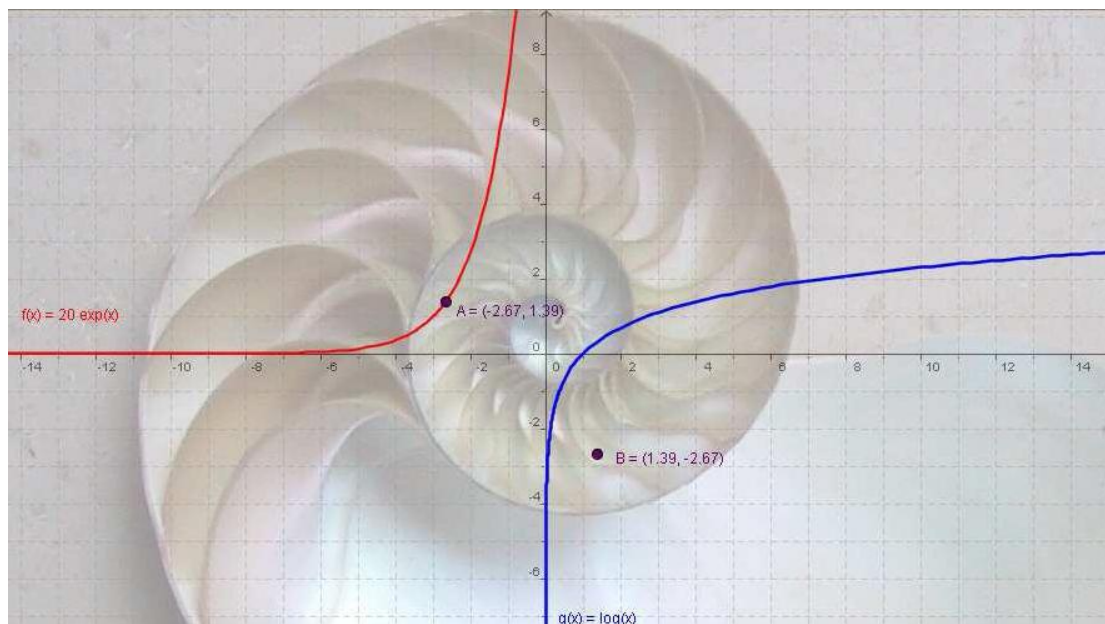


ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΜΕ ΤΟ GeoGebra*

Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

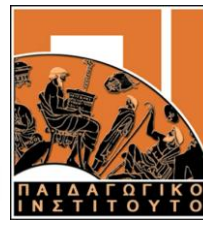
ΒΙΒΛΙΟ ΚΑΘΗΓΗΤΗ



Κώστας Γαβρίλης, Καθηγητής Μαθηματικών Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης

*www.geogebra.org

ΥΠΕΠΘ / ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ «ΚΟΙΝΩΝΙΑ ΤΗΣ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΑΣ»



Γ' ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ ΣΤΗΡΙΞΗΣ
ΕΡΓΟ ΣΥΓΧΡΗΜΑΤΟΔΟΤΟΥΜΕΝΟ ΚΑΤΑ 80% ΑΠΟ ΤΟ ΕΚΤ
ΚΑΙ ΚΑΤΑ 20% ΑΠΟ ΕΘΝΙΚΟΥΣ ΠΟΡΟΥΣ
«Ολοκληρωμένη Αξιοποίηση των Τ.Π.Ε. στην Εκπαιδευτική Διαδικασία»

