε τι είναι όμοια;

Οδηγίες για την υλοποίηση της δραστηριότητας

Προετοιμασία

Η διάρκεια της δραστηριότητας είναι μία διδακτική ώρα και μπορεί να υλοποιηθεί μετά την Πυθαγόρεια απόδειξη.

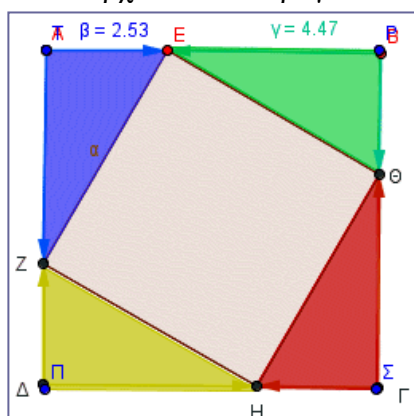
Καλό θα είναι ο διδάσκων να ζητήσει από τους μαθητές να αποκρύψουν τόσο τα ελεύθερα όσο και τα εξαρτημένα γεωμετρικά και αριθμητικά αντικείμενα.

Η υλοποίηση

Ο διδάσκων στην αρχή της δραστηριότητας ζητά από τους μαθητές να αναγνωρίσουν το τετράγωνο ΕΖΗΘ το οποίο και θα μεταβάλλουν από το σημείο Ε.

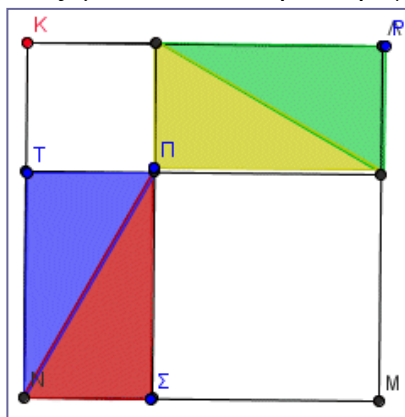
Στο σημείο αυτό θα ήταν χρήσιμο να γίνει διαπραγμάτευση στην τάξη για την σχέση που φαίνεται να έχουν τα τμήματα στις πλευρές του ενός τετραγώνου (διανύσματα) με τα τμήματα στις πλευρές του δεύτερου τετραγώνου. Για να καταστεί δυνατή μία ισχυρή εικασία θα πρέπει οι μαθητές να σύρουν το σημείο Ε σε αρκετές θέσεις συμπεριλαμβανομένων και των οριακών.

Στην πρώτη ερώτηση οι μαθητές θα εμφανίσουν τα βοηθητικά αντικείμενα. Ο διδάσκων καλό θα είναι να ζητήσει να σύρουν το σημείο Ε και να σχολιάσουν τον τρόπο με τον οποίο μεταβάλλονται καθώς και την ενδεχόμενη σχέση τους με τρίγωνα που υπάρχουν στο τετράγωνο ΑΒΓΔ.



Η σχέση αυτή θα επιβεβαιωθεί όταν σύρουν τα ελεύθερα τρίγωνα μέσα στο τετράγωνο ΑΒΓΔ και καλύψουν τις ελεύθερες περιοχές του.

Στην συνέχεια θα σύρουν κάθε ένα από τα τρίγωνα, μέσω της ελεύθερης κορυφής τους, μέσα στο δεύτερο τετράγωνο.



Θα παρατηρήσουν ότι κάθε ένα από τα τρίγωνα αυτά προσαρμόζεται κατάλληλα σε μία μόνο θέση.

Με τον τρόπο αυτό θα καλυφθούν τα ορθογώνια παραλληλόγραμμα του δεύτερου τετραγώνου.

Η απάντηση στο ερώτημα 3 είναι άμεση συνέπεια της δυνατότητας κάλυψης των ορθογωνίων αλλά και της ισότητας των δύο βασικών τετραγώνων.

Στην τέταρτη ερώτηση οι μαθητές θα διαπραγματευτούν την σχέση των δύο τετραγώνων που απομένουν και του τετραγώνου με πλευρά a . Τα δύο αυτά τετράγωνα έχουν συνολικό εμβαδόν ίσο με αυτό του a αφού συμπληρώνουν ίσα εμβαδά.

Στην έκτη ερώτηση οι μαθητές θα γράψουν ουσιαστικά την Πυθαγόρεια σχέση χρησιμοποιώντας τις πλευρές a , b , c .

Η αριθμητική επιβεβαίωση μπορεί να γίνει άμεσα, με μετρήσεις των εμβαδών των τριών τετραγώνων ή έμμεσα, με μετρήσεις των τμημάτων πάνω στο δεύτερο τετράγωνο.

Τέλος θα ακολουθήσει μία διαπραγμάτευση για τις ομοιότητες των δύο αποδείξεων (εμβαδά, μετρήσεις) και τις διαφορές που παρουσιάζουν αφού η Πυθαγόρεια απόδειξη είναι μία αυστηρά μαθηματική απόδειξη.

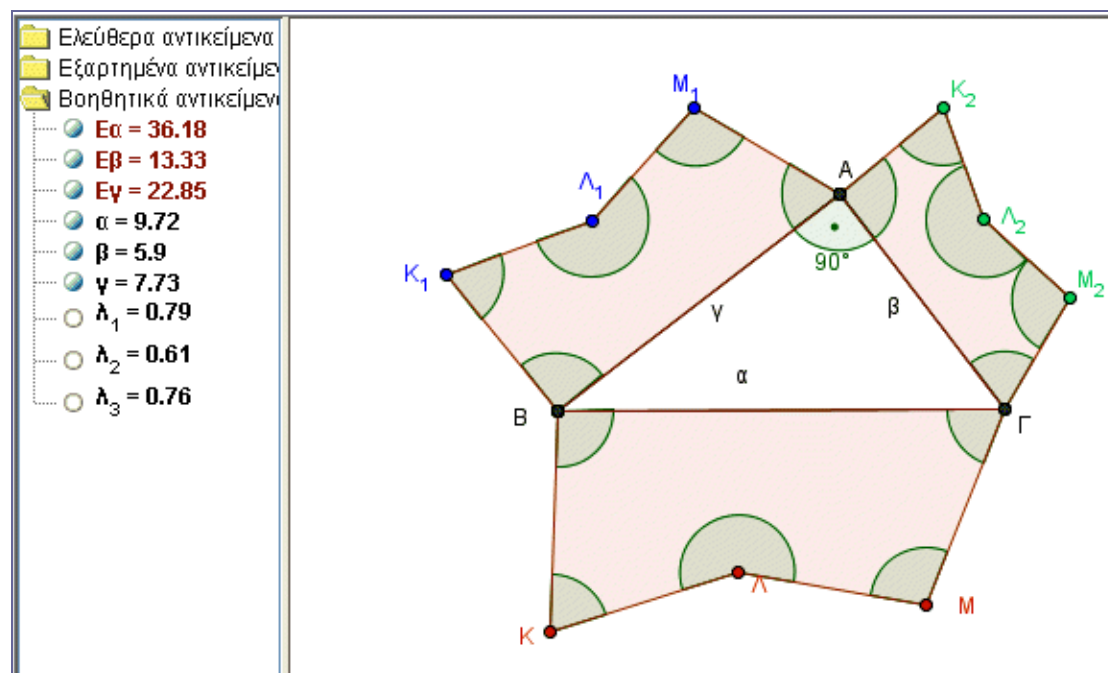
2.1.6 ΜΙΑ ΕΠΕΚΤΑΣΗ ΤΟΥ ΠΥΘΑΓΟΡΕΙΟΥ ΘΕΩΡΗΜΑΤΟΣ

Φύλλο εργασίας

Στην οθόνη εμφανίζεται ένα ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ.

Γύρω από το ορθογώνιο υπάρχουν τρία πολύγωνα, ένα για κάθε πλευρά.

Οι γωνίες των πολύγωνων έχουν κατασκευαστεί αλλά δεν εμφανίζονται οι μετρήσεις τους.



Να μεταβάλλετε το σχήμα σύροντας τα σημεία K_1 , L_1 , M_1

ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ ΓΙΑ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ

1. Να ελέγξετε με την βοήθεια των μετρήσεων την σχέση που συνδέει τα τρία πολύγωνα.
2. Ποια σχέση φαίνεται να συνδέει τα εμβαδά των τριών πολυγώνων;
3. Να διατυπώσετε μία πρόταση με βάση την απάντηση που δώσατε στο ερώτημα 1.
4. Πως σχετίζεται το Πυθαγόρειο θεώρημα με την προηγούμενη πρόταση;
5. Να διαγράψετε τα πολύγωνα που είναι κατασκευασμένα με βάση τις πλευρές και στη θέση τους να κατασκευάσετε κανονικά πολύγωνα με ίδιο αριθμό πλευρών. Να μετρήσετε τα εμβαδά τους και να εξετάσετε αν ισχύει η ίδια πρόταση με αυτήν που διατυπώσατε στο 3^ο ερώτημα.

Οδηγίες για την υλοποίηση της δραστηριότητας

Προετοιμασία

Η διάρκεια της δραστηριότητας είναι μία διδακτική ώρα και μπορεί να υλοποιηθεί μετά την Πυθαγόρεια απόδειξη.

Οι μαθητές θα πρέπει να γνωρίζουν τις ιδιότητες των ομοίων σχημάτων.

Καλό θα είναι ο διδάσκων να ζητήσει από τους μαθητές να αποκρύψουν τόσο τα ελεύθερα όσο και τα εξαρτημένα γεωμετρικά και αριθμητικά αντικείμενα.

Η υλοποίηση

Η δραστηριότητα έχει στόχο την σύνδεση του Πυθαγορείου θεωρήματος με την ομοιότητα επεκτείνοντάς το.

Οι μαθητές θα αρχίσουν να μεταβάλλουν το σχήμα του πολυγώνου $BK_1\Lambda_1M_1A$, σύροντας τις κορυφές του.

Ο τρόπος που μεταβάλλονται τα πολύγωνα δημιουργεί σοβαρές ενδείξεις ότι είναι όμοια. Ο έλεγχος της ομοιότητας μπορεί να πραγματοποιηθεί καταρχήν με την μέτρηση των γωνιών των πολύγνων. Ο διδάσκων προτείνει στους μαθητές να εμφανίσουν τις μετρήσεις των γωνιών και έτσι θα διαπιστωθεί ότι τα πολύγωνα έχουν τις γωνίες τους ίσες μία προς μία.

Στην συνέχεια οι μαθητές θα ελέγξουν αν οι λόγοι των πλευρών δύο πολυγώνων είναι ίσοι. Αυτό μπορεί να πραγματοποιηθεί αν ζητήσουν από το λογισμικό να εμφανίσει τα μήκη των πλευρών δύο πολυγώνων και στην συνέχεια να υπολογίσουν τους λόγους των αντιστοίχων πλευρών. Στο σημείο αυτό ίσως χρειαστεί η συνδρομή της αριθμομηχανής του λειτουργικού συστήματος.

Οι λόγοι των πλευρών του ορθογωνίου τριγώνου εμφανίζονται ως $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ στα βοηθητικά αντικείμενα και ο διδάσκων μπορεί να τους αξιοποιήσει στην συνέχεια.

Στην δεύτερη ερώτηση οι μαθητές θα μελετήσουν τα εμβαδά $E_\alpha, E_\beta, E_\gamma$ των τριών πολυγώνων και θα παρατηρήσουν ότι το άθροισμα των εμβαδών των δύο μικρότερων πολυγώνων είναι ίσο με το εμβαδόν του μεγαλύτερου.

Η παρατήρηση αυτή θα γίνει αντικείμενο διαπραγμάτευσης με τους μαθητές με στόχο να συνδεθεί το Πυθαγόρειο θεώρημα με τα όμοια σχήματα μέσα σε μία ενιαία πρόταση η οποία θα αποτελεί και την γενίκευση του Πυθαγορείου θεωρήματος.

Στην τελευταία ερώτηση οι μαθητές θα κατασκευάσουν κανονικά πολύγωνα ίσου αριθμού πλευρών με βάση τις πλευρές του ορθογωνίου. Καλό θα είναι να χρησιμοποιήσουν το εργαλείο που κατασκευάζει αυτομάτως τα κανονικά πολύγωνα. Ο διδάσκων τους βοηθά να δικαιολογήσουν το γεγονός ότι ισχύει και πάλι αυτό που είχαν παρατηρήσει από την δεύτερη ερώτηση. Η δικαιολόγηση θα γίνει προφανώς μέσω της ομοιότητας των κανονικών πολυγώνων που έχουν ίσο αριθμό πλευρών.

2.2 ΕΜΒΑΔΑ

2.2.1 Σύντομη περιγραφή του σεναρίου

Οι δραστηριότητες που αφορούν στα εμβαδά έχουν στόχο την υποστήριξη της διδασκαλίας των εμβαδών σε δύο επίπεδα. Σε πρώτο επίπεδο ο στόχος είναι η κατανόηση βασικών θεμάτων που αφορούν στην θεωρία και σε ασκήσεις του σχολικού βιβλίου ενώ σε δεύτερο επίπεδο ο στόχος αφορά στην επέκταση και διερεύνηση των θεμάτων, πέρα από τα σχολικά πλαίσια.

Με την πρώτη δραστηριότητα οι μαθητές θα λύσουν και στην συνέχεια θα διερευνήσουν μία άσκηση του σχολικού βιβλίου. Η άσκηση αναφέρεται στον εμβадόν τριγώνων με κοινή κορυφή σε μία πλευρά παραλληλογράμμου και βάση στην απέναντι πλευρά του.

Στην δεύτερη δραστηριότητα οι μαθητές με την βοήθεια του λογισμικού θα εντοπίσουν την σχέση που συνδέει την γωνία τριγώνου με το εμβадόν του και στην συνέχεια θα την αποδείξουν.

Στην τρίτη δραστηριότητα οι μαθητές θα λύσουν και διερευνήσουν ένα θέμα που αφορά σε τρίγωνα με κοινή γωνία.

Στην τέταρτη δραστηριότητα οι μαθητές θα εντοπίσουν την σχέση που συνδέει τα εμβαδά δύο ομοίων πολυγώνων. Η σύνδεση αυτή θα γίνει μέσα από την μελέτη κατάλληλης γραφικής παράστασης

2.2.2 Στόχοι

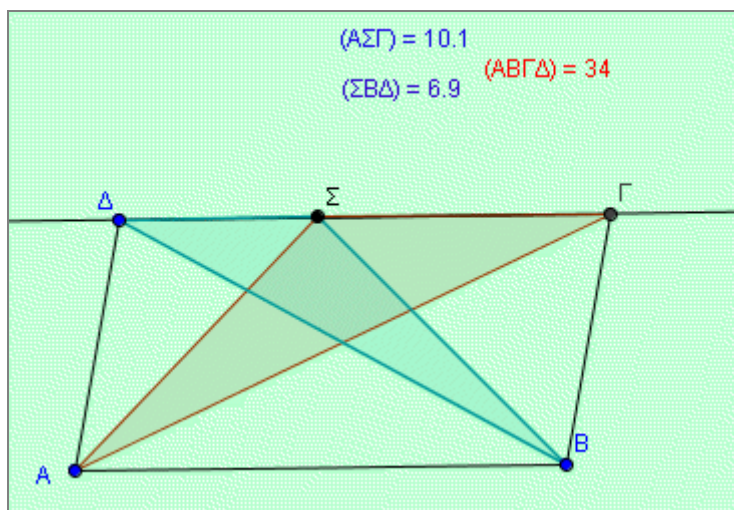
Οι μαθητές μέσα από τις δραστηριότητες που αφορούν στα εμβαδά:

- Θα. κάνουν εικασίες για τυχόν σχέσεις μεταξύ εμβადού και άλλων ποσοτήτων τις οποίες θα ελέγξουν για την εγκυρότητά τους.
- Θα. αποδείξουν με αυστηρά μαθηματικό τρόπο σχέσεις που έχουν εντοπίσει μέσα από τις λειτουργικότητες του λογισμικού.
- Θα. μελετήσουν συμμεταβαλλόμενα γεωμετρικά μεγέθη μέσα από γραφικές παραστάσεις. Θα χρησιμοποιήσουν δηλαδή την συνάρτηση ως μοντέλο περιγραφής φαινομένων που συμβαίνουν στην οθόνη.
- Θα. εμπλακούν σε διαδικασίες γενίκευσης και επέκτασης ενός δοσμένου προβλήματος.

2.2.3 ΤΡΙΓΩΝΑ ΣΕ ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜΜΟ

Φύλλο εργασίας

Στην οθόνη προβάλλονται ένα παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$, ένα σημείο Σ πάνω στην ευθεία της πλευράς $\Delta\Gamma$, οι μετρήσεις των εμβαδών των τριγώνων $\Lambda\Sigma\Gamma$ και $\Sigma B\Delta$ καθώς και το εμβαδόν του παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$



Να μετακινήσετε το σημείο Σ και να απαντήσετε στα παρακάτω ερωτήματα.

ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ ΓΙΑ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ

- 1) Ποια σχέση φαίνεται να συνδέει τα εμβαδά των $\Lambda\Sigma\Gamma$ και $\Sigma B\Delta$ με το εμβαδόν του παραλληλογράμμου όταν το Σ βρίσκεται μεταξύ των Δ και Γ ;
- 2) Να σύρετε το Σ στις ακραίες θέσεις Δ και Γ . Να επιβεβαιώσετε ή να απορρίψετε το προηγούμενο συμπέρασμα.
- 3) Να αποδείξετε με αυστηρά μαθηματικό τρόπο το συμπέρασμα το οποίο τυχόν έχετε διατυπώσει στις προηγούμενες ερωτήσεις
- 4) Να μεταφέρετε το Σ έξω από το τμήμα $\Delta\Gamma$ και προ το μέρος του Δ . Πως μετασχηματίζεται η σχέση που είχατε εντοπίσει προηγουμένως;
- 5) Να μεταφέρετε το Σ έξω από το τμήμα $\Delta\Gamma$ και προ το μέρος του Γ . Πως μετασχηματίζεται η σχέση που είχατε εντοπίσει προηγουμένως;

Οδηγίες για την υλοποίηση της δραστηριότητας

Προετοιμασία

Η διάρκεια της δραστηριότητας είναι μία διδακτική ώρα και μπορεί να υλοποιηθεί ως εφαρμογή στο κεφάλαιο των εμβαδών βασικών σχημάτων.

Οι μαθητές θα πρέπει να γνωρίζουν την αντίστοιχη θεωρία από τα εμβαδά των τριγώνων.

Η υλοποίηση

Ο διδάσκων έχει δύο επιλογές ως προς την διδακτική χρήση της δραστηριότητας.