Τεχνική Υποστήριξη

Δικτυακός Τόπος : www.intracom-schools.gr και

Ηλεκτρονικό ταχυδρομείο : support_it@intracom-it.gr

Τηλέφωνο : 210-6679105

Fax : 210-6679106

Υπεύθυνη : κα Μπερτσά Όλγα

Περιεχόμενα

1	Η παιδαγωγική και διδακτική πρόταση για τα Μαθηματικά της Γ' Λυκείου	13
1.1	Οι μικρόκοσμοι του CDROM ως περιβάλλοντα μάθησης	13
1.1.1	Τα εργαλεία και οι λειτουργικότητες των μικρόκοσμων.....	13
1.1.2	Η επαναχρησιμοποίηση των μικρόκοσμων	14
1.1.3	Η έννοια της διερεύνησης.....	14
1.2	Η διαδικασία της εξερεύνησης των μικρόκοσμων.....	15
1.2.1	Η εξερεύνηση ως πηγή πληροφοριών.....	15
1.2.2	Τα πειράματα στους μικρόκοσμους ως διαδικασία δημιουργίας εικασιών, υποθέσεων και συμπερασμάτων	16
1.2.3	Η εξερεύνηση ως πηγή δημιουργίας μαθηματικών προβλημάτων.....	17
2	Τα σενάρια του CDROM.....	19
2.1	Κεφάλαιο 1 : Η έννοια της συνάρτησης	19
2.1.1	Σενάριο 1.....	19
2.1.2	Σενάριο 2.....	19
2.1.3	Σενάριο 3.....	20
2.1.4	Σενάριο 4.....	20
2.1.5	Σενάριο 5.....	20
2.1.6	Σενάριο 6.....	20
2.2	Κεφάλαιο 2 : Όριο και συνέχεια	20
2.2.1	Σενάριο 1.....	21
2.2.2	Σενάριο 2.....	21
2.3	Κεφάλαιο 3 : Παράγωγος.....	21
2.3.1	Σενάριο 1.....	21
2.3.2	Σενάριο 2.....	21
2.3.3	Σενάριο 3.....	21
2.3.4	Σενάριο 4.....	21
2.4	Κεφάλαιο 4 : Ολοκλήρωμα	22
2.4.1	Σενάριο 1.....	22
2.4.2	Σενάριο 2.....	22
2.4.3	Σενάριο 3.....	22
2.5	Κεφάλαιο 5 : Μιγαδικοί αριθμοί.....	22
2.5.1	Σενάριο 1.....	22
2.5.2	Σενάριο 2.....	22
3	Κεφάλαιο 1 : Η έννοια της συνάρτησης	23

3.1	Σενάριο 1 : Η έννοια της συνάρτησης.....	23
3.1.1	Η κεντρική ιδέα του σεναρίου	23
3.1.2	Στόχοι.....	23
3.1.3	Διδακτική πρόταση	24
3.1.4	Εργασία 1: Ο αυτοκινητόδρομος.....	27
3.1.5	Εργασία 2: Η κίνηση σημείου σε κύκλο.....	30
3.1.6	Εργασία 3: Ο δρομέας.....	33
3.1.7	Εργασία 4: Η έννοια της συνάρτησης.....	36
3.2	ΣΕΝΑΡΙΟ 2 : Μελέτη των βασικών Συναρτήσεων	39
3.2.1	Η κεντρική ιδέα του σεναρίου	39
3.2.2	Στόχοι.....	40
3.2.3	Διδακτική πρόταση	40
3.2.4	Θέμα 1: Βρείτε την κατάλληλη συνάρτηση.....	43
3.2.5	Θέμα 2: Επανακαθορίστε τη συνάρτηση	46
3.2.6	Θέμα 3: Ο μετασχηματισμός της ημιτονοειδούς καμπύλης	48
3.2.7	Θέμα 4: Η εκθετική και η λογαριθμική συνάρτηση	50
3.3	ΣΕΝΑΡΙΟ 3 : Μελέτη Οικογενειών Συναρτήσεων.....	53
3.3.1	Η κεντρική ιδέα του σεναρίου	53
3.3.2	Στόχοι.....	53
3.3.3	Διδακτική πρόταση	54
3.3.4	Θέμα 1: Η οικογένεια των συναρτήσεων $f(x) = \alpha \cdot x^v + \beta \cdot x + \gamma$...	56
3.3.5	Θέμα 2: Η οικογένεια των συναρτήσεων $f(x) = \frac{\alpha}{\beta \cdot x + \gamma} + \delta$	58
3.3.6	Θέμα 3: Η οικογένεια των συναρτήσεων $f(x) = \alpha \cdot \eta\mu(\beta \cdot x + \gamma) + \delta$ 60	
3.3.7	Θέμα 4: Η οικογένεια των συναρτήσεων $f(x) = \rho \cdot \alpha^{(kx+\lambda)} + \mu$	62
3.3.8	Θέμα 5: Η οικογένεια των συναρτήσεων $f(x) = \alpha \cdot \sqrt{\beta x + \gamma} + \delta$	64
3.4	ΣΕΝΑΡΙΟ 4 : Πεδίο ορισμού και σύνολο τιμών των συναρτήσεων	67
3.4.1	Η κεντρική ιδέα του σεναρίου	67
3.4.2	Στόχοι.....	67
3.4.3	Διδακτική πρόταση	68
3.4.4	Θέμα 1: Βρείτε το κατάλληλο σύνολο τιμών	70
3.4.5	Θέμα 2: Βρείτε το κατάλληλο σύνολο τιμών στις τριγωνομετρικές συναρτήσεις	72

3.4.6	Θέμα 3: Βρείτε το κατάλληλο σύνολο τιμών στις άρρητες συναρτήσεις	74
3.4.7	Θέμα 4: Το σύνολο τιμών σε συνάρτηση διπλού τύπου.....	76
3.5	ΣΕΝΑΡΙΟ 5 : Πράξεις συναρτήσεων.....	79
3.5.1	Η κεντρική ιδέα του σεναρίου	79
3.5.2	Στόχοι.....	79
3.5.3	Διδακτική πρόταση	80
3.5.4	Θέμα 1: Άθροισμα συναρτήσεων	82
3.5.5	Θέμα 2: Γινόμενο συναρτήσεων.....	84
3.5.6	ΘΕΜΑ 3: Πηλίκο δυο συναρτήσεων.....	86
3.5.7	ΘΕΜΑ 4: Σύνθεση δυο συναρτήσεων.....	88
3.6	ΣΕΝΑΡΙΟ 6 : Ιδιότητες των συναρτήσεων.....	91
3.6.1	Η κεντρική ιδέα του σεναρίου	91
3.6.2	Στόχοι.....	91
3.6.3	Διδακτική πρόταση	92
3.6.4	Θέμα 1: Η μονοτονία πολωνυμικής συνάρτησης	94
3.6.5	Θέμα 2: Η μονοτονία τριγωνομετρικής συνάρτησης.....	97
3.6.6	Θέμα 3: Η συνάρτηση $1 - 1$	100
3.6.7	ΘΕΜΑ 4: Η αντίστροφη συνάρτηση	102
4	ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 – Όριο και συνέχεια	105
4.1	ΣΕΝΑΡΙΟ 7 : Όριο Συνάρτησης	105
4.1.1	Η κεντρική ιδέα του σεναρίου	105
4.1.2	Στόχοι.....	105
4.1.3	Διδακτική πρόταση	106
4.1.4	Θέμα 1: Ιδιότητες της συνάρτησης κοντά σ' ένα σημείο.....	108
4.1.5	Θέμα 2: Το ϵ και το δ του ορίου	111
4.1.6	Θέμα 3: Το όριο συνάρτησης διπλού τύπου στο x_0	114
4.1.7	Θέμα 4: Το θεώρημα των ισοσυγκλινουσών συναρτήσεων	118
4.2	ΣΕΝΑΡΙΟ 8 : Συνέχεια Συνάρτησης και εφαρμογές	121
4.2.1	Η κεντρική ιδέα του σεναρίου	121
4.2.2	Στόχοι.....	121
4.2.3	Διδακτική πρόταση	122
4.2.4	Θέμα 1: Προσέγγιση των ριζών συνάρτησης	124
4.2.5	Θέμα 2: Συνέχεια και ρίζες συνάρτησης	126
4.2.6	Θέμα 3: Το θεώρημα των ενδιάμεσων τιμών συνάρτησης.....	128