Μπορεί να υλοποιήσει την δραστηριότητα και στο τέλος να παρουσιάσει την αντίστοιχη άσκηση του βιβλίου: «Αν Σ είναι σημείο πλευράς παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$ να αποδείξετε ότι: $(\Sigma A\Gamma) + (\Sigma B\Delta) = (AB\Gamma)$.»

Η άλλη επιλογή είναι να παρουσιάσει την άσκηση στην τάξη και στην συνέχεια να ζητήσει από τους μαθητές να την αποδείξουν με βάση το λογισμικό και να διερευνήσουν την επέκτασή της.

Στο πρώτο ερώτημα οι μαθητές θα σύρουν το Σ μεταξύ των Δ και Γ και θα αναζητήσουν σχέση μεταξύ του αθροίσματος των δύο εμβαδών $(A\Sigma\Gamma)$ και $(\Sigma B\Delta)$ και του $(AB\Gamma\Delta)$. Είναι χρήσιμο να μεταφέρουν το Σ σε ακραίες θέσεις, δηλαδή στα Δ και Γ και να διαπιστώσουν την ισχύ της σχέσης που φαίνεται να ισχύει. Η αρχική εικασία θα ενισχυθεί αν μεταβάλλουν το αρχικό παραλληλόγραμμο σύροντας μία κορυφή του.

Στο τρίτο ερώτημα οι μαθητές ουσιαστικά θα αποδείξουν την άσκηση του βιβλίου παρατηρώντας ότι $(\Sigma B\Delta) = (A\Sigma\Delta)$.

Στο τέταρτο ερώτημα οι μαθητές θα παρατηρήσουν ότι ο κανόνας της πρόσθεσης δεν μπορεί πλέον να εφαρμοστεί μπορεί όμως να εφαρμοστεί η αφαίρεση $(A\Sigma\Gamma) - (\Sigma B\Delta)$.

Τέλος στο τέταρτο ερώτημα θα παρατηρήσουν ότι 'λειτουργεί' και πάλι η διαφορά αλλά τώρα ισχύει $(\Sigma B\Delta) - (A\Sigma\Gamma) = (AB\Gamma)$.

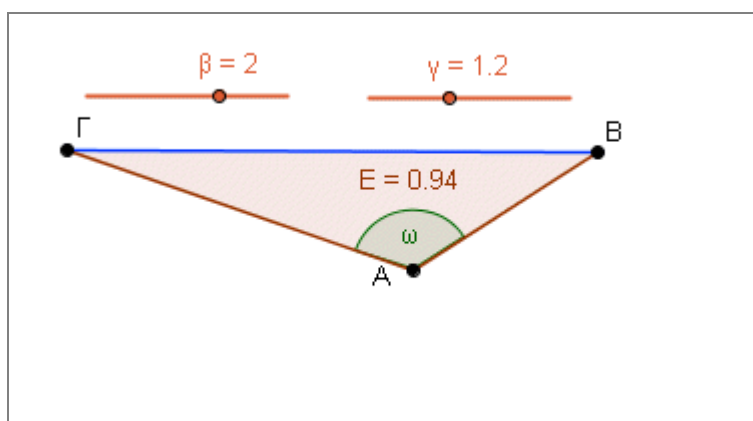
2.2.4 ΕΜΒΑΔΟΝ ΤΡΙΓΩΝΟΥ

Φύλλο εργασίας

Στην οθόνη προβάλλεται ένα δυναμικό τρίγωνο $AB\Gamma$ το οποίο μπορείτε να μεταβάλλετε με δύο τρόπους.

Οι μεταβολές β , γ μεταβάλλουν τα μήκη των πλευρών $A\Gamma$ και AB αντίστοιχα, ενώ σύροντας το σημείο B μεταβάλλεται μόνο η γωνία ω της κορυφής A .

Ακόμη προβάλλεται η μέτρηση της γωνίας ω του τριγώνου και ένα ελεύθερο σημείο M .



ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ ΓΙΑ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ

- 1) Να σύρετε το σημείο Γ . Ποια μεγέθη παραμένουν σταθερά και ποια μεταβάλλονται;
- 2) Να μελετήσετε τον τρόπο που μεταβάλλεται το εμβαδόν σε σχέση με την γωνία. Πότε το εμβαδόν γίνεται μέγιστο και πότε ελάχιστο;
- 3) Να μελετήσετε την σχέση της γωνίας με τον εμβαδόν επαναπροσδιορίζοντας το σημείο M σε $M=(\omega, E)$ και εμφανίζοντας το ίχνος του σημείου. Με βάση την καμπύλη που δημιουργείται ποια θα μπορούσε να είναι η σχέση γωνίας εμβαδού;
- 4) Να μεταβάλλετε τα μήκη των πλευρών β , γ και να επαναλάβετε την προηγούμενη διαδικασία. Να διατυπώσετε έναν κανόνα.
- 5) Να αποδείξετε το συμπέρασμα στο οποίο φτάσατε από τα προηγούμενα ερωτήματα.

Οδηγίες για την υλοποίηση της δραστηριότητας

Προετοιμασία

Η διάρκεια της δραστηριότητας είναι μία διδακτική ώρα και μπορεί να υλοποιηθεί ως εισαγωγή στην παράγραφο που αφορά στο εμβαδόν τριγώνου ως συνάρτηση μιας γωνίας του.

Οι μαθητές θα πρέπει να γνωρίζουν την διαδικασία επαναπροσδιορισμού μιας συνάρτησης και ενός σημείου από τις συντεταγμένες του καθώς και την δημιουργία ίχνους ενός σημείου.

Επιπλέον θα πρέπει να γνωρίζουν την γραφική παράσταση της συνάρτησης του ημιτόνου ιδιαίτερα δε της $f(x) = \alpha \cdot \eta\mu x$

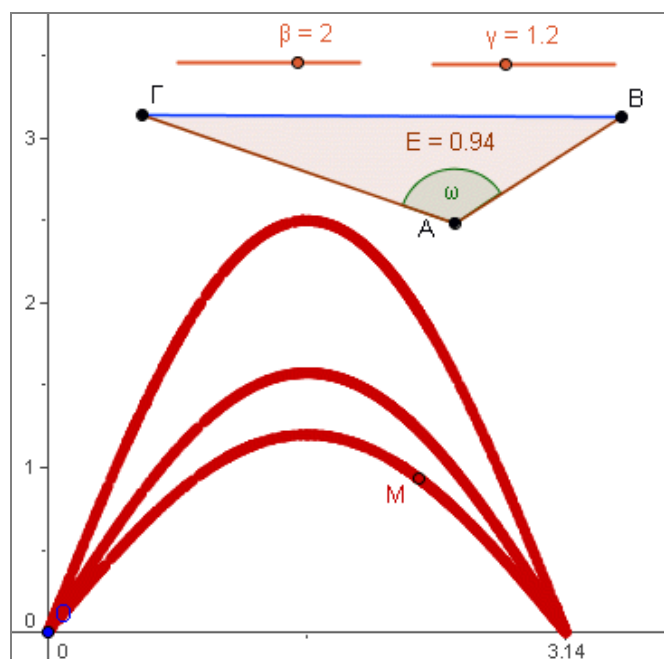
Η υλοποίηση

Οι μαθητές αρχικά μεταβάλλουν τις τιμές του μεταβολέα, παρατηρούν τις τιμές του εμβαδού σε σχέση με την γωνία και επισημαίνουν ότι η μέγιστη τιμή επιτυγχάνεται όταν η γωνία γίνει ορθή.

Στην τρίτη ερώτηση επαναπροσδιορίζουν το υπάρχον σημείο M σε $M=(\omega, E)$ και διερευνούν την καμπύλη που γράφει το ίχνος του καθώς μεταβάλλεται η γωνία ω . Εδώ είναι σημαντικό ο διδάσκων να διαπραγματευτεί με τους μαθητές ποιες από τις γνωστές συναρτήσεις έχουν γραφικές παραστάσεις όμοιες με αυτήν που έγραψε το ίχνος του M.

Ο τρόπος που διαγράφεται η καμπύλη και οι αριθμητικές τιμές του εμβαδού θα αποτελέσει αντικείμενο θα οδηγήσει τους μαθητές στην εικασία ότι η σχέση είναι τριγωνομετρική.

Αλλάζοντας τις τιμές των πλευρών AB και AG η καμπύλη έχει την ίδια μορφή μόνο που αλλάζει το μέγιστο. Αυτό το μέγιστο δίνεται κάθε φορά από το ημιγινόμενο των δύο πλευρών.



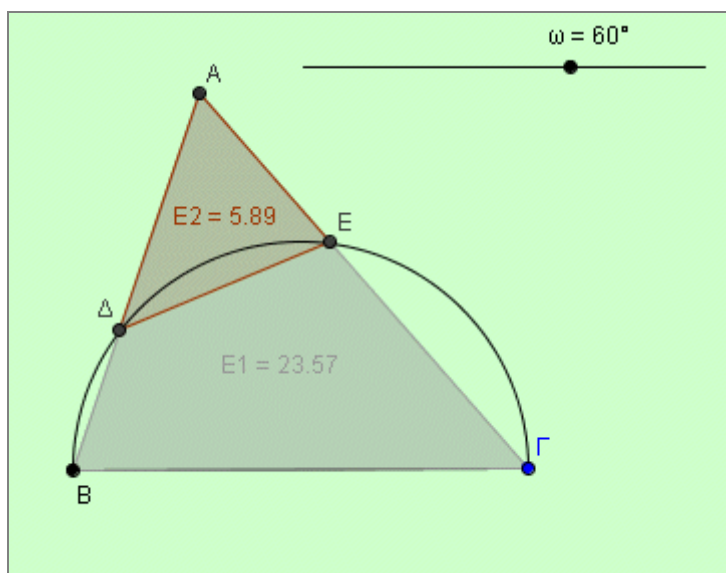
Η επιβεβαίωση του τύπου $E = 1/2 \cdot (AB) \cdot (AG) \cdot \eta\mu\omega$ θα γίνει μέσω της κατασκευής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $\psi = 0,5 \cdot \beta \cdot \gamma \cdot \eta\mu x$ η οποία θα συμπίπτει με την καμπύλη του ίχνους. Οι μαθητές θα πρέπει να χρησιμοποιήσουν την ήδη υπάρχουσα συνάρτηση $f(x) = x$ που βρίσκεται στα βοηθητικά αντικείμενα και να την επαναπροσδιορίσουν και να την εμφανίσουν.

Τέλος οι μαθητές θα κάνουν την απόδειξη του τύπου στο τετράδιό τους.

2.2.5 ΣΧΕΣΗ ΕΜΒΑΔΩΝ ΤΡΙΓΩΝΩΝ

Φύλλο εργασίας

Στην οθόνη προβάλλεται ένα τρίγωνο $AB\Gamma$ του οποίου η γωνία A μεταβάλλεται από τον μεταβολέα ω , δηλαδή $A=\omega$. Ένα ημικύκλιο με βάση το $B\Gamma$ κόβει τις πλευρές AB και $A\Gamma$ στα σημεία Δ και E . Επιπλέον προβάλλονται οι μετρήσεις των εμβαδών των τριγώνων $AB\Gamma$, ως $E1$, και του $A\Delta E$ ως $E2$



ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ ΓΙΑ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ:

- 1) Να μετακινήσετε την κορυφή A . Να μελετήσετε τις τιμές που παίρνει το εμβαδόν $AB\Gamma$ και το εμβαδόν $A\Delta E$. Να καταγράψετε μερικά ζεύγη τιμών. Υπάρχει κάποια σχέση που φαίνεται να συνδέει τα δύο εμβαδά;
- 2) Να μελετήσετε την σχέση των δύο εμβαδών επαναπροσδιορίζοντας σημείο M σε $M=(E1, E2)$ και δημιουργώντας το ίχνος του. Ποια σχέση φαίνεται να συνδέει τα δύο εμβαδά;
- 3) Να αποδείξετε την σχέση αυτή με αυστηρά μαθηματικό τρόπο.
- 4) Να μεταβάλλετε την γωνία ω και να επαναλάβετε την διερεύνηση. Να διατυπώσετε έναν κανόνα.

Οδηγίες για την υλοποίηση της δραστηριότητας

Προετοιμασία

Η διάρκεια της δραστηριότητας είναι μία διδακτική ώρα και μπορεί να υλοποιηθεί ως εφαρμογή στο τέλος του κεφαλαίου των εμβαδών.

Οι μαθητές θα πρέπει να γνωρίζουν την διαδικασία επαναπροσδιορισμού ενός σημείου από τις συντεταγμένες του καθώς και την δημιουργία ίχνους ενός σημείου.

Επιπλέον θα πρέπει να γνωρίζουν την γραφική παράσταση της γραμμικής συνάρτησης $y=a.x$ καθώς και την σχέση των εμβαδών τριγώνων που έχουν μια κοινή γωνία.

Η υλοποίηση

Στην τρίτη δραστηριότητα η όλη διαδικασία θα μπορούσε να ξεκινήσει με μία άσκηση εμβαδών όμοια με αυτές που περιέχει το σχολικό εγχειρίδιο.

« Σε ένα τρίγωνο $AB\Gamma$ η γωνία της κορυφής A είναι ίση με 60° . Ένα ημικύκλιο βάσης $B\Gamma$ τέμνει τις πλευρές AB και $A\Gamma$ στα Δ, E αντίστοιχα. Να βρείτε την σχέση των εμβαδών των τριγώνων $A\Delta E$ και $AB\Gamma$ ».

Οι μαθητές στην αρχή θα αναγνωρίσουν ότι η κατασκευή με το λογισμικό είναι μία υλοποίηση των δεδομένων της άσκησης.

Ο διδάσκων θα προτείνει στους μαθητές να επιλέξουν ακέραιες τιμές για το εμβαδόν του $AB\Gamma$. Δύο είναι οι ακέραιες τιμές που είναι προσβάσιμες το 20 και το 24. Για τις τιμές αυτές οι μαθητές θα παρατηρήσουν ότι το εμβαδόν του $A\Delta E$ είναι ίσο με το $\frac{1}{4}$ του $AB\Gamma$. Στο σημείο αυτό ο διδάσκων ζητά από τους μαθητές να συνδέσουν την τιμή $\frac{1}{4}$ με τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας A . Ο στόχος είναι να εντοπίσουν οι μαθητές ότι ο λόγος των δύο εμβαδών είναι ίσος με το τετράγωνο του συνημιτόνου της γωνίας A .

Στην δεύτερη ερώτηση οι μαθητές θα ερευνήσουν με συστηματικό πλέον τρόπο την σχέση των δύο εμβαδών. Θα κατασκευάσουν το σημείο M με συντεταγμένες τα δύο εμβαδά και θα εμφανίσουν το ίχνος του. Το ίχνος του M θα γράψει μία ευθεία η οποία φαίνεται ότι περνά από την αρχή των αξόνων. Αυτό το γεγονός θα επιτρέψει στους μαθητές να κάνουν μία εικασία για την γραμμικότητα της σχέσης που συνδέει τα δύο εμβαδά. Ο λόγος των τιμών $E2/E1$ θα καθορίσει τον συντελεστή λ της σχέσης $E2=\lambda.E1$. Ο λόγος αυτός είναι $\frac{1}{4}$.

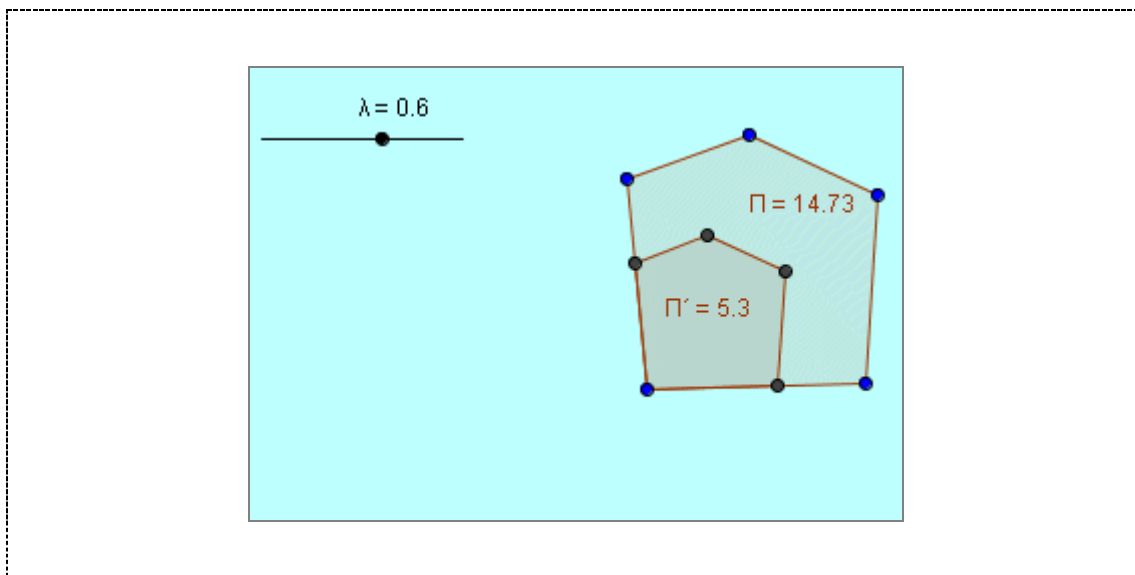
Στην τρίτη ερώτηση οι μαθητές θα χρησιμοποιήσουν την σχέση που συνδέει τα εμβαδά δύο τριγώνων που έχουν κοινή γωνία. Επιπλέον αν φέρουν την BE τότε στο ορθογώνιο τρίγωνο ABE η μία γωνία είναι ίση με 60° άρα ή άλλη οξεία γωνία είναι ίση με 30° και η πλευρά $AE=1/2AB$. Όμοια αποδεικνύεται ότι $A\Delta=1/2 A\Gamma$ οπότε προκύπτει ότι ο λόγος των δύο εμβαδών είναι ίσος με $\frac{1}{4}$.

Μεταβάλλοντας την γωνία A με την βοήθεια του μεταβολέα η ευθεία που δημιουργούν τα ίχνη του M αλλάζει κλίση αλλά αυτή είναι πάντα ίση με $\sin^2\omega$.

2.2.6 ΕΜΒΑΔΑ ΟΜΟΙΩΝ ΠΟΛΥΓΩΝΩΝ

Φύλλο εργασίας

.Στην οθόνη προβάλλονται δύο πολύγωνα και οι μετρήσεις των εμβαδών τους Π και Π' . Ο μεταβολέας λ μεταβάλλει το μέγεθος ενός μόνο εξ αυτών.



ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ ΓΙΑ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ

- 1) Να μεταβάλλετε τις τιμές του λ . Ποια σχέση φαίνεται να συνδέει τα δύο πολύγωνα; Να σύρετε μια κορυφή του πολυγώνου Π . Τι παρατηρείτε;
- 2) Θα διερευνήσουμε τώρα την σχέση των εμβαδών των δύο πολυγώνων. Να κατασκευάσετε το σημείο M σε $M=(\Pi, \Pi')$ και να προβάλλετε το ίχνος του. Να μεταβάλλετε τις τιμές του εμβαδού του πολυγώνου Π σύροντας μία κορυφή του. Ποια σχέση θα μπορούσε να συνδέει τα δύο εμβαδά;
- 3) Να κατασκευάσετε το σημείο K σε $K=(\lambda, \Pi')$ και να εμφανίσετε το ίχνος του. Να αλλάξετε τις τιμές του λ σύροντας το σημείο. Ποια σχέση φαίνεται να συνδέει τι τιμές του λ με τις τιμές του Π' ;
- 4) Με βάση τις απαντήσεις σας στα προηγούμενα να διατυπώσετε μία πρόταση για τα εμβαδά δύο ομοίων πολυγώνων.

Οδηγίες για την υλοποίηση της δραστηριότητας.

Προετοιμασία

Η διάρκεια της δραστηριότητας είναι μία διδακτική ώρα και μπορεί να υλοποιηθεί ως εφαρμογή στο τέλος του κεφαλαίου των εμβαδών.

Οι μαθητές θα πρέπει να γνωρίζουν τον επαναπροσδιορισμό σημείου και συνάρτησης και την δημιουργία ίχνους του σημείου.

Ακόμη θα πρέπει να γνωρίζουν την εξίσωση ευθείας, και της παραβολής.

Η υλοποίηση

Οι μαθητές αρχικά μεταβάλλουν τις τιμές του λ και παρατηρούν τον τρόπο που μεταβάλλεται το πολύγωνο $\Pi 1$.

Εδώ ο στόχος είναι να κάνουν οι μαθητές την εικασία ότι το $\Pi 1$ αποτελεί μία σμίκρυνση ή μεγέθυνση του Π αναλόγως των τιμών της παραμέτρου λ .

Στην συνέχεια θα ήταν χρήσιμο ο διδάσκων να ζητήσει από τους μαθητές να σύρουν μία κορυφή του πολυγώνου Π και να μελετήσουν τον τρόπο που μεταβάλλεται το $\Pi 1$. Με τον τρόπο αυτό θα ενισχυθεί η εικασία ότι τα δύο πολύγωνα είναι όμοια αφού φαίνεται ότι οι πλευρές παραμένουν παράλληλες.

Στην ερώτηση 2 οι μαθητές θα δημιουργήσουν το σημείο $M=(\Pi, \Pi 1)$, και θα διαπιστώσουν ότι το ίχνος του διαγράφει μία ευθεία. Αυτό θα γίνει αντικείμενο διαπραγμάτευσης ώστε να φτάσουν στο συμπέρασμα ότι η σχέση που συνδέει τα εμβαδά θα είναι γραμμική. Επομένως $\Pi 1=c \cdot \Pi$. Η σταθερά c θα υπολογιστεί από το πηλίκο δύο αντιστοίχων τιμών των εμβαδών και θα συνδεθεί με το λ^2 .

Στην επόμενη ερώτηση θα επαναληφθεί η διαδικασία με το σημείο $K(\lambda, \Pi 1)$. Εδώ η γραφική παράσταση είναι μία παραβολή η οποία έχει εξίσωση $\Pi 1=\lambda^2 \cdot \Pi$. Η διαπίστωση αυτή μπορεί να γίνει στην αρχή διαισθητικά και στην συνέχεια να γίνει η γραφική παράσταση της $y=\Pi \cdot x^2$. Η καμπύλη που θα προκύψει θα περάσει από όλα τα σημεία του ίχνους του K .

Στην τελευταία ερώτηση οι μαθητές θα διατυπώσουν την πρόταση που αφορά στην σχέση των εμβαδών δύο ομοίων πολυγώνων.

2.3 ΚΑΝΟΝΙΚΑ ΠΟΛΥΓΩΝΑ

2.3.1 Σύντομη περιγραφή των σεναρίων

Τα κανονικά πολύγωνα αποτελούν την γέφυρα η οποία θα οδηγήσει από τα ευθύγραμμα σχήματα στον κύκλο.

Η σχέση μεταξύ του μήκους ενός τόξου και του μήκους της αντίστοιχης χορδής δεν είναι γραμμική ενώ η προσέγγιση του κύκλου μπορεί να γίνει μέσα από εγγεγραμμένα και περιγεγραμμένα κανονικά πολύγωνα.

Οι δραστηριότητες των κανονικών πολυγώνων μπορούν να υποστηρίξουν την διδασκαλία του σχετικού κεφαλαίου, συγχρόνως όμως δίνουν την δυνατότητα στον διδάσκοντα να τις μετασχηματίσει ή να τις συμπληρώσει.

Επιπλέον επιτρέπουν στον μαθητή να διερευνήσει σχέσεις μεταξύ μεγεθών σε έναν κύκλο, οι οποίες επεκτείνουν τις γνώσεις του και πέρα από την προβλεπόμενη ύλη.

Το σενάριο αποτελείται από δύο δραστηριότητες. Η πρώτη δραστηριότητα αφορά στην διερεύνηση των σχέσεων μεταξύ του μήκους ενός τόξου και της αντίστοιχης χορδής.

Η διερεύνηση θα μπορούσε να αρχίσει με την αναζήτηση σχέσης μεταξύ τόξου και επίκεντρης γωνίας όταν αυτή μετράται σε ακτίνια. Αυτό είναι εφικτό αν ο μαθητής ορίσει ένα σημείο $M=(\omega, c)$ και μελετήσει το ίχνος του όταν μεταβάλλεται η γωνία ω .

Επιπλέον θα μπορούσε να γίνει μελέτη της σχέσης μεταξύ της γωνίας ω και της χορδής λ .

Στην δεύτερη δραστηριότητα οι μαθητές θα διερευνήσουν τις προϋποθέσεις κατασκευής ενός εγγεγραμμένου σε κύκλο κανονικού πολυγώνου. Ακόμη θα προσεγγίσουν την περίμετρο του κύκλου με την μέθοδο που χρησιμοποίησε ο Αρχιμήδης, δηλαδή με την περίμετρο τόσο του εγγεγραμμένου όσο και του περιγεγραμμένου κανονικού πολυγώνου.

Στην τρίτη δραστηριότητα οι μαθητές θα ερευνήσουν τις προϋποθέσεις κατασκευής διακοσμητικών μοτίβων με κανονικά πολύγωνα (tessellations). Συγκεκριμένα θα διερευνήσουν, με βάση τα εργαλεία που τους παρέχει το λογισμικό, ποια κανονικά πολύγωνα μπορεί να χρησιμοποιηθούν αυτούσια για να καλύψουν μία επίπεδη επιφάνεια.

2.3.2 Στόχοι

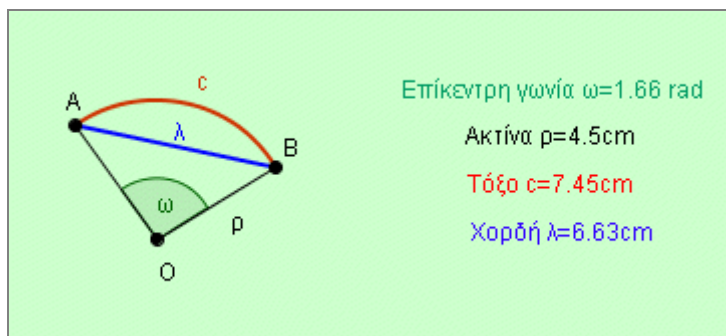
Οι μαθητές μέσα από τις δραστηριότητες που αφορούν στα κανονικά πολύγωνα:

- Θα κατασκευάσουν την σχέση που συνδέει την χορδή και το μήκος του αντίστοιχου τόξου σε έναν κύκλο .
- Θα διερευνήσουν τις προϋποθέσεις κατασκευής κανονικών πολυγώνων εγγεγραμμένων σε κύκλο.
- Θα προσεγγίσουν την περίμετρο ενός κύκλου μέσω κανονικών σχημάτων εγγεγραμμένων και περιγεγραμμένων σε κύκλο.
- Θα συνδέσουν τις γεωμετρικές ιδιότητες ορισμένων κανονικών πολυγώνων με την διακόσμηση.

2.3.3 ΤΟΞΟ-ΧΟΡΔΗ

Φύλλο εργασίας

Στην οθόνη προβάλλεται ένας κυκλικό τομέα OAB ο οποίος μεταβάλλεται από το σημείο B ενώ εμφανίζονται οι μετρήσεις του τόξου c , της επίκεντρης γωνίας ω , της ακτίνας ρ και της χορδής λ . Επιπλέον εμφανίζονται και δύο βοηθητικά αντικείμενα, ένα σημείο M και μία συνάρτηση $f(x)=x$, που μπορείτε να χρησιμοποιήσετε στην συνέχεια.



Να μεταβάλλετε το σχήμα σύροντας τα σημεία A , B , Γ .

ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ ΓΙΑ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ:

1. Πως μεταβάλλεται το μήκος του τόξου c καθώς μεταβάλλεται η γωνία ω ;
2. Πως μεταβάλλεται το μήκος της χορδής λ καθώς μεταβάλλεται η γωνία ω ;
3. Πως μεταβάλλεται η χορδή λ και το τόξο c καθώς μεταβάλλεται η ακτίνα;
4. Να κατασκευάσετε ένα σημείο $M=(c, \lambda)$ και να εμφανίσετε το ίχνος του. Να μεταβάλλεται το τόξο c .
5. Ποια σχέση μπορεί να συνδέει το μήκος του τόξου c με το μήκος της χορδής λ ;

Μέχρι τώρα στηριχτήκαμε μόνο στις μετρήσεις για να βγάλουμε συμπεράσματα για τα ποσά που μεταβάλλονται. Θα προσπαθήσουμε τώρα να κάνουμε μία περισσότερο αυστηρή απόδειξη.

6. Να γράψετε την σχέση που συνδέει την επίκεντρη γωνία ω και την ακτίνα ρ με το μήκος του τόξου c . Να λάβετε υπ όψιν ότι η γωνία ω μετράται σε ακτίνια.
7. Να βρείτε με την βοήθεια της τριγωνομετρίας μία σχέση που συνδέει την χορδή λ με την γωνία ω και την ακτίνα ρ . Να συνδυάσετε τα αποτελέσματα των δύο ερωτήσεων για να δημιουργήσετε μία σχέση που να συνδέει το λ με την ω και το c .
8. Να κάνετε την γραφική παράσταση της σχέσης αυτής. Τι παρατηρείτε;

Οδηγίες για την υλοποίηση της δραστηριότητας

Προετοιμασία

Η διάρκεια της δραστηριότητας είναι μία διδακτική ώρα και μπορεί να υλοποιηθεί ως εισαγωγή στο κεφάλαιο των κανονικών πολυγώνων.

Οι μαθητές θα πρέπει να γνωρίζουν την διαδικασία κατασκευής σημείου με συντεταγμένες τις μετρήσεις τμημάτων ενός σχήματος. Ακόμη θα πρέπει να γνωρίζουν την κατασκευή της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης.

Τέλος οι μαθητές θα πρέπει να γνωρίζουν τις βασικές σχέσεις $c = \omega \cdot \rho$ και $\lambda = 2\rho \cdot \eta\mu(\omega/2)$.

Η υλοποίηση

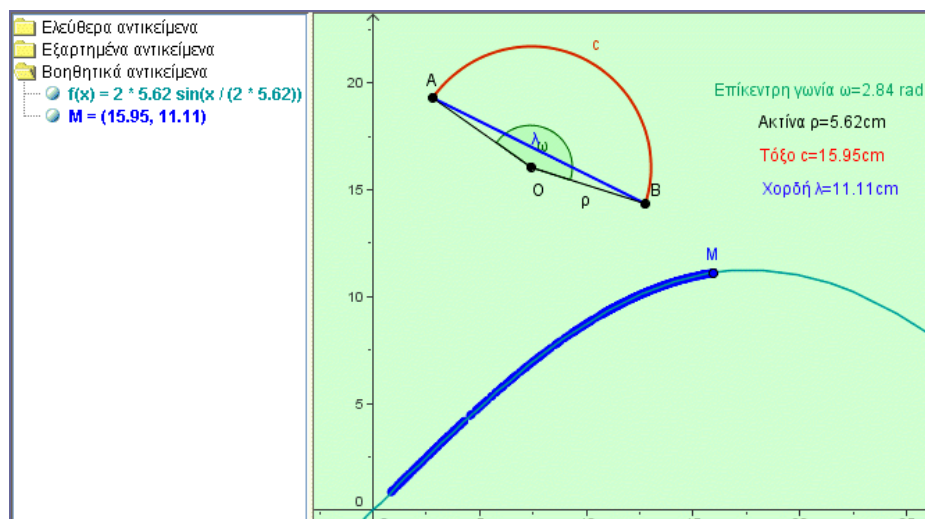
Οι μαθητές αρχικά κινούν το σημείο B και παρατηρούν τις μετρήσεις για τα μεγέθη ω , c και λ . Θα εντοπίσουν ότι τα μεγέθη ω , c συµμεταβάλλονται µε γραμμικό τρόπο, ενώ η ω και το λ δεν συνδέονται γραμμικά.

Όταν δημιουργηθεί η καμπύλη του σημείου M τότε θα ακολουθήσει διαπραγµάτευση για το είδος της σχέσης που συνδέει τα δύο ποσά λ , c .

Η αλγεβρική επεξεργασία θα μπορούσε να οδηγήσει τους μαθητές στην σχέση $\lambda = 2\rho \cdot \eta\mu(c/2\rho)$. Η σχέση αυτή προκύπτει από τον συνδυασµό δύο βασικών σχέσεων δηλαδή της $c = \omega \cdot \rho$ και $\lambda = 2\rho \cdot \eta\mu(\omega/2)$.

Εδώ είναι φανερό ότι οι δύο αυτές σχέσεις θα μπορούσαν να προκύψουν µε δύο αντίστοιχες δραστηριότητες.

Στην συνέχεια οι μαθητές µπορούν να κατασκευάσουν την γραφική παράσταση της $\psi = 2\rho \cdot \eta\mu(\chi/2\rho)$ και να παρατηρήσουν ότι συµπίπτει µε την καμπύλη που έγραψε το ίχνος του σημείου M.

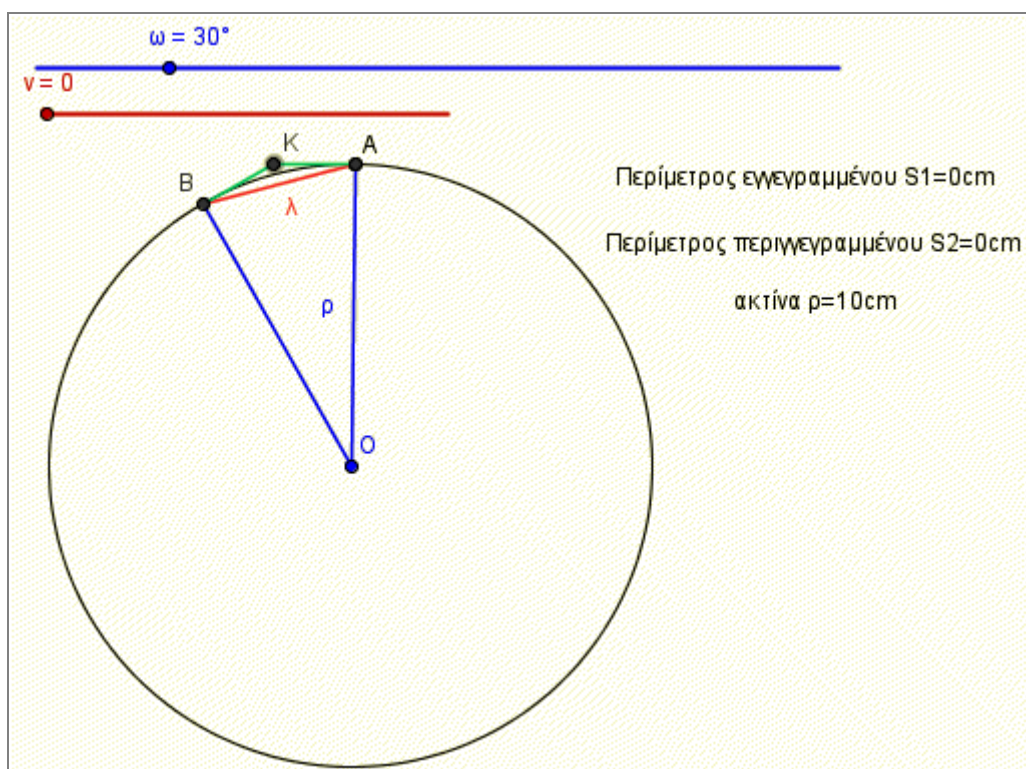


Ενδιαφέρον παρουσιάζει η μελέτη της καμπύλης που γράφει το σημείο με συντεταγμένες (λ , c). Η καμπύλη που προκύπτει δεν αντιστοιχεί σε συνάρτηση και είναι μία πρώτη τάξεως ευκαιρία να διαπραγματευτούν οι μαθητές την έννοια της αντίστροφης συνάρτησης και της προϋποθέσεις ύπαρξής της.

2.3.4 ΚΑΝΟΝΙΚΑ ΠΟΛΥΓΩΝΑ

Φύλλο εργασίας

Στην οθόνη προβάλλονται δύο μεταβολείς, ω και ν , ένας κύκλος ακτίνας ρ , μία επίκεντρη γωνία ω , την χορδή λ και τα τμήματα AK και KB που εφάπτονται στον κύκλο στα άκρα της χορδής. Ακόμη προβάλλονται οι μετρήσεις $S1$, $S2$ που μας δείχνουν την περίμετρο των πολυγώνων που δημιουργούνται καθώς περιστρέφεται η χορδή.



Να μεταβάλλετε τις τιμές του μεταβολέα ν .

ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ ΓΙΑ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ

1. Πόσες περιστροφές πρέπει να εκτελέσει η χορδή λ ώστε να επανέλθει στην αρχική της θέση; Ποιο κανονικό πολύγωνο μπορεί να κατασκευαστεί αν το λ αφήνει το ίχνος του;
2. Να αλλάξετε την τιμή της γωνίας ω . Να διερευνήσετε για ποιες τιμές της γωνίας ω κατασκευάζεται ισόπλευρο τρίγωνο, τετράγωνο, κανονικό εξάγωνο, πεντάγωνο.
3. Να βρείτε ένα τύπο για την γωνία ω με τον οποίο μπορούμε εκ των προτέρων να γνωρίζουμε ποια γωνία θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε για να κατασκευάσουμε οποιοδήποτε νίγωνο.
4. Με γωνία $\omega=60^\circ$ να εμφανίσετε τα ίχνη των τμημάτων λ , KB και KA . Να παρατηρήσετε και καταγράψετε τις μετρήσεις $S1$ και $S2$. Να επαναλάβετε για μικρότερες γωνίες, π.χ 40° , 30° . Τι παρατηρείτε;

5. Ποια σχέση έχουν οι τιμές των S_1 και S_2 με την περίμετρο του κύκλου;
6. Να επαναλάβετε αλλάζοντας τις τιμές της ακτίνας ρ .

Οδηγίες για την υλοποίηση της δραστηριότητας

Προετοιμασία

Η διάρκεια της δραστηριότητας είναι μία διδακτική ώρα και μπορεί να υλοποιηθεί ως εισαγωγή στο κεφάλαιο των κανονικών πολυγώνων.

Οι μαθητές θα πρέπει να γνωρίζουν την διαδικασία δημιουργίας ίχνους ενός σημείου.

Η υλοποίηση

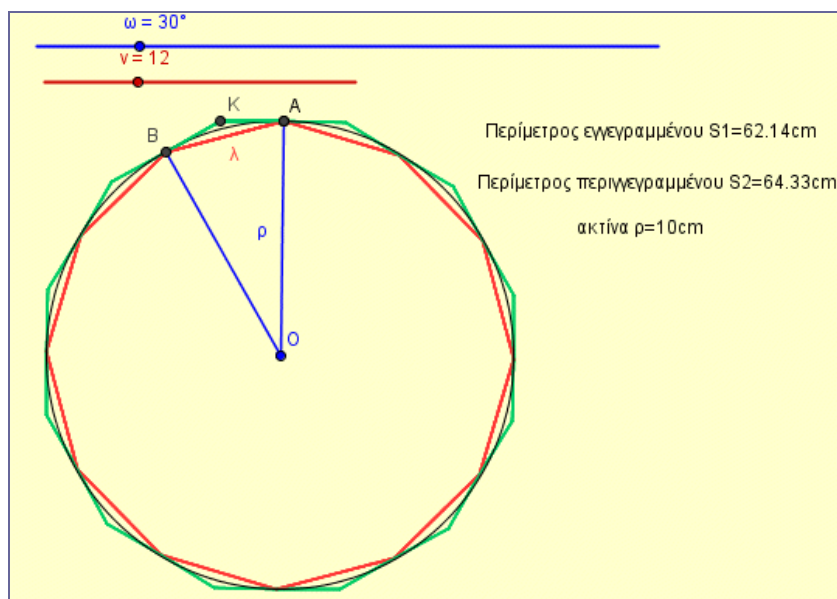
Οι μαθητές αρχικά μεταβάλλουν τις τιμές του μεταβολέα n και παρατηρούν ότι μετά από 12 περιστροφές το λ επανέρχεται στην αρχική του θέση. Αυτό σημαίνει ότι κατασκευάζεται κανονικό δωδεκάγωνο.

Αλλάζοντας την γωνία σε 60° θα παρατηρήσουν ότι κατασκευάζεται κανονικό εξάγωνο. Εδώ θα πρέπει να ζητήσει ο διδάσκων να χρησιμοποιήσουν ακατάλληλες γωνίες π.χ 50° ώστε να κατανοήσουν ότι δεν κατασκευάζεται κανονικό πολύγωνο για οποιαδήποτε τιμή της γωνίας ω .

Στην τρίτη ερώτηση, και με βάση την μέχρι τώρα δραστηριότητα των μαθητών, θα προκύψει η διαπίστωση ότι το μέτρο της γωνίας ω θα πρέπει να είναι διαιρέτης του 360.

Στην τέταρτη ερώτηση οι μαθητές θα εμφανίσουν τα ίχνη των τμημάτων και θα διαπιστώσουν ότι κατασκευάζεται ένα εγγεγραμμένο και ένα περιγεγραμμένο πολύγωνο των οποίων οι περίμετροι έχουν μία διαφορά. Η διαφορά αυτή τείνει να μηδενιστεί καθώς ελαττώνεται η τιμή της γωνίας ω , δηλαδή καθώς αυξάνεται το πλήθος των πλευρών του πολυγώνου.

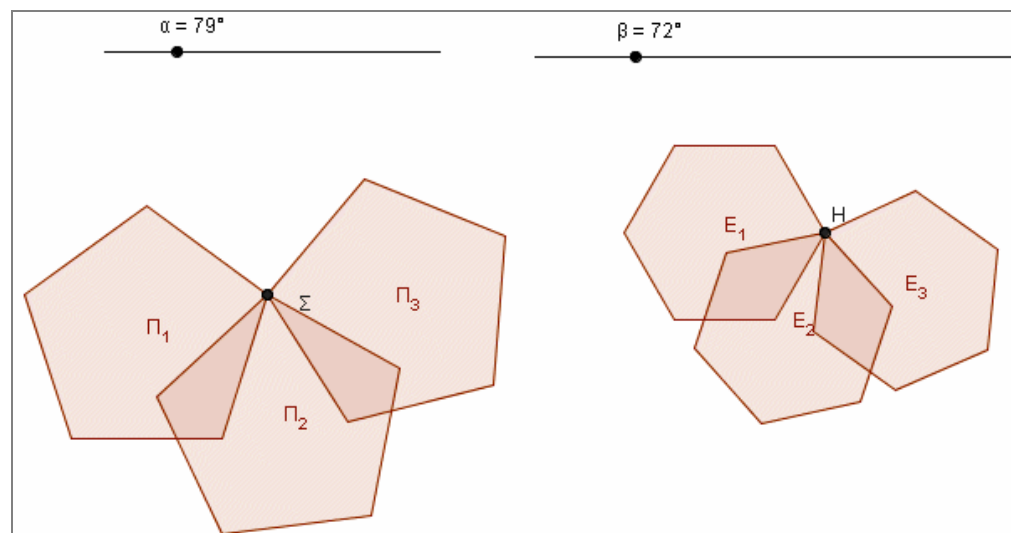
Στις δύο τελευταίες ερωτήσεις οι μαθητές θα οδηγηθούν στο συμπέρασμα ότι οι περίμετροι ενός εγγεγραμμένου και ενός περιγεγραμμένου πολυγώνου σε κύκλο έχουν όριο την περίμετρο του κύκλου.



2.3.5 ΔΙΑΚΟΣΜΗΤΙΚΑ ΜΟΤΙΒΑ

Φύλλο εργασίας

Στην οθόνη προβάλλονται δύο συνθέσεις κάθε μία από τις οποίες κατασκευάζεται από ένα κανονικό πολύγωνο και δύο μεταβολείς γωνιών α , β . Στην ουσία το Π_2 προκύπτει από το Π_1 με περιστροφή κατά γωνία α γύρω από το σημείο Σ . Το Π_3 προκύπτει από το Π_2 με όμοια τρόπο. Με τον ίδιο τρόπο προκύπτει και το E_2 από το E_1 όπως και το E_3 από το E_2 , μόνο που εδώ η περιστροφή γίνεται κατά γωνία β .



Να μεταβάλλετε τις τιμές του μεταβολέα α και στη συνέχεια του μεταβολέα β .

ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ ΓΙΑ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ

1. Για ποια τιμή της γωνίας α τα τρία πεντάγωνα γίνονται διαδοχικά. Δηλαδή δεν επικαλύπτει το ένα το άλλο.
2. Ποια σχέση έχει αυτή η τιμή της γωνίας με τα χαρακτηριστικά του κανονικού πολυγώνου;
3. Για ποια τιμή της γωνίας β τα τρία εξάγωνα γίνονται διαδοχικά. Δηλαδή δεν επικαλύπτει το ένα το άλλο.
4. Ποια σχέση έχει αυτή η τιμή της γωνίας με τα χαρακτηριστικά του κανονικού εξαγώνου;
5. Θέλουμε να καλύψουμε ένα δάπεδο με πλακίδια, σχήματος κανονικού πολυγώνου, του ίδιου είδους. Ποιο από τα δύο κανονικά πολύγωνα είναι το καταλληλότερο;
6. Υπάρχουν και άλλα κανονικά πολύγωνα που είναι κατάλληλα για την επικάλυψη αυτή;

Οδηγίες για την υλοποίηση της δραστηριότητας

Προετοιμασία

Η διάρκεια της δραστηριότητας είναι μία διδακτική ώρα και μπορεί να υλοποιηθεί ως εφαρμογή στο τέλος του κεφαλαίου των κανονικών πολυγώνων.

Οι μαθητές θα πρέπει να γνωρίζουν τον τρόπο υπολογισμού της γωνίας ενός κανονικού νιγώνου. Ακόμη θα πρέπει να γνωρίζουν τον τρόπο περιστροφής ενός γεωμετρικού σχήματος γύρω από ένα σημείο κατά δοσμένη γωνία καθώς και την διαδικασία απόκρυψης ετικετών και αντικειμένων από την οθόνη.

Η υλοποίηση

Οι μαθητές αρχικά μεταβάλλουν τις τιμές του μεταβολέα α και παρατηρούν ότι στις 108° τα τρία κανονικά πεντάγωνα γίνονται διαδοχικά. Εδώ οι μαθητές θα συνδέσουν την γωνία περιστροφής αυτή με την γωνία του κανονικού πενταγώνου που και αυτή είναι ίση με 108° .

Στο σημείο αυτό καλό θα είναι ο διδάσκων να επισημάνει στους μαθητές ότι δεν είναι δυνατόν να 'χωρέσει' και τέταρτο πεντάγωνο στο κενό που έχει απομείνει.

Στην τρίτη ερώτηση οι μαθητές θα διαπιστώσουν ότι στις 120° όχι μόνο τα εξάγωνα γίνονται διαδοχικά αλλά καλύπτουν πλήρως την περιοχή γύρω από το σημείο Η.

Στην τέταρτη ερώτηση θα πρέπει να καταλήξουν στο συμπέρασμα ότι η γωνία φ του κανονικού πολυγώνου θα πρέπει να είναι διαιρέτης του 360 για να μην δημιουργούνται κενά γύρω από το σημείο περιστροφής. Στην συνέχεια θα συμπεράνουν ότι μόνα το κανονικό εξάγωνο, το ισόπλευρο τρίγωνο και το τετράγωνο ικανοποιούν την προηγούμενη συνθήκη.

3 ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

3.1 ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

3.1.1 Σύντομη περιγραφή των σεναρίων

Οι δραστηριότητες του σεναρίου των διανυσμάτων μπορούν να υποστηρίξουν την διδασκαλία του σχετικού κεφαλαίου, συγχρόνως όμως δίνουν την δυνατότητα στον διδάσκοντα να τις μετασχηματίσει ή να τις συμπληρώσει ώστε να επεκτείνει το μαθηματικό τους περιεχόμενο.

Το σενάριο αποτελείται από 3 δραστηριότητες διαφορετικού ύφους και στοχοθεσίας όμως όλες μαζί διαγράφουν μία πορεία από τις απλές κατασκευές μέχρι και την διερεύνηση παραμετρικών περιπτώσεων. Οι δραστηριότητες θα μπορούσαν να κλιμακωθούν από πολύ απλές, με στόχο την κατανόηση της προβλεπόμενης θεωρίας, έως και εντελώς διερευνητικές και σύνθετες, με στόχο την επέκταση των γνώσεων των μαθητών.

Η πρώτη δραστηριότητα αφορά σε μία σειρά από απλές κατασκευές που θα μπορούσαν να αναδείξουν με δυναμικό τρόπο την σχέση των συντεταγμένων των παραλλήλων και των καθέτων διανυσμάτων. Ακόμη αναδεικνύει την σχέση που συνδέει τις συντεταγμένες δύο διανυσμάτων τόσο με το άθροισμα όσο και με την διαφορά τους.

Στην δεύτερη δραστηριότητα οι μαθητές θα επινοήσουν έναν τρόπο να υπολογίζουν την γωνία δύο ευθειών με την βοήθεια του εσωτερικού γινομένου διανυσμάτων παραλλήλων προς τις δύο ευθείες. Το λογισμικό δίνει την δυνατότητα του υπολογισμού της γωνίας όταν είναι γνωστός ένας τριγωνομετρικός αριθμός, όπως για παράδειγμα το συνημίτονο στην περίπτωση του εσωτερικού γινομένου.

Στην τρίτη δραστηριότητα οι μαθητές θα ερευνήσουν τον γεωμετρικό τόπο του άκρου ενός διανύσματος. Το διάνυσμα αυτό είναι το άθροισμα ενός σταθερού και ενός μεταβαλλόμενου. Το λογισμικό θα τους επιτρέψει τον εντοπισμό του πιθανού γεωμετρικού τόπου και στην συνέχεια θα ακολουθήσει μία αυστηρή μαθηματική απόδειξη με βάση όμως τις ενδείξεις του λογισμικού.

3.1.2 Στόχοι:

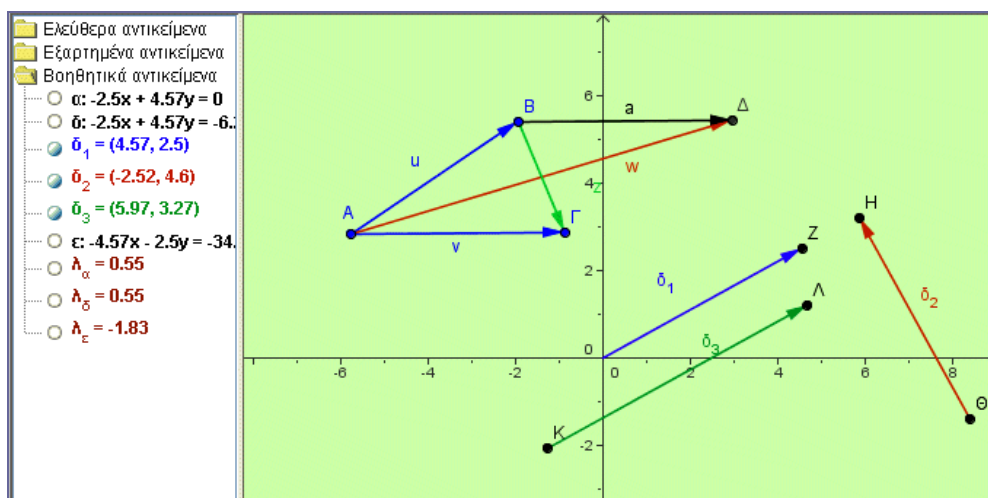
Οι μαθητές μέσα από τις δραστηριότητες που αφορούν στα κανονικά πολύγωνα:

- Θα εντοπίσουν την σχέση που συνδέει τις συντεταγμένες διανυσμάτων που είναι κάθετα ή παράλληλα..
- Θα κατασκευάσουν μία διαδικασία για να υπολογίζουν την γωνία δύο ευθειών με την βοήθεια διανυσμάτων.
- Θα μελετήσουν την καμπύλη που διαγράφει το άκρο ενός εξαρτημένου διανύσματος.
- Θα εμπλακούν σε δραστηριότητες αυστηρά μαθηματικής απόδειξης.

3.1.3 ΠΑΡΑΛΛΗΛΑ-ΚΑΘΕΤΑ ΔΙΑΝΥΣΜΑ

Φύλλο εργασίας

Στην οθόνη προβάλλονται μία σειρά από διανύσματα και σημεία που καθορίζουν τα άκρα των διανυσμάτων. Ο στόχος μας είναι να μελετήσουμε την σχέση που έχουν οι συντεταγμένες των διανυσμάτων στην περίπτωση του αθροίσματος, της διαφοράς, της καθετότητας και της παραλληλίας.



ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ ΓΙΑ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ

- 1) Να μεταβάλετε τα διανύσματα AB και AG. Ποια σχέση συνδέει τις συντεταγμένες των διανυσμάτων αυτών με τις συντεταγμένες των AD και BG;
- 2) Να εξετάσετε αν το τετράπλευρο ABΔΓ είναι παραλληλόγραμμο.
- 3) Να εμφανίσετε τις ευθείες α, δ, ε από τα βοηθητικά αντικείμενα. Με βάση τις μετρήσεις των κλίσεων των ευθειών λ_a , λ_δ , λ_ϵ να εκτιμήσετε την σχέση που υπάρχει μεταξύ τους. Τι σχέση έχουν τα διανύσματα δ_1 , δ_2 , δ_3 ;
- 4) Να εμφανίσετε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων αυτών. Ποια σχέση έχουν οι συντεταγμένες τους;

Οδηγίες για την υλοποίηση της δραστηριότητας

Προετοιμασία

Η διάρκεια της δραστηριότητας είναι μία διδακτική ώρα και μπορεί να υλοποιηθεί για την υποστήριξη της διδασκαλίας των διανυσμάτων.

Οι μαθητές θα πρέπει να γνωρίζουν την εμφάνιση της τιμής ενός διανύσματος από το menu των ιδιοτήτων.

Ακόμη θα πρέπει να γνωρίζουν την έννοια των συντεταγμένων ενός διανύσματος και την γεωμετρική πρόσθεση δύο διανυσμάτων (κανόνας του παραλληλογράμμου)

Η υλοποίηση

Ο διδάσκων στην αρχή ζητά από τους μαθητές να κλείσουν τους φακέλους των ελεύθερων και εξαρτημένων αντικειμένων και να περιοριστούν στα βοηθητικά αντικείμενα.

Στην συνέχεια σύροντας τα άκρα Β και Γ οι μαθητές παρατηρούν και σχολιάζουν τις μεταβολές των ΑΔ και ΒΓ εκτιμώντας ότι πρόκειται για το γεωμετρικό άθροισμα και την διαφορά των u και v διανυσμάτων.

Ακολούθως ο διδάσκων ζητά από τους μαθητές να εμφανίσουν τις συντεταγμένες όλων των διανυσμάτων αυτών και να μεταβάλουν τα διανύσματα u , v σύροντας τα άκρα τους. Οι μαθητές αναμένεται να παρατηρήσουν ότι οι συντεταγμένες του διανύσματος ΑΔ είναι ίσες με το άθροισμα των συντεταγμένων των u και v ενώ οι συντεταγμένες του διανύσματος ΒΓ είναι ίσες με την διαφορά τους.

Με βάση τα προηγούμενα μπορούν να δικαιολογήσουν γιατί το τετράπλευρο ΑΒΔΓ είναι παραλληλόγραμμο.