4.2.7	Θέμα 4: Εφαρμογές των θεωρημάτων	131
5	ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 - Παράγωγος	133
5.1	ΣΕΝΑΡΙΟ 9 : Η έννοια της Παραγώγου	133
5.1.1	Η κεντρική ιδέα του σεναρίου	133
5.1.2	Στόχοι.....	133
5.1.3	Διδακτική πρόταση	134
5.1.4	Θέμα 1: Η έννοια της εφαπτομένης καμπύλης	137
5.1.5	Θέμα 2: Ο λόγος μεταβολής $[f(x_A+h)-f(x_A)]/h$	139
5.1.6	Θέμα 3: Ο ορισμός της εφαπτομένης καμπύλης σε σημείο της	142
5.1.7	Θέμα 4: Η εφαπτομένη σε ειδικά σημεία	144
5.2	ΣΕΝΑΡΙΟ 10 : Η Παράγωγος Συνάρτησης	147
5.2.1	Η κεντρική ιδέα του σεναρίου	147
5.2.2	Στόχοι.....	147
5.2.3	Διδακτική πρόταση	148
5.2.4	Θέμα 1: Μεταβολή της κλίσης της εφαπτομένης	151
5.2.5	Θέμα 2: Η συνάρτηση της κλίσης της εφαπτομένης καμπύλης	154
5.2.6	Θέμα 3: Η συνάρτηση της παραγώγου	157
5.2.7	Θέμα 4: Η παράγωγος συνάρτησης διπλού τύπου.....	160
5.3	ΣΕΝΑΡΙΟ 11 : Θεωρήματα του διαφορικού λογισμού	163
5.3.1	Η κεντρική ιδέα του σεναρίου	163
5.3.2	Στόχοι.....	163
5.3.3	Διδακτική πρόταση	164
5.3.4	ΘΕΜΑ 1: Θεώρημα μέσης τιμής	167
5.3.5	Θέμα 2: Μονοτονία - Ακρότατα	170
5.3.6	Θέμα 3: Κυρτότητα και σημεία καμπής της συνάρτησης	174
5.3.7	ΘΕΜΑ 4: Ασύμπτωτες συνάρτησης.....	177
5.4	ΣΕΝΑΡΙΟ 12 : Οι εφαρμογές του διαφορικού λογισμού	181
5.4.1	Η κεντρική ιδέα του σεναρίου	181
5.4.2	Στόχοι.....	181
5.4.3	Διδακτική πρόταση	181
5.4.4	Θέμα 1: Το κανάλι παροχής νερού	184
5.4.5	Θέμα 2: Απόσταση σημείου από καμπύλη συνάρτησης	186
5.4.6	Θέμα 3: Ελάχιστη τιμή της διαφοράς δυο συναρτήσεων	189
5.4.7	Θέμα 4: Η μέγιστη τιμή συγκέντρωσης ενός φαρμάκου	191
6	ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4 - Ολοκληρώματα.....	193