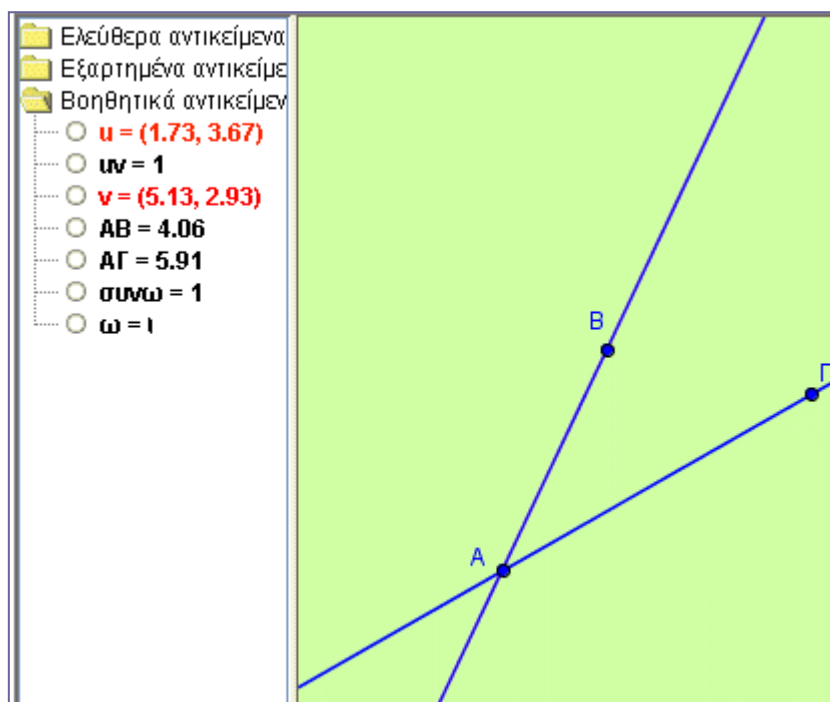
Στην συνέχεια οι μαθητές εμφανίζουν τις ευθείες a , δ , ϵ από τα βοηθητικά αντικείμενα, μεταβάλουν την θέση τους και παρατηρούν τις μετρήσεις των κλίσεων των ευθειών λ_a , λ_δ , λ_ϵ . Αναμένετε να παρατηρήσουν ότι $\lambda_a = \lambda_\delta$ ενώ $\lambda_a \cdot \lambda_\epsilon = -1$.

Καθώς οι μαθητές μεταβάλλουν το διάνυσμα δ_1 ή μετακινούν τα δ_2 και δ_3 μελετούν την σχέση των συντεταγμένων τους και διαπιστώνουν ότι για τα δ_1 και δ_2 οι συντεταγμένες τους είναι ανάλογες ενώ για τα δ_1 και δ_3 το άθροισμα των γινομένων των αντιστοίχων συντεταγμένων είναι πάντα 0.

3.1.4 ΓΩΝΙΑ ΕΥΘΕΙΩΝ ΚΑΙ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ

Φύλλο εργασίας

Δίνονται οι ευθείες ε_1 και ε_2 οι οποίες τέμνονται στο σημείο Α. Πάνω στις ευθείες βρίσκονται τα σημεία Β και Γ. Το πρόβλημα που τίθεται είναι το εξής: Με ποιο τρόπο θα υπολογίσουμε την γωνία των δύο ευθειών χρησιμοποιώντας τις γνώσεις που διαθέτουμε από το κεφάλαιο των διανυσμάτων.



ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ ΓΙΑ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ

- 1) Να εμφανίσετε τα διανύσματα ΑΓ και ΑΒ, δηλαδή τα u , v . Να υπολογίσετε το εσωτερικό τους γινόμενο επαναπροσδιορίζοντας τον αριθμό uv που υπάρχει στα βοηθητικά αντικείμενα.
- 2) Να δημιουργήσετε το πηλίκο του εσωτερικού γινομένου uv προς το γινόμενο $AB \cdot AG$ των μέτρων των δύο διανυσμάτων. Τι εκφράζει το πηλίκο αυτό; Να χρησιμοποιήσετε τον αριθμό $\cos\omega$ που βρίσκεται στα βοηθητικά αντικείμενα για να εκφράσετε το παραπάνω πηλίκο.
- 3) Όταν γνωρίζουμε το συνημίτονο μιας γωνίας τότε μπορούμε να υπολογίσουμε την γωνία αν ζητήσουμε από το λογισμικό να υπολογίσει την έκφραση $\arccos(\cos\omega)$. Να υπολογίσετε την γωνία της οποίας το συνημίτονο είναι το προηγούμενο γινόμενο.
- 4) Να περιγράψετε έναν αλγόριθμο με τον οποίο θα μπορούμε για δύο οποιεσδήποτε ευθείες να υπολογίζουμε την γωνία τους.

Οδηγίες για την υλοποίηση της δραστηριότητας

Προετοιμασία

Η διάρκεια της δραστηριότητας είναι μία διδακτική ώρα και μπορεί να υλοποιηθεί ως εφαρμογή στην παράγραφο που αναφέρεται στο εσωτερικό γινόμενο διανυσμάτων και την γωνία τους.

Οι μαθητές θα πρέπει να γνωρίζουν την έννοια των συντεταγμένων ενός διανύσματος.

Τέλος θα πρέπει να γνωρίζουν τον τύπο που δίνει το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων όταν είναι γνωστές οι συντεταγμένες των κορυφών του.

Η υλοποίηση

Στους μαθητές δίνεται ένα αρχείο στο οποίο περιέχονται δύο τεμνόμενες ευθείες. Το ζητούμενο είναι να επινοήσουν έναν τρόπο για να μετρούν την γωνία των δύο ευθειών χρησιμοποιώντας αποκλειστικά δύο κατάλληλα διανύσματα.

Εδώ οι μαθητές θα πρέπει να κατασκευάσουν το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων που δημιουργούνται από σημεία που βρίσκονται πάνω στις ευθείες. Για να κατασκευαστεί το εσωτερικό γινόμενο αρκεί να χρησιμοποιήσουν τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $x(A)$, $x(B)$, $y(A)$, $y(B)$ και να εφαρμόσουν τον αντίστοιχο τύπο.

Ο διδάσκων θα διαπραγματευτεί με τους μαθητές τα παραπάνω και στην συνέχεια θα υπογραμμίσει ότι τα βοηθητικά αντικείμενα uv , $\sin\omega$ και ω θα χρησιμοποιηθούν για να εκφράσουν το εσωτερικό γινόμενο, το συνημίτονο της γωνίας και τέλος την ίδια την γωνία των δύο ευθειών.

Στην αρχή θα επαναπροσδιορίσουν τον αριθμό uv πληκτρολογώντας τον τύπο $x(A) \cdot x(B) + y(A) \cdot y(B)$.

Στην συνέχεια θα κατασκευάσουν το ημίτονο του εσωτερικού γινομένου προς το γινόμενο των μέτρων των διανυσμάτων επαναπροσδιορίζοντας τον αριθμό $\sin\omega$. Ο λόγος των δύο ποσοτήτων θα εκφράζει το συνημίτονο της γωνίας των δύο διανυσμάτων άρα και των ευθειών.

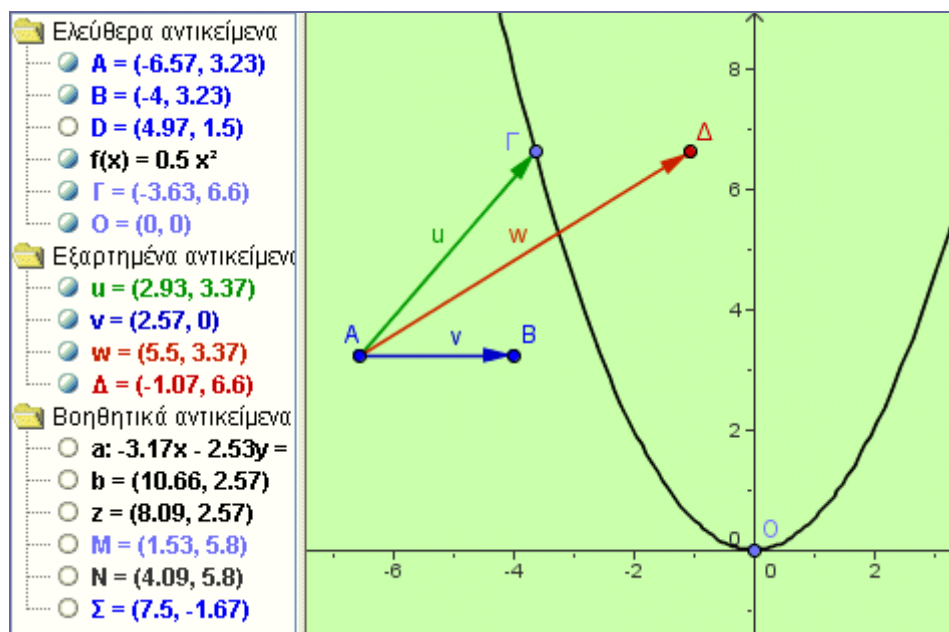
Τέλος οι μαθητές θα ζητήσουν από το λογισμικό να υπολογίζει το τόξο συνημιτόνου του τελευταίου αυτού αριθμού. Η ποσότητα αυτή θα εκφράζει και την γωνία των δύο διανυσμάτων.

Εδώ είναι απαραίτητο να προηγηθεί συζήτηση με τους μαθητές στην οποία ο διδάσκων θα επισημάνει ότι τον ρόλο του πίνακα τιμών για τον υπολογισμό γωνίας από το συνημίτονό της τον έχει πλέον το λογισμικό.

3.1.5 ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΣ ΤΟΠΟΣ

Φύλλο εργασίας

Στην οθόνη εμφανίζεται ένα σταθερό διάνυσμα AB , μία παραβολή, ένα διάνυσμα $A\Gamma$, του οποίου το άκρο Γ κινείται πάνω στην παραβολή και ένα διάνυσμα $A\Delta$.



ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ ΓΙΑ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ

- 1) Να βρείτε την σχέση που συνδέει τα τρία διανύσματα.
- 2) Να εμφανίσετε το ίχνος του σημείου Δ και να σύρετε το σημείο Γ . Τι σχέση έχει η καμπύλη που γράφει το σημείο Δ με την αρχική παραβολή;
- 3) Να μεταβάλετε το διάνυσμα AB , αφού πρώτα αλλάξετε την ιδιότητά του να είναι σταθερό. Ποια σχέση έχει η νέα καμπύλη που θα γράψει το σημείο Δ με την αρχική καμπύλη.
- 4) Να δικαιολογήσετε τα συμπεράσματά σας με αυστηρά μαθηματικό τρόπο.
- 5) Να μελετήσετε την περίπτωση που το σημείο κινείται πάνω σε μία ευθεία. Να αποκρύψετε τα διανύσματα u , w και τα σημεία Γ , Δ καθώς και την παραβολή. Να εμφανίσετε όλα τα βοηθητικά αντικείμενα.

Οδηγίες για την υλοποίηση της δραστηριότητας

Προετοιμασία

Η διάρκεια της δραστηριότητας είναι μία διδακτική ώρα και μπορεί να υλοποιηθεί ως εφαρμογή στο τέλος του κεφαλαίου των διανυσμάτων.

Οι μαθητές θα πρέπει να γνωρίζουν την εμφάνιση των συντεταγμένων ενός σημείου και την δημιουργία του ίχνους του.

Η υλοποίηση

Η δραστηριότητα που ακολουθεί θα μπορούσε να χαρακτηριστεί διερευνητική αφού δεν είναι δυνατόν να απαντηθούν τα ερωτήματά της άμεσα ενώ συγχρόνως επιτρέπει μετασχηματισμό των ερωτημάτων και των δεδομένων.

Η διερεύνηση αφορά στην συμπεριφορά του αθροίσματος δύο διανυσμάτων με κοινή σταθερή αρχή όταν το ένα από αυτά έχει σταθερό πέρας ενώ στο άλλο διάνυσμα το πέρας του κινείται πάνω σε μία συγκεκριμένη καμπύλη ή ευθεία.

Ας υποθέσουμε ότι τα σημεία A, B είναι σταθερά ενώ το σημείο Γ κινείται πάνω σε μία παραβολή. Το βασικό ερώτημα που τίθεται είναι σε ποια καμπύλη επάνω κινείται το άθροισμα των διανυσμάτων AB και AΓ.

Οι μαθητές στο πρώτο ερώτημα θα εμφανίσουν τις συντεταγμένες των τριών διανυσμάτων και θα διαπιστώσουν ότι το w είναι το άθροισμα το δύο άλλων διανυσμάτων. Εδώ ο διδάσκων μπορεί να τους ζητήσει να εντοπίσουν την εξίσωση της παραβολής, κάτι που είναι πολύ χρήσιμο στην συνέχεια.

Ο εντοπισμός της εξίσωσης μπορεί να γίνει είτε από τον χώρο της άλγεβρας, είτε κάνοντας δεξί κλικ πάνω στην παραβολή.

Στην δεύτερη ερώτηση οι μαθητές θα εμφανίσουν το ίχνος του σημείου Δ και θα σύρουν το Γ πάνω στην παραβολή. Η καμπύλη που θα προκύψει αναμένεται να αναγνωριστεί ως μία παραβολή η οποία έχει προκύψει από την αρχική με μεταφορά κατά διάνυσμα $AB=v$.

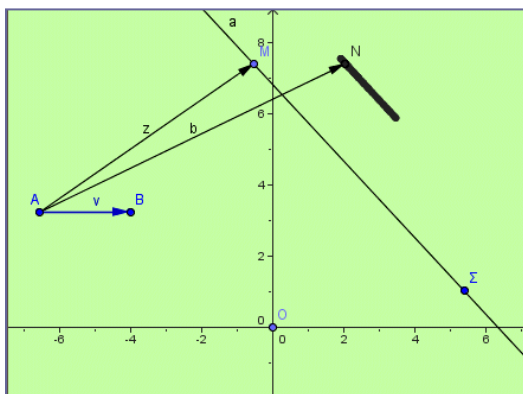
Στην τρίτη ερώτηση οι μαθητές θα αναιρέσουν την σταθερότητα του σημείου B και θα το σύρουν. Θα παρατηρήσουν ότι το Δ γράφει και πάλι μία παραβολή που είναι στην ουσία μεταφορά της αρχικής κατά διάνυσμα $AB=v$.

Η αυστηρά μαθηματική απόδειξη θα μπορούσε να γίνει ως εξής:

Αν $A(\alpha, \beta)$, $\Gamma(\chi_1, \psi_1)$ και $AB=(\kappa, \lambda)$ τότε το διάνυσμα AΓ έχει συντεταγμένες $(\chi_1 - \alpha, \psi_1 - \beta)$ και ισχύει $\psi_1 = 0,5 \cdot \chi_1^2$

Το διάνυσμα AΔ έχει συντεταγμένες $(\chi_1 - \alpha + \kappa, \psi_1 - \beta + \lambda)$ οι συντεταγμένες του Δ είναι $(\chi_1 + \kappa, \psi_1 + \lambda)$

Αν θέσουμε $\chi = \chi_1 + \kappa$ και $\psi = \psi_1 + \lambda$ τότε $(\psi - \lambda) = 0,5(\chi - \kappa)^2$. Αυτό σημαίνει ότι το σημείο (χ, ψ) κινείται σε καμπύλη που έχει προκύψει από μεταφορά της $\psi = 0,5 \cdot \chi^2$ κατά το διάνυσμα AB.



Η τελευταία ερώτηση αποτελεί μία επέκταση της δραστηριότητας αφού οι μαθητές θα πρέπει να αποκρύψουν ή να διαγράψουν την παραβολή και τα διανύσματα u, w καθώς και τα σημεία Γ και Δ. Στην συνέχεια θα εμφανίσουν όλα τα βοηθητικά αντικείμενα και θα αρχίσουν νέα διερεύνηση.

3.2 ΕΥΘΕΙΕΣ

3.2.1 Σύντομη περιγραφή του σεναρίου

Οι δραστηριότητες του σεναρίου των ευθειών μπορούν να υποστηρίξουν την διδασκαλία του σχετικού κεφαλαίου, συγχρόνως όμως δίνουν την δυνατότητα στον διδάσκοντα να τις μετασχηματίσει ή να τις συμπληρώσει ώστε να επεκτείνει το μαθηματικό τους περιεχόμενο.

Το σενάριο αποτελείται από 4 δραστηριότητες διαφορετικού ύφους και στοχοθεσίας όμως όλες μαζί διαγράφουν μία πορεία από τις απλές κατασκευές μέχρι και την διερεύνηση παραμετρικών περιπτώσεων.

Η πρώτη δραστηριότητα αφορά στην κατασκευή ευθείας παράλληλης ή κάθετης σε διάνυσμα. Το λογισμικό προβάλλει το διάνυσμα και τις εξισώσεις των ευθειών με τρόπο που είναι εμφανής η σχέση των συντεταγμένων του διανύσματος με τους συντελεστές κάθε ευθείας.

Στην δεύτερη δραστηριότητα οι μαθητές θα λύσουν μία άσκηση του σχολικού βιβλίου, που αναφέρετε στο εμβαδόν τριγώνου, με την βοήθεια των μετρήσεων από το λογισμικό. Στην συνέχεια θα επεξεργαστούν το θέμα μέσα σε ένα συναρτησιακό πλαίσιο γραφικής παράστασης.

Στην τρίτη δραστηριότητα οι μαθητές θα ερευνήσουν τον γεωμετρικό τόπο του σημείου τομής δύο παραμετρικών ευθειών. Εδώ θα χρησιμοποιήσουν την δυνατότητα να εμφανίζεται το ίχνος ενός κινούμενου σημείου.

Στην τέταρτη δραστηριότητα οι παράμετροι που εισάγονται σε μία εξίσωση ευθείας δεν είναι πλέον απλοί τυχαίοι πραγματικοί αριθμοί αλλά τιμές τριγωνομετρικών συναρτήσεων.

3.2.2 Στόχοι

Οι μαθητές μέσα από τις δραστηριότητες που αφορούν στα κανονικά πολύγωνα:

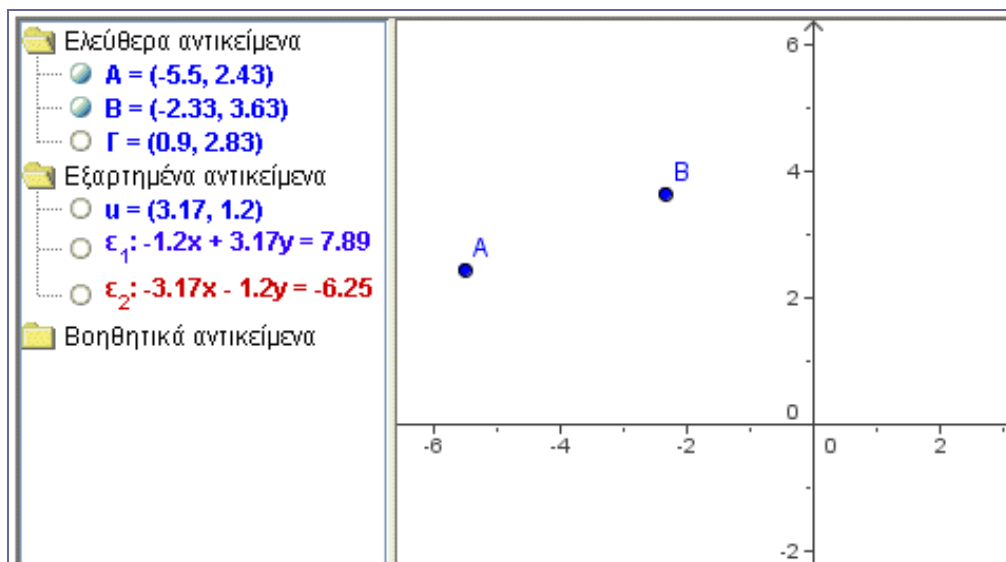
- Θα εντοπίσουν και θα αποδείξουν την σχέση που συνδέει τις συντεταγμένες διανύσματος με τους συντελεστές τόσο της κάθετης όσο και της παράλληλης προς αυτό ευθείας.
- Θα μελετήσουν τον γεωμετρικό τόπο σημείου τομής παραμετρικών ευθειών
- Θα χρησιμοποιήσουν το λογισμικό μέσα στα πλαίσια των σχολικών τους υποχρεώσεων αλλά και ως εργαλείο επέκτασης και διερεύνησης.
- Θα εμπλακούν σε δραστηριότητες απόδειξης πιθανών σχέσεων που υποδεικνύει η συμπεριφορά των δυναμικών γεωμετρικών αντικειμένων στην οθόνη.

3.2.3 ΕΥΘΕΙΑ ΔΙΑΝΥΣΜΑ

Φύλλο εργασίας

Στην οθόνη εμφανίζονται:

Τα σημεία A, B, Γ το διάνυσμα u και οι εξισώσεις των ευθειών ε_1 και ε_2 στο παράθυρο των αντικειμένων.



Να εμφανίσετε το διάνυσμα u και το σημείο Γ. Να εμφανίσετε την ευθεία ε_1 που περνά από το Γ και είναι παράλληλη προς το διάνυσμα.

- 1) Να μεταβάλλετε το διάνυσμα u. Ποια σχέση συνδέει τις συντεταγμένες του διανύσματος με τους συντελεστές της ευθείας;
- 2) Πως μπορούμε να δικαιολογήσουμε την σχέση αυτή με αυστηρά μαθηματικό τρόπο;
- 3) Να εμφανίσετε την ευθεία ε_2 που είναι κάθετη στο διάνυσμα u και περνά από το Γ. Να μεταβάλλετε το διάνυσμα. Ποια σχέση φαίνεται να συνδέει τις συντεταγμένες του διανύσματος με τους συντελεστές της ευθείας;
- 4) Πως μπορούμε να δικαιολογήσουμε την σχέση αυτή με αυστηρά μαθηματικό τρόπο;

Οδηγίες για την υλοποίηση της δραστηριότητας

Προετοιμασία

Η διάρκεια της δραστηριότητας είναι μία διδακτική ώρα και μπορεί να υλοποιηθεί για την υποστήριξη της διδασκαλίας της παραγράφου 'Διάνυσμα παράλληλο ή κάθετο σε ευθεία'.

Οι μαθητές θα πρέπει να γνωρίζουν την διαδικασία εμφάνισης αντικειμένων από το αντίστοιχο παράθυρο.

Ακόμη θα πρέπει να γνωρίζουν την έννοια του συντελεστή διεύθυνσης διανύσματος και την γενική εξίσωση μιας ευθείας $Ax+By+\gamma=0$.

Η υλοποίηση

Οι μαθητές εμφανίζουν άμεσα ένα ελεύθερο διάνυσμα u και ένα ελεύθερο σημείο Γ . Στην συνέχεια εμφανίζουν την ευθεία (ϵ_1) που είναι παράλληλη στο διάνυσμα και την (ϵ_2) που είναι κάθετη.

Ο διδάσκων ζητά στους μαθητές να μεταβάλλουν το διάνυσμα και να εστιάσουν την προσοχή τους στις συντεταγμένες του διανύσματος και στους συντελεστές των δύο ευθειών. Οι μαθητές θα πρέπει να παρατηρήσουν και να σημειώσουν ότι αν το διάνυσμα θεωρηθεί ως (A, B) τότε η παράλληλη ευθεία έχει εξίσωση $Bx-Ay=\kappa$ ενώ η κάθετη έχει εξίσωση $Ax+By=\lambda$.

Τέλος σε κάθε περίπτωση οι μαθητές κάνουν μία γενική απόδειξη με βάση την ισότητα των συντελεστών διεύθυνσης, στην παράλληλη ευθεία, και το γεγονός ότι το γινόμενο των συντελεστών είναι ίσο με -1 στην κάθετη ευθεία.

3.2.4 ΕΜΒΑΔΟΝ ΤΡΙΓΩΝΟΥ

Φύλλο εργασίας

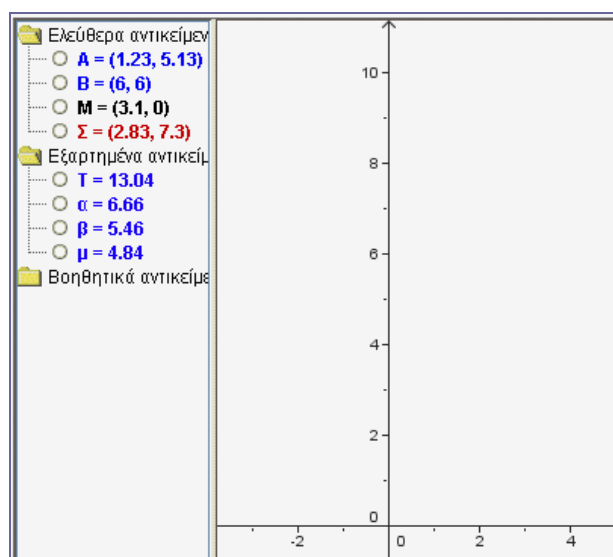
Με την βοήθεια του λογισμικού μπορούμε να επεξεργαστούμε τα περισσότερα από τα προβλήματα που περιέχει το σχολικό βιβλίο. Η επεξεργασία αυτή μπορεί να γίνει με διαφορετικούς τρόπους όπως θα δούμε στην συνέχεια.

Ας επιχειρήσουμε λοιπόν να λύσουμε την παρακάτω άσκηση του βιβλίου:

«Δίνονται τα σημεία $A(3, 4)$ και $B(6, 6)$ να βρεθεί σημείο M του άξονα $x'x$ ώστε $(AMB)=7$ ».

Στην οθόνη εμφανίζονται:

Τα σημεία A, B, M, Σ το εμβαδόν T του τριγώνου AMB , καθώς και τα μήκη α, β, μ των τμημάτων, στο παράθυρο των αντικειμένων.



ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ ΓΙΑ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ

- 1) Να εμφανίσετε τα σημεία A και B και στην συνέχεια να τα οδηγήσετε στις θέσεις με συντεταγμένες $(3, 4)$ και $(6, 6)$ αντίστοιχα. Να εμφανίσετε το ελεύθερο σημείο M πάνω στον άξονα $x'x$. Να εμφανίσετε το πολύγωνο T , δηλαδή το τρίγωνο AMB .
- 2) Να μετακινήσετε το σημείο M ώστε η τιμή του εμβαδού του ABM να γίνει 7. Σε πόσα σημεία του άξονα το εμβαδόν γίνεται 7;
- 3) Να αποδείξετε με αυστηρά μαθηματικό τρόπο τα συμπεράσματά σας.

Μέχρι τώρα έχουμε λύσει το πρόβλημα του σχολικού βιβλίου. Το λογισμικό μας δίνει την δυνατότητα να διερευνήσουμε επιπλέον περιπτώσεις και να ανακαλύψουμε επιπλέον σχέσεις που αφορούν στο εμβαδόν αυτού του τριγώνου.

- 4) Να εμφανίσετε το σημείο Σ και να το επαναπροσδιορίσετε ώστε η τετμημένη του να είναι η τετμημένη του M και η τεταγμένη του το εμβαδόν του ABM , δηλαδή το T . Να μεταβάλετε την θέση του σημείου M πως μεταβάλλεται η θέση του Σ ; Ποια μορφή σχέσης φαίνεται να συνδέει την τετμημένη του M με το εμβαδόν του τριγώνου;

- 5) Να δημιουργήσετε το ίχνος του σημείου Σ. Ποια θα πρέπει να είναι η θέση του Α ώστε σε συμμετρικές θέσεις του Μ ως προς την αρχή των αξόνων το εμβαδόν του τριγώνου να είναι το ίδιο;

Οδηγίες για την υλοποίηση της δραστηριότητας

Προετοιμασία

Η διάρκεια της δραστηριότητας είναι μία διδακτική ώρα και μπορεί να υλοποιηθεί ως εφαρμογή στην παράγραφο που αναφέρεται στο εμβαδόν τριγώνου.

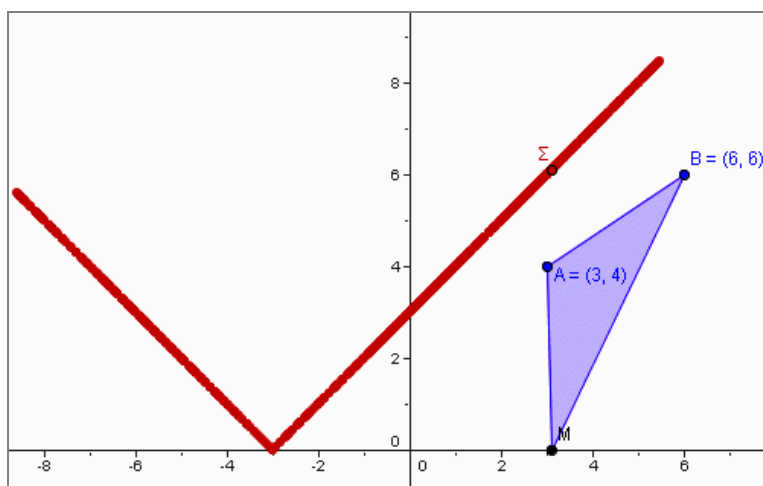
Οι μαθητές θα πρέπει να γνωρίζουν την διαδικασία δημιουργίας ενός σημείου με συντεταγμένες δύο αριθμούς ή δύο παραμέτρους. Ακόμη θα πρέπει να γνωρίζουν την δημιουργία ίχνους ενός σημείου και την κατασκευή ενός τριγώνου (πολυγώνου)

Τέλος θα πρέπει να γνωρίζουν τον τύπο που δίνει το εμβαδόν τριγώνου όταν είναι γνωστές οι συντεταγμένες των κορυφών του.

Η υλοποίηση

Οι μαθητές θα εμφανίσουν τα ελεύθερα σημεία Α, Β και το σημείο Μ πάνω στον άξονα χ'χ.

Στην συνέχεια θα εμφανίσουν το σημείο Σ και το τρίγωνο ΑΒΜ (πολύγωνο Τ) και θα επαναπροσδιορίσουν τις συντεταγμένες του σημείου Σ με την τεταγμένη του Μ και το εμβαδόν Τ του τριγώνου. Αυτό είναι εφικτό αρκεί να κάνουν δεξί κλικ πάνω στο σημείο και να πληκτρολογήσουν $\Sigma=(x(A), T)$.



Όταν το σημείο Μ κινείται πάνω στον χ'χ τότε το Σ γράφει δύο ευθείες.

Εδώ η λύση του αρχικού προβλήματος μπορεί να δοθεί άμεσα, ενώ είναι φανερό ότι το πρόβλημα επιδέχεται δύο λύσεις. Τώρα όμως η άσκηση γενικεύεται και ο μαθητής θα μπορούσε να υπολογίσει αλγεβρικά την εξίσωση της ευθείας ή των ευθειών πάνω στις οποίες κινείται το σημείο Σ οπότε μπορεί να εντοπίσει την θέση του σημείου Μ πάνω στον χ'χ για οποιαδήποτε τιμή του εμβαδού Τ.

Τέλος οι μαθητές θα παρατηρήσουν ότι αν τα σημεία Α, Β γίνουν συνευθειακά με την αρχή των αξόνων τότε η γραφική παράσταση που δημιουργεί το ίχνος του Σ περνά από την αρχή των αξόνων. Στην περίπτωση αυτή για συμμετρικές θέσεις του Μ έχουμε ίσα εμβαδά για το τρίγωνο.

3.2.5 ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΕΣ ΕΥΘΕΙΕΣ 1

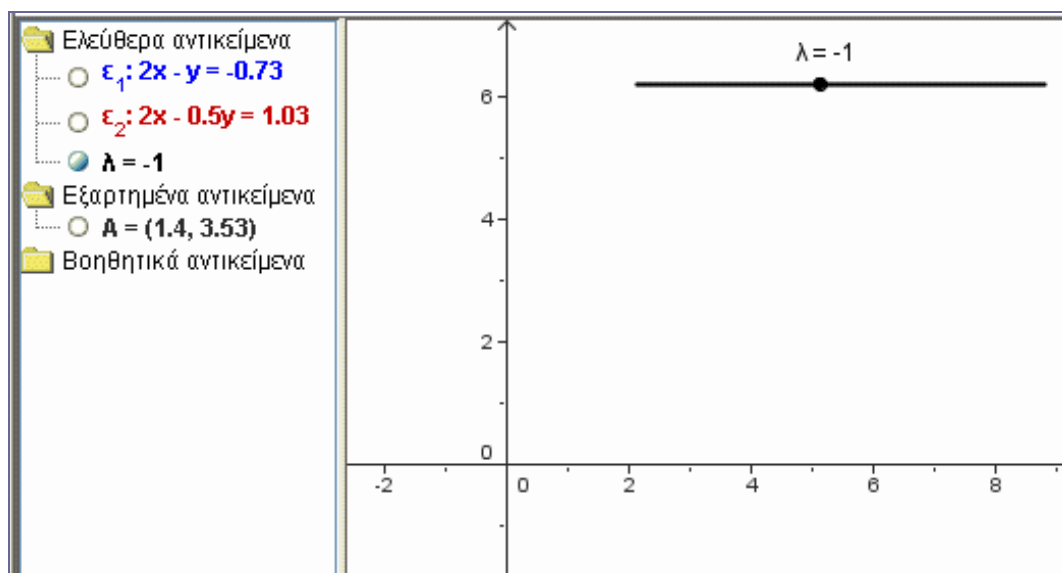
Φύλλο εργασίας

Είναι γνωστό ότι αν η εξίσωση μιας ευθείας περιέχει παράμετρο στην θέση του ενός ή και των δύο συντελεστών, ή και του σταθερού όρου, τότε η εξίσωσή της παριστάνει μία ομάδα ευθειών. Αν λοιπόν ορίσουμε μία παράμετρο μέσω ενός μεταβολέα και εισάγουμε την παράμετρο στην εξίσωση μιας ευθείας τότε αλλάζοντας τις τιμές με τον μεταβολέα μπορούμε να μελετήσουμε την συμπεριφορά της ευθείας αυτής.

Ας δημιουργήσουμε λοιπόν παραμετρικές ευθείες:

Στην οθόνη εμφανίζονται:

Ένας μεταβολέας λ και οι εξισώσεις των ευθειών ε_1 και ε_2 και ένα σημείο A στο παράθυρο των αντικειμένων.



Να εμφανίσετε τις ευθείες ε_1 και ε_2 . Να επαναπροσδιορίσετε τις ευθείες ως εξής:

$2\lambda x - y = -1$ και $2x - \frac{1}{\lambda+1}y = 1$ αντίστοιχα. Να εμφανίσετε το σημείο τομής των ευθειών

A .

ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ ΓΙΑ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ

- 1) Να μεταβάλετε τις τιμές του λ . Πως μεταβάλετε η θέση του σημείου τομής των ευθειών; Για ποια τιμή του λ το σημείο τομής βρίσκεται πάνω στον άξονα $x'x$;
- 2) Να δημιουργήσετε το ίχνος του σημείου τομής. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο του σημείου αυτού.
- 3) Να αποδείξετε με αυστηρά μαθηματικό τρόπο το συμπέρασμά σας από την προηγούμενη ερώτηση.

Οδηγίες για την υλοποίηση της δραστηριότητας

Προετοιμασία

Η διάρκεια της δραστηριότητας είναι μία ή δύο διδακτικές ώρες και μπορεί να υλοποιηθεί ως εφαρμογή στο τέλος του κεφαλαίου των ευθειών.

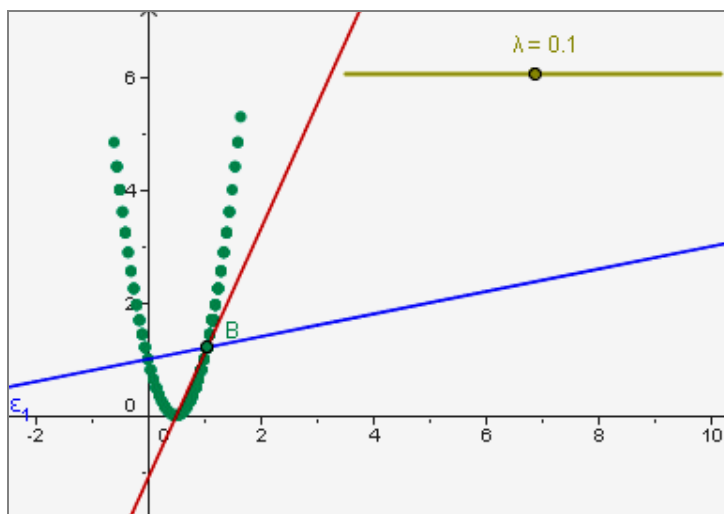
Οι μαθητές θα πρέπει να γνωρίζουν τον επαναπροσδιορισμό της εξίσωσης μιας ευθείας.