6.1	ΣΕΝΑΠΙΟ 13 : Αόριστο ολοκλήρωμα συνάρτησης.....	193
6.1.1	Η κεντρική ιδέα του σεναρίου	193
6.1.2	Στόχοι.....	193
6.1.3	Διδακτική πρόταση	193
6.1.4	Θέμα 1: Το αόριστο ολοκλήρωμα πολυωνυμικών συναρτήσεων	196
6.1.5	Θέμα 2: Το αόριστο ολοκλήρωμα τριγωνομετρικών συναρτήσεων...	198
6.1.6	Θέμα 3: Το αόριστο ολοκλήρωμα εκθετικών συναρτήσεων	200
6.1.7	Θέμα 4: Το αόριστο ολοκλήρωμα άρρητων συναρτήσεων	202
6.2	ΣΕΝΑΠΙΟ 14 : Μέτρηση εμβαδού χωρίου	205
6.2.1	Η κεντρική ιδέα του σεναρίου	205
6.2.2	Στόχοι.....	205
6.2.3	Διδακτική πρόταση	205
6.2.4	Θέμα 1: Η μέτρηση του εμβαδού χωρίου κάτω από πολυωνυμική συνάρτηση.....	208
6.2.5	Θέμα 2: Η συνάρτηση του εμβαδού χωρίου που ορίζουν πολυωνυμικές συναρτήσεις.	211
6.2.6	Θέμα 3: Η συνάρτηση του εμβαδού χωρίου που ορίζουν τριγωνομετρικές συναρτήσεις.....	214
6.2.7	Θέμα 4: Η συνάρτηση του εμβαδού χωρίου που ορίζουν άρρητες συναρτήσεις.	217
6.2.8	ΣΕΝΑΠΙΟ 15 : Θεωρήματα και προβλήματα ολοκληρωτικού λογισμού 221	
6.2.9	Η κεντρική ιδέα του σεναρίου	221
6.2.10	Στόχοι.....	221
6.2.11	Διδακτική πρόταση	221
6.2.12	Θέμα 1: Η μέτρηση του εμβαδού χωρίου κάτω από πολυωνυμική συνάρτηση.....	224
6.2.13	Θέμα 2: Το εμβαδόν χωρίου μεταξύ δυο συναρτήσεων.	226
6.2.14	Θέμα 3: Η συνάρτηση του εμβαδού χωρίου μεταξύ δυο συναρτήσεων. 229	
6.2.15	Θέμα 4: Η συνάρτηση του εμβαδού χωρίου που ορίζουν άρρητες συναρτήσεις.	231
7	ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5 – Μιγαδικοί αριθμοί.....	235
7.1	ΣΕΝΑΠΙΟ 16 : Μιγαδικοί αριθμοί.....	235
7.1.1	Η κεντρική ιδέα του σεναρίου	235
7.1.2	Στόχοι.....	235
7.1.3	Διδακτική πρόταση	236

7.1.4	ΘΕΜΑ 1: Οι μιγαδικοί αριθμοί και το μιγαδικό επίπεδο	238
7.1.5	ΘΕΜΑ 2: Το άθροισμα και η διαφορά μιγαδικών αριθμών.....	240
7.1.6	ΘΕΜΑ 3: Το γινόμενο και το πηλίκο δυο μιγαδικών αριθμών	242
7.1.7	ΘΕΜΑ 4: Η τριγωνική ανισότητα των μιγαδικών αριθμών.....	244
7.2	ΣΕΝΑΡΙΟ 17 : Μετασχηματισμοί στο μιγαδικό επίπεδο	247
7.2.1	Η κεντρική ιδέα του σεναρίου	247
7.2.2	Στόχοι.....	247
7.2.3	Διδακτική πρόταση	248
7.2.4	Θέμα 1: Γεωμετρικοί τόποι μιγαδικών αριθμών.....	250
7.2.5	Θέμα 2: Μετασχηματισμός του μιγαδικού αριθμού z με $ z =1$	252
7.2.6	ΘΕΜΑ 3: Ο γεωμετρικός τόπος των $w=f(z)$ όταν z ανήκει σε ευθεία	254
7.2.7	ΘΕΜΑ 4: Ο γεωμετρικός τόπος των $w=f(z)$ όταν z ανήκει σε κύκλο.	256