Ακόμη θα πρέπει να γνωρίζουν την διαδικασία λύσης ενός παραμετρικού συστήματος 2 επί 2 καθώς και την διαδικασία εύρεσης του γεωμετρικού τόπου ενός παραμετρικού σημείου μέσω της απαλοιφής της παραμέτρου.

Η υλοποίηση

Οι μαθητές αρχικά εισάγουν την παράμετρο λ στις δύο εξισώσεις και με την βοήθεια του μεταβολέα λ αλλάζουν τις θέσεις των ευθειών. Στο σημείο αυτό καλό θα είναι να ζητήσει ο διδάσκων από τους μαθητές να διερευνήσουν τις διάφορες θέσεις των δύο ευθειών καθώς αλλάζουν οι τιμές της παραμέτρου λ .

Στην συνέχεια εμφανίζουν το σημείο τομής των δύο ευθειών. Πριν εμφανίσουν το ίχνος του οι μαθητές θα διαπραγματευτούν για την γραμμή πάνω στην οποία φαίνεται να κινείται το συγκεκριμένο σημείο. Αυτή την εικασία θα ενισχύσουν ή θα απορρίψουν μέσω της πορείας που διαγράφει το ίχνος του σημείου.



Στην συνέχεια θα ασχοληθούν με την αλγεβρική επεξεργασία του προβλήματος λύνοντας το σύστημα των δύο ευθειών και επιβάλλοντας κατάλληλους περιορισμούς.

Επέκταση

Η δραστηριότητα θα μπορούσε να επεκταθεί σε παραμετρικές ευθείες με δύο ανεξάρτητες παραμέτρους (δύο μεταβολείς). Στα βοηθητικά αντικείμενα έχει ενσωματωθεί ένας μεταβολέας κ τον οποίο ο διδάσκων μπορεί να χρησιμοποιήσει κατά την επέκταση.

Εδώ ενδιαφέρον παρουσιάζει η μελέτη του τρόπου που αλλάζει ο γεωμετρικός τόπος του σημείου τομής όταν αλλάζει μόνο η μία παράμετρος.

3.2.6 ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΕΣ ΕΥΘΕΙΕΣ 2

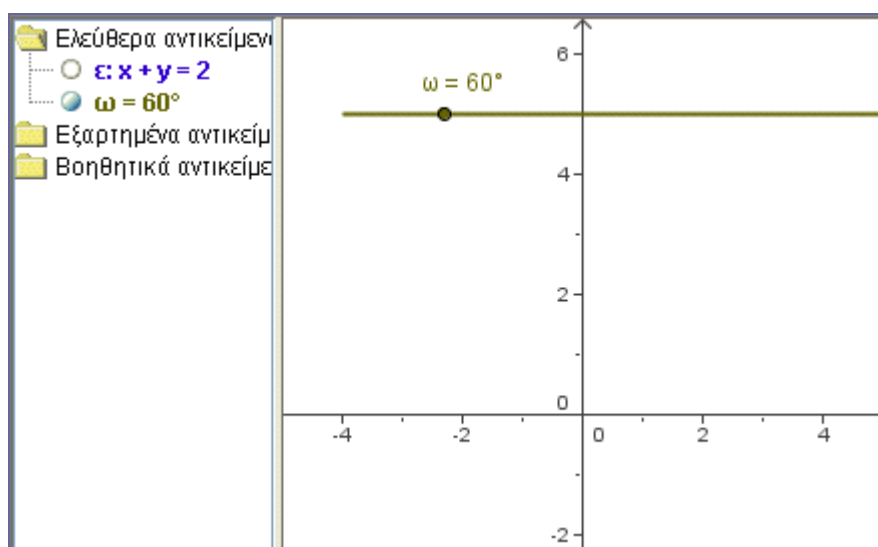
Φύλλο εργασίας

Στην δραστηριότητα αυτή θα διερευνήσουμε την συμπεριφορά και τις ιδιότητες μιας παραμετρικής ευθείας με συντελεστές ημίτονα και συνημίτονα.

Εδώ η παράμετρος δεν επηρεάζει άμεσα την ευθεία αλλά μέσω των τριγωνομετρικών της αριθμών.

Στην οθόνη εμφανίζονται:

Ένας μεταβολέας γωνιών ω και η εξίσωση της ευθείας ε και η τιμή της γωνίας ω στο παράθυρο των αντικειμένων.



Να επαναπροσδιορίσετε την ευθεία ε εισάγοντας στους συντελεστές της το ημίτονο και συνημίτονο της γωνίας ω . $(\eta\mu\omega) \cdot x + (\sigma\upsilon\nu\omega) \cdot y = 1$.

ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ ΓΙΑ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ

- 1) Να μεταβάλλετε τις τιμές της γωνίας ω . Πως μεταβάλλεται η ευθεία;
- 2) Να δημιουργήσετε το ίχνος της ευθείας. Να μεταβάλλετε την τιμή της ω . Τι παρατηρείτε; Ποια είναι η θέση της ευθείας ως προς τον κύκλο που φαίνεται να δημιουργείται;
- 3) Να επαναπροσδιορίσετε την ευθεία σε $(\eta\mu\omega) \cdot x + (\sigma\upsilon\nu\omega) \cdot y = 2$. Τι αλλάζει τώρα στην περιοχή γύρω από την οποία περιστρέφεται η ευθεία;
- 4) Να πειραματιστείτε με συντελεστές $2\eta\mu\omega$ και $\sigma\upsilon\nu\omega$ για την παραμετρική ευθεία. Τι σχήμα δημιουργείται;

Οδηγίες για την υλοποίηση της δραστηριότητας

Προετοιμασία

Η διάρκεια της δραστηριότητας είναι μία ή δύο διδακτικές ώρες και μπορεί να υλοποιηθεί ως εφαρμογή στο τέλος του κεφαλαίου των ευθειών. Αποτελεί κατά κάποιον τρόπο συνέχεια της δραστηριότητας των παραμετρικών ευθειών 1.

Οι μαθητές θα πρέπει να γνωρίζουν τον επαναπροσδιορισμό μιας εξίσωσης που βρίσκεται στο παράθυρο των αντικειμένων.

Ακόμη θα πρέπει να γνωρίζουν τον τύπο που δίνει την απόσταση σημείου από ευθεία.

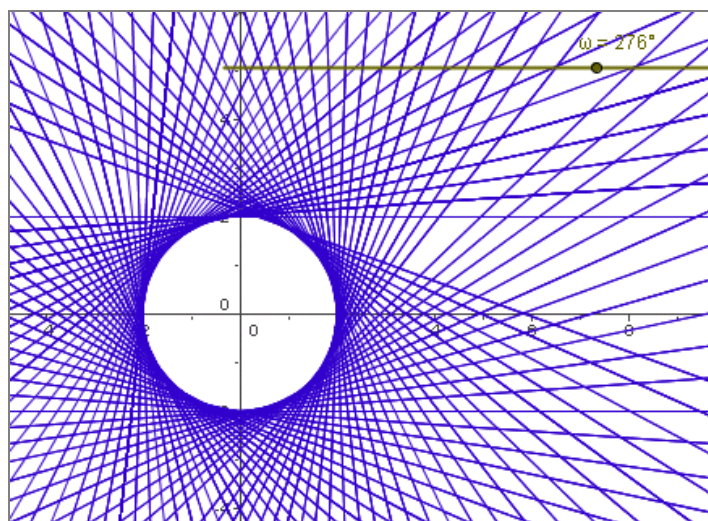
Η υλοποίηση

Οι μαθητές αρχικά επαναπροσδιορίζουν την ευθεία και την εμφανίζουν. Ο επαναπροσδιορισμός γίνεται με δεξί κλικ πάνω στην εξίσωση, αλλά θα πρέπει να τονιστεί στους μαθητές ότι το λογισμικό αναγνωρίζει το ημίτονο και το συνημίτονο της γωνίας ω ως $\sin(\omega)$ και $\cos(\omega)$ αντίστοιχα.

Στην συνέχεια κινούν τον μεταβολέα και παρατηρούν την περιστροφή της ευθείας γύρω από κάποιον κύκλο. Την διαπίστωση αυτή μπορεί να την κάνουν παρατηρώντας ότι η ευθεία περνά από τα σημεία 1 και -1 στον χ' αλλά και στον ψ' .

Όταν δημιουργήσουν το ίχνος της ευθείας καλό θα είναι το βήμα του μεταβολέα να είναι αρκετά μεγάλο π.χ 5° ώστε να είναι εμφανείς οι διάφορες θέσεις της ευθείας. Οι θέσεις αυτές θα γίνουν αντικείμενο διαπραγμάτευσης με στόχο να αναγνωρίσουν οι μαθητές ότι η ευθεία εφάπτεται συνεχώς σε κύκλο κέντρου O και ακτίνας 1.

Στο σημείο αυτό ο διδάσκων θα επισημάνει στους μαθητές ότι μία απόδειξη είναι απαραίτητη. Έτσι οι μαθητές χρησιμοποιούν τον τύπο της απόστασης σημείου από ευθεία και βρίσκουν ότι το $O(0, 0)$ απέχει σταθερή απόσταση 1 από την ευθεία.



Η αλλαγή του σταθερού όρου στην ευθεία θα οδηγήσει σε αντίστοιχη αλλαγή της ακτίνας του κύκλου. Θα ήταν χρήσιμο να ζητήσει ο διδάσκων να γενικεύσουν οι μαθητές για οποιαδήποτε ακτίνα ρ .

Στην τελευταία ερώτηση το σχήμα που προκύπτει είναι μία έλλειψη. Προφανώς οι μαθητές δεν μπορούν να εντοπίσουν την εξίσωσή της και επομένως η απάντηση θα παραμείνει στο επίπεδο της απλής παρατήρησης.

Επέκταση

Ο διδάσκων θα μπορούσε να ζητήσει από τους μαθητές να χρησιμοποιήσουν άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς (π.χ εφαπτομένη) για συντελεστές της ευθείας. Να πολλαπλασιάσουν την γωνία ω με 2 ή 3, και τέλος να θέσουν στον σταθερό όρο κάποιον τριγωνομετρικό αριθμό.

3.3 ΚΩΝΙΚΕΣ ΤΟΜΕΣ

3.3.1 Σύντομη περιγραφή του σεναρίου

Οι δραστηριότητες του σεναρίου έρχονται να συμπληρώσουν την ‘πρώτη γνωριμία’ με το λογισμικό και τις δυνατότητες που παρέχει στην διερεύνηση θεμάτων που αφορούν στην αναλυτική γεωμετρία.

Το σενάριο αποτελείται από 3 διερευνητικές δραστηριότητες στις οποίες οι μαθητές θα κατασκευάσουν εξ αρχής αρχεία τριών κωνικών: παραβολής, υπερβολής και έλλειψης.

Σε κάθε φύλλο εργασίας θα υπάρχει η διαδικασία κατασκευής, στο πρώτο μέρος, και οι ερωτήσεις διερεύνησης, στο δεύτερο μέρος.

Το βασικό θέμα σε δύο από αυτές είναι η διερεύνηση των ανακλαστικών ιδιοτήτων της παραβολής και της έλλειψης. Το πρόβλημα της ανάκλασης σε μια κωνική τομή αποτελεί μία από τις βασικές αιτίες ανάπτυξης της μελέτης των κωνικών και της χρήσης τους σε πρακτικά ζητήματα.

Στην πρώτη δραστηριότητα οι μαθητές θα μελετήσουν μία δυναμική αναπαράσταση της ανακλαστικής ιδιότητας της παραβολής. Συγκεκριμένα θα φέρουν την κάθετη στην εφαπτομένη σε ένα σημείο και στην συνέχεια θα δημιουργήσουν και θα μελετήσουν μία προσομοίωση ανάκλασης ακτίνας παράλληλης προς τον άξονα της παραβολής.

Στην δεύτερη δραστηριότητα η ανακλαστική ιδιότητα θα μελετηθεί σε μία έλλειψη. Θα ζητηθεί να φέρουν οι μαθητές εφαπτομένη σε ελεύθερο σημείο Α, κάθετη στην εφαπτομένη και να προσδιοριστούν οι εστίες. Στην συνέχεια θα μελετήσουν το εύρος στο οποίο κινείται η τομή της κάθετης με τον $\chi\chi$. Το εύρος αυτό σχετίζεται, στην έλλειψη, με το ε^2 . Η μελέτη της σχέσης της τετμημένης του ελεύθερου σημείου Α με την τετμημένη του σημείου τομής δίνει ευθεία με κλίση ε^2 .

Τέλος στην τρίτη δραστηριότητα οι μαθητές θα εντοπίσουν ένα τρίγωνο του οποίου το εμβαδόν είναι σταθερό και το οποίο τρίγωνο δημιουργείται από μία εφαπτομένη και τις ασύμπτωτες υπερβολής.

3.3.2 Στόχοι

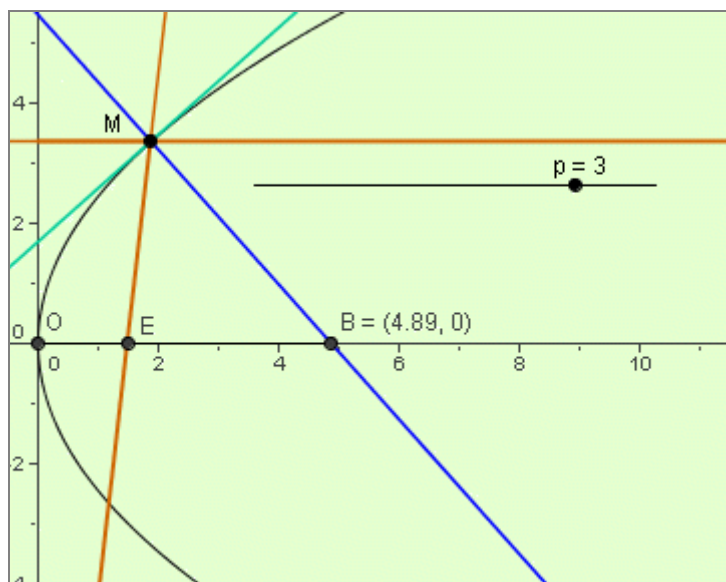
Οι μαθητές μέσα από τις δραστηριότητες που αφορούν στις κωνικές τομές:

- Θα δημιουργήσουν μία προσομοίωση ανακλάσεων πάνω σε παραβολή και έλλειψη.
- Θα διερευνήσουν ιδιότητες κωνικών τομών που σχετίζονται με την ανάκλαση.
- Θα ανακαλύψουν σταθερά μεγέθη μέσα σε μία μεταβαλλόμενη κατασκευή.
- Θα εμπλακούν σε διαδικασίες απόδειξης με αυστηρά μαθηματικό τρόπο.

3.3.3 ΑΝΑΚΛΑΣΗ ΣΕ ΠΑΡΑΒΟΛΗ

Φύλλο εργασίας

Για την υλοποίηση της δραστηριότητας αυτής είναι ανάγκη να εμφανίσετε σταδιακά μία κατασκευή με την οποία στην συνέχεια θα διερευνήσετε ορισμένα ερωτήματα που σχετίζονται με την παραβολή.



Ο στόχος είναι να κατασκευαστεί σταδιακά το παραπάνω σχήμα.

Η κατασκευή

Στην οθόνη προβάλλονται:

Ένας μεταβολέας p , μία παραβολή και ένα σημείο M πάνω στην παραβολή.

Τα αντικείμενα που θα εμφανιστούν βρίσκονται στον φάκελο των βοηθητικών αντικειμένων. Να ακολουθήσετε την σειρά που προτείνεται παρακάτω.

α) Να εμφανίσετε την εφαπτομένη (δ) στο M και την κάθετη (ϵ) στην εφαπτομένη στο M . Να εμφανίσετε το σημείο τομής B της κάθετης με τον άξονα $x'x$.

β) Να εμφανίσετε την εστία E της παραβολής και την ευθεία (ζ) δηλαδή την ME . Τέλος να εμφανίσετε την ευθεία (η) παράλληλη προς τον άξονα $x'x$ που περνά από το σημείο M .

ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ ΓΙΑ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ

- 1) Να εμφανίσετε τις συντεταγμένες του B . Ποια είναι η ελάχιστη τιμή που παίρνει η τετμημένη του B ; Ποια σχέση έχει με την παράμετρο p ;
- 2) Να εμφανίσετε τις γωνίες ω_1 και ω_2 και τις τιμές τους, να σύρετε το σημείο M πάνω στην παραβολή. Τι παρατηρείτε;
- 3) Να αλλάξετε τις τιμές της παραμέτρου p ώστε να γίνουν αρνητικές. Να μελετήσετε αν ισχύουν και πάλι αυτά που παρατηρήσατε προηγουμένως.
- 4) Να αποδείξετε με αυστηρά μαθηματικό τρόπο τα συμπεράσματα από τις προηγούμενες ερωτήσεις.

Οδηγίες για την υλοποίηση της δραστηριότητας

Προετοιμασία

Η διάρκεια της δραστηριότητας είναι μία διδακτική ώρα και μπορεί να υλοποιηθεί ως εφαρμογή στην παράγραφο που αναφέρεται στη παραβολή.

Οι μαθητές θα πρέπει να έχουν υλοποιήσει τις δραστηριότητες προετοιμασίας ώστε να γνωρίζουν τις βασικές λειτουργικότητες του λογισμικού. Επιπλέον θα πρέπει να γνωρίζουν την εμφάνιση των μετρήσεων ενός γεωμετρικού αντικειμένου.

Τέλος οι μαθητές θα πρέπει να κατέχουν τις γνώσεις που αναφέρονται στην παραβολή, όπως την σημασία της παραμέτρου p και την εξίσωση της εφαπτομένης σε σημείο της παραβολής.

Η υλοποίηση

Ο διδάσκων θα ζητήσει από τους μαθητές να εντοπίσουν την εξίσωση της παραβολής κάνοντας δεξί κλικ πάνω σε αυτήν. Στην συνέχεια τους προτείνει να μεταβάλλουν τις τιμές του p από τον μεταβολέα και να μελετήσουν τον τρόπο με τον οποίο αλλάζει το σχήμα της παραβολής.

Ακολούθως οι μαθητές εμφανίζουν σταδιακά τα διάφορα γεωμετρικά αντικείμενα με την σειρά που προτείνεται στο φύλλο εργασίας. Εδώ ο διδάσκων έχει την ευκαιρία να ζητήσει από τους μαθητές να μεταβάλλουν το p ή να σύρουν το σημείο M πάνω στην παραβολή και να μελετήσουν την συμπεριφορά κάθε αντικειμένου ξεχωριστά. Αυτό που θα πρέπει να επισημανθεί είναι ότι κάθε φορά που ο μεταβολέας περνά από θετικές σε αρνητικές τιμές, ή αντίστροφα, το σημείο M ταυτίζεται με το O και θα πρέπει στην συνέχεια να συρθεί σε κάποιο άλλο σημείο.

Όταν ολοκληρωθεί η κατασκευή της προσομοίωσης της ανάκλασης αρχίζει η διερεύνηση των ερωτημάτων.

Στην πρώτη ερώτηση οι μαθητές θα παρατηρήσουν ότι η τετμημένη του B , ενώ δεν έχει μέγιστη τιμή, έχει ελάχιστη. Θα σύρουν δηλαδή το σημείο M πάνω στην παραβολή και καθώς θα έχουν ήδη εμφανίσει τις συντεταγμένες του B , θα παρατηρήσουν ότι η τετμημένη παίρνει ελάχιστη τιμή την τιμή του p . Για να το επιβεβαιώσουν θα αλλάξουν τις τιμή του p από τον μεταβολέα και θα επαναλάβουν την διερεύνηση.

Ο στόχος της δεύτερης και τρίτης ερώτησης είναι να εντοπίσουν οι μαθητές την ισότητα των δύο γωνιών η οποία εκφράζει την ανακλαστική ιδιότητα της παραβολής μέσα στα πλαίσια του σχολικού εγχειριδίου. Η ισότητα αυτή φαίνεται να ισχύει ακόμη και στην περίπτωση που η εστία έχει αρνητική τετμημένη.

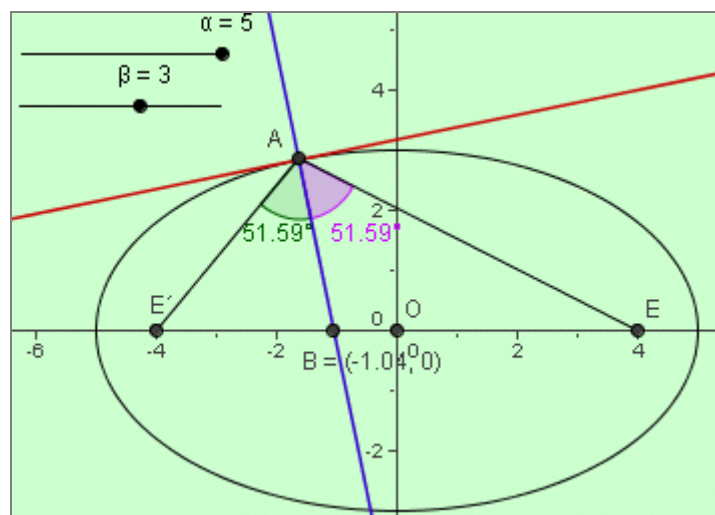
Τέλος οι μαθητές θα αποδείξουν τις δύο προτάσεις που προκύπτουν από την μελέτη των μετρήσεων με το λογισμικό.

Η πρώτη πρόταση θα έχει την εξής διατύπωση: « Η ευθεία (δ) είναι κάθετη στην εφαπτομένη της παραβολής $y^2=2px$ και τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο B . Αν χ_B η τετμημένη του B να δείξετε ότι $\chi_B \leq p$ ».

3.3.4 ΑΝΑΚΛΑΣΗ ΣΕ ΕΛΛΕΙΨΗ

Φύλλο εργασίας

Για την υλοποίηση της δραστηριότητας αυτής είναι ανάγκη να εμφανίσετε μία κατασκευή με την οποία στην συνέχεια θα διερευνήσετε ορισμένα ερωτήματα που σχετίζονται με την έλλειψη.



Ο στόχος είναι να κατασκευαστεί σταδιακά το παραπάνω σχήμα.

Η κατασκευή

Στην οθόνη προβάλλονται:

Δύο μεταβολείς α , β μία έλλειψη με τις εστίες της E και E' και ένα σημείο A πάνω στην έλλειψη. Ακόμη εμφανίζονται τα τμήματα που ενώνουν τις εστίες με το σημείο A.

Τα αντικείμενα που θα εμφανιστούν βρίσκονται στον φάκελο των βοηθητικών αντικειμένων. Να ακολουθήσετε την σειρά που προτείνεται παρακάτω.

α) Να εμφανίσετε την εφαπτομένη (δ_1) στο A και την κάθετη (δ_2) στην εφαπτομένη στο M.

β) Να εμφανίσετε το σημείο τομής B της κάθετης με τον άξονα $\chi'\chi$.

ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ ΓΙΑ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ

- 1) Να εμφανίσετε τις συντεταγμένες του B. Ποια είναι η ελάχιστη τιμή που παίρνει η τετμημένη του B και ποια η μέγιστη; Ποια σχέση έχει με την παράμετρο α και την εκκεντρότητα;
- 2) Να εμφανίσετε τις γωνίες ω_1 και ω_2 και τις τιμές τους, να σύρετε το σημείο M πάνω στην έλλειψη. Τι παρατηρείτε;

- 3) Να αλλάξετε τις τιμές των παραμέτρων α , β . Να μελετήσετε αν ισχύουν και πάλι αυτά που παρατηρήσατε προηγουμένως.
- 4) Να αποδείξετε με αυστηρά μαθηματικό τρόπο τα συμπεράσματα από τις προηγούμενες ερωτήσεις.

Οδηγίες για την υλοποίηση της δραστηριότητας

Προετοιμασία

Η διάρκεια της δραστηριότητας είναι μία διδακτική ώρα και μπορεί να υλοποιηθεί ως εφαρμογή στην παράγραφο που αναφέρεται στην έλλειψη.

Οι μαθητές θα πρέπει να έχουν υλοποιήσει τις δραστηριότητες προετοιμασίας ώστε να γνωρίζουν τις βασικές λειτουργικότητες του λογισμικού. Επιπλέον θα πρέπει να γνωρίζουν την εμφάνιση των μετρήσεων ενός γεωμετρικού αντικειμένου.

Επιπλέον οι μαθητές θα πρέπει να κατέχουν τις γνώσεις που αναφέρονται στην έλλειψη, όπως την έννοια της εκκεντρότητας, την σημασία των παραμέτρων α , β και την εξίσωση της εφαπτομένης σε σημείο της παραβολής.

Η υλοποίηση

Ο διδάσκων θα ζητήσει από τους μαθητές να εντοπίσουν την εξίσωση της έλλειψης κάνοντας δεξί κλικ πάνω σε αυτήν. Στην συνέχεια τους προτείνει να μεταβάλλουν τις τιμές των α , β από τους μεταβολείς και να μελετήσουν τον τρόπο με τον οποίο αλλάζει το σχήμα της έλλειψης.

Ακολουθώντας οι μαθητές εμφανίζουν σταδιακά τα διάφορα γεωμετρικά αντικείμενα με την σειρά που προτείνεται στο φύλλο εργασίας. Εδώ ο διδάσκων έχει την ευκαιρία να ζητήσει από τους μαθητές να μεταβάλλουν τα α , β ή να σύρουν το σημείο A πάνω στην έλλειψη και να μελετήσουν την συμπεριφορά κάθε αντικειμένου ξεχωριστά. Όταν ολοκληρωθεί η κατασκευή της προσομοίωσης της ανάκλασης αρχίζει η διερεύνηση των ερωτημάτων.

Στην πρώτη ερώτηση οι μαθητές θα παρατηρήσουν ότι το σημείο B κινείται μεταξύ δύο καθορισμένων θέσεων που βρίσκονται μεταξύ των εστιών και μάλιστα σε συμμετρικές θέσεις ως προς την αρχή των αξόνων

Θα σύρουν δηλαδή το σημείο A πάνω στην έλλειψη και καθώς θα έχουν ήδη εμφανίσει τις συντεταγμένες του B, θα παρατηρήσουν ότι η τετμημένη παίρνει μια ελάχιστη τιμή και μία μέγιστη. Για να το επιβεβαιώσουν θα αλλάξουν τις τιμές των α , β από τους μεταβολείς και θα επαναλάβουν την διερεύνηση.

Ακόμη θα πρέπει να υπολογίσουν την παράμετρο γ και την εκκεντρότητα ϵ . Οι τιμές $\alpha=5$ και $\beta=3$ είναι κατάλληλες ώστε να προκύψει $\gamma=4$ και επομένως η εκκεντρότητα θα είναι $\gamma/\alpha=0,8$. Στο σημείο αυτό ο διδάσκων θα ζητήσει από τους μαθητές να υπολογίσουν το ϵ^2 και το γινόμενο $\alpha \cdot \epsilon^2$. Η παρατήρηση θα οδηγήσει τους μαθητές να αναγνωρίσουν στην ποσότητα αυτή την μέγιστη τιμή της τετμημένης του B.

Στην δεύτερη ερώτηση οι μαθητές θα κατασκευάσουν τις δύο γωνίες και θα εμφανίσουν τις μετρήσεις τους. Θα διαπιστώσουν ότι για κάθε θέση του σημείου A πάνω στην έλλειψη οι δύο γωνίες είναι ίσες.

Στην τρίτη ερώτηση θα μεταβάλλουν τις τιμές των α , β και θα ερευνήσουν αν ισχύουν τα συμπεράσματα στα οποία έφτασαν προηγουμένως.

Στην τέταρτη ερώτηση μαθητές θα αποδείξουν τις δύο προτάσεις που προκύπτουν από την μελέτη των μετρήσεων με το λογισμικό.

Η πρώτη πρόταση θα έχει την εξής διατύπωση: « Η ευθεία (δ) είναι κάθετη στην εφαπτομένη της έλλειψης $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ και τέμνει τον άξονα $\chi\chi$ στο σημείο Β

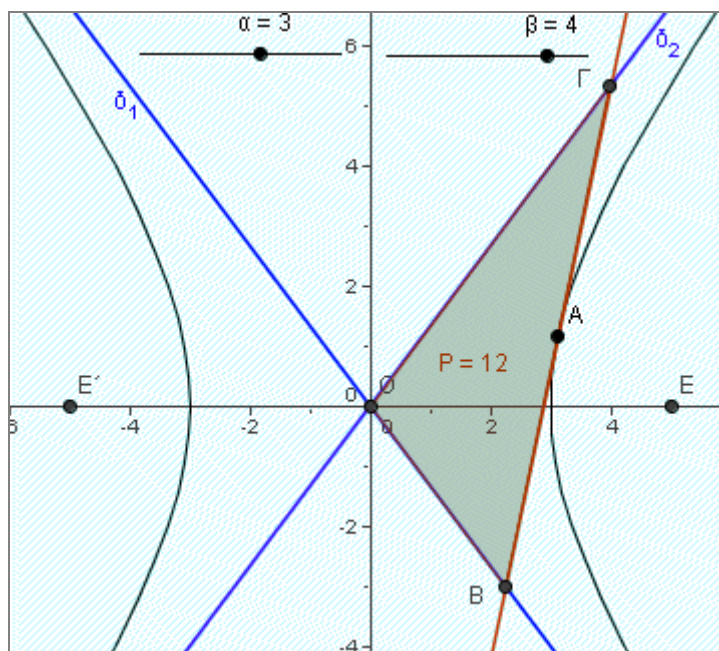
Αν χ_β η τετμημένη του Β να δείξετε ότι $-\varepsilon^2 \cdot a \leq \chi_\beta \leq \varepsilon^2 \cdot a$ ».

Για την δεύτερη πρόταση μπορεί να χρησιμοποιηθεί η διατύπωση του σχολικού βιβλίου.

3.3.5 Η ΥΠΕΡΒΟΛΗ

Φύλλο εργασίας

Για την υλοποίηση της δραστηριότητας αυτής είναι ανάγκη να εμφανίσετε μια κατασκευή με την οποία στην συνέχεια θα διερευνήσετε ορισμένα ερωτήματα που σχετίζονται με την υπερβολή.



Ο στόχος είναι να κατασκευαστεί σταδιακά το παραπάνω σχήμα.

Η κατασκευή

Στην οθόνη προβάλλονται:

Δύο μεταβολείς α , β μία υπερβολή με τις εστίες της E και E' και ένα σημείο A πάνω στον ένα κλάδο της υπερβολής.

Τα αντικείμενα που θα εμφανιστούν βρίσκονται στον φάκελο των βοηθητικών αντικειμένων. Να ακολουθήσετε την σειρά που προτείνεται παρακάτω.

- Να εμφανίσετε την εφαπτομένη (δ) στο A και τις ασύμπτωτες της υπερβολής (δ_1) και (δ_2).
- Να εμφανίσετε τα σημεία τομής B και Γ της εφαπτομένης με τις ασύμπτωτες.
- Να εμφανίσετε το τρίγωνο P .

ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ ΓΙΑ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ

- Να μεταβάλλετε την θέση του A πάνω στην υπερβολή. Ποια μεγέθη παραμένουν σταθερά και ποια μεταβάλλονται;
- Πως συνδέεται το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$ με τις παραμέτρους; Να αλλάξετε τις τιμές των παραμέτρων και να επιβεβαιώσετε το συμπέρασμά σας.
- Να αποδείξετε το συμπέρασμά σας με αυστηρά μαθηματικό τρόπο.

Οδηγίες για την υλοποίηση της δραστηριότητας

Προετοιμασία

Η διάρκεια της δραστηριότητας είναι μία διδακτική ώρα και μπορεί να υλοποιηθεί ως εφαρμογή στο τέλος του κεφαλαίου της υπερβολής.

Οι μαθητές θα πρέπει να έχουν υλοποιήσει τις δραστηριότητες προετοιμασίας ώστε να γνωρίζουν τις βασικές λειτουργικότητες του λογισμικού. Επιπλέον θα πρέπει να γνωρίζουν την εμφάνιση των μετρήσεων ενός γεωμετρικού αντικειμένου.

Ακόμη οι μαθητές θα πρέπει να κατέχουν τις γνώσεις που αναφέρονται στην υπερβολή, όπως την έννοια της ασύμπτωτης, την σημασία των παραμέτρων a , b και την εξίσωση της εφαπτομένης σε σημείο της υπερβολής. Τέλος θα πρέπει να γνωρίζουν τον τύπο που δίνει το εμβαδόν ενός τριγώνου από τις συντεταγμένες των κορυφών του.

Η υλοποίηση

Ο διδάσκων έχει την δυνατότητα να ζητήσει από τους μαθητές να κατασκευάσουν τα διάφορα γεωμετρικά αντικείμενα και τους μεταβολείς καθώς οι μαθητές μπορούν να πληκτρολογήσουν την εξίσωση της υπερβολής αλλά και κατασκευάσουν της εφαπτομένη σε ένα σημείο της με τα αντίστοιχα εργαλεία που διαθέτει το λογισμικό.

Σε αυτή την περίπτωση θα πρέπει να αποκρύψει το παράθυρο της Άλγεβρας, να διαγράψει ή καλύτερα να αποκρύψει την υπερβολή και να ζητήσει από τους μαθητές τις παρακάτω ενέργειες.

Η κατασκευή

- 1) Να δημιουργήσετε δύο μεταβολείς a , b με θετικές τιμές. Στην συνέχεια να κατασκευάσετε την υπερβολή $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$ και τις δύο ασύμπτωτές της (δ_1) και (δ_2).
- 2) Να κατασκευάσετε ένα σημείο A πάνω στην υπερβολή και στην συνέχεια να φέρετε την εφαπτομένη στο A . Να δημιουργήσετε τα σημεία τομής B και Γ της εφαπτομένης με τις δύο ασύμπτωτες.
- 3) Να κατασκευάσετε το τρίγωνο $AB\Gamma$ και να εμφανίσετε το εμβαδόν του.

Ο διδάσκων θα ζητήσει από τους μαθητές να εντοπίσουν την εξίσωση της υπερβολής κάνοντας δεξί κλικ πάνω σε αυτήν. Στην συνέχεια τους προτείνει να μεταβάλλουν τις τιμές των a , b από τους μεταβολείς και να μελετήσουν τον τρόπο με τον οποίο αλλάζει το σχήμα της.

Ακολούθως οι μαθητές εμφανίζουν σταδιακά τα διάφορα γεωμετρικά αντικείμενα με την σειρά που προτείνεται στο φύλλο εργασίας. Εδώ ο διδάσκων έχει την ευκαιρία να ζητήσει από τους μαθητές να μεταβάλλουν τα a , b ή να σύρουν το σημείο A πάνω στην υπερβολή και να μελετήσουν την συμπεριφορά κάθε αντικειμένου ξεχωριστά.

Στην πρώτη ερώτηση οι μαθητές θα εντοπίσουν τα μεταβλητά μεγέθη, όπως το τρίγωνο $AB\Gamma$ και τα σημεία τομής, και το σταθερό που είναι το εμβαδόν.

Στην δεύτερη ερώτηση οι μαθητές θα παρατηρήσουν ότι το εμβαδόν είναι ίσο με το γινόμενο των παραμέτρων a , b . Στην συνέχεια θα μεταβάλλουν τις τιμές των a , b από τους μεταβολείς και θα διαπιστώσουν ότι και πάλι ισχύει η αρχικής τους διαπίστωση.

Στην τρίτη ερώτηση οι μαθητές θα θεωρήσουν σύστημα την εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο $A(\chi_1, \psi_1)$ με την εξίσωση της μίας ασύμπτωτης της υπερβολής και θα εντοπίσουν τις συντεταγμένες του Β. Με όμοιο τρόπο θα εντοπίσουν τις συντεταγμένες του Γ. Οι λύσεις του συστήματος θα οδηγήσουν στην εύρεση των συντεταγμένων των σημείων Β, Γ.

Τέλος θα εφαρμόσουν τον τύπο που δίνει το εμβαδόν ενός τριγώνου όταν είναι γνωστές οι συντεταγμένες των κορυφών του.

Τεχνική Υποστήριξη

Δικτυακός Τόπος : www.intracom-schools.gr και

Ηλεκτρονικό ταχυδρομείο : support_it@intracom-it.gr

Τηλέφωνο : 210-6679105

Fax : 210-6679106

Υπεύθυνη : κα Μπερτσά Όλγα

ΥΠΕΠΘ / ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ «ΚΟΙΝΩΝΙΑ ΤΗΣ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΑΣ»



Γ' ΚΟΙΝΟΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ ΣΤΗΡΙΞΗΣ
ΕΡΓΟ ΣΥΓΧΡΗΜΑΤΟΔΟΤΟΥΜΕΝΟ ΚΑΤΑ 80% ΑΠΟ ΤΟ ΕΚΤ
ΚΑΙ ΚΑΤΑ 20% ΑΠΟ ΕΘΝΙΚΟΥΣ ΠΟΡΟΥΣ
«Ολοκληρωμένη Αξιοποίηση των Τ.Π.Ε. στην Εκπαιδευτική Διαδικασία»