Πρόλογος

Πολλοί πιστεύουν ότι η προσπάθεια ένταξης εκπαιδευτικού λογισμικού στη μάθηση και στη διδασκαλία των μαθηματικών της Γ' Λυκείου είναι ανέφικτη, καθώς οι μαθητές προετοιμάζονται για τις πανελλήνιες εισαγωγικές εξετάσεις στις επόμενες βαθμίδες εκπαίδευσης. Όσοι πιστεύουν αυτά επικαλούνται, ως σοβαρό επιχείρημα, την έλλειψη χρόνου καθώς το πρόγραμμα των μαθηματικών είναι αρκετά μεγάλο, σε σχέση με τον διατιθέμενο χρόνο και έτσι δεν αφήνει κάποιο περιθώριο για διδασκαλία με τη βοήθεια του υπολογιστή. Προφανώς πιστεύουν ότι η ένταξη του λογισμικού στη διδακτική ατζέντα των εκπαιδευτικών απαιτεί το ξόδεμα πολύτιμου χρόνου, καθώς απαιτείται (1) χρόνος για τη μάθηση των χειρισμών και των ιδιαίτερων λειτουργιών του λογισμικού, (2) χρόνος για τη δημιουργία – κατασκευή του κάθε περιβάλλοντος από τους μαθητές και (3) χρόνος σε οπτικές διερευνήσεις. Έτσι νομίζουν ότι ο χρόνος που απομένει για τη μάθηση τεχνικών και μεθοδολογιών αρκούντως χρήσιμων στις εξετάσεις είναι περιορισμένος και δεν αρκεί για να καταστούν οι μαθητές ικανοί για επιτυχίες.

Δε συμεριζόμαστε την άποψη αυτή πλήρως καθώς πιστεύουμε ότι οι εκπαιδευτικοί που διδάσκουν τα μαθηματικά της Γ' Λυκείου μπορούν να αντικαταστήσουν πολλές διδασκαλίες που κάνουν στον πίνακα με την κιμωλία με τον υπολογιστή. Αρκεί να υπάρχει κατάλληλο λογισμικό και κατάλληλα σενάρια τα οποία επιτρέπουν στους μαθητές και στον εκπαιδευτικό να διερευνούν κατάλληλα φαινόμενα προβληματισμού και μάθησης με τη χρήση απλών και κατανοητών υπολογιστικών εργαλείων. Ακόμα, έχουμε τη γνώμη ότι η μάθηση τεχνικών και μεθοδολογιών για τη διαπραγμάτευση εννοιών και φαινομένων των μαθηματικών, είναι ελλιπής και αναποτελεσματική όταν δε συνοδεύεται από βαθιά κατανόηση των εννοιών αυτών. Για παράδειγμα, η διδασκαλία της έννοιας της παραγώγου, στηρίζεται στην περιγραφή φαινομένων της κίνησης και της εφαπτομένης της καμπύλης μιας συνάρτησης, χωρίς να μπορούν οι μαθητές να χειριστούν τα φαινόμενα αυτά και να τα προσεγγίσουν νοητικά με τον δικό τους τρόπο.

Το CDROM που δημιουργήσαμε μπορεί να ενταχθεί χωρίς να δημιουργεί προβλήματα στη διδακτική ατζέντα του καθηγητή των μαθηματικών της Γ' Λυκείου καθώς: (1) Δεν απαιτούνται ιδιαίτερες γνώσεις του λογισμικού. (2) Τα θέματα που διαπραγματεύεται αφορούν ακριβώς τη διδακτέα ύλη του μαθήματος. (3) Οι μικρόκοσμοι που δημιουργήσαμε μπορούν να παρουσιαστούν από τον εκπαιδευτικό στην τάξη και να γίνουν αντικείμενο διερεύνησης όλης της τάξης. (4) Οι χειρισμοί που απαιτούνται είναι ελάχιστοι και αφορούν τη διαχείριση έτοιμων αλλά επαναχρησιμοποιήσιμων μικρόκοσμων. (5) Το CDROM μπορεί να τρέχει στο διαδίκτυο και από αυτή την άποψη μπορεί ο κάθε μαθητής να το χρησιμοποιεί και από το σπίτι του.

Ελπίζουμε, ότι η πρότασή μας θα βοηθήσει τους μεν καθηγητές των μαθηματικών να αποκτήσουν και εναλλακτικούς τρόπους διδασκαλίας δύσβατων εννοιών, όπως αυτές της ανάλυσης, τους δε μαθητές να προσεγγίσουν οι ίδιοι έννοιες και σχέσεις με πολλαπλούς τρόπους.

Εισαγωγή

Το παρόν λογισμικό αφορά τα Μαθηματικά της Γ' Λυκείου. Προσεγγίζει στις έννοιες των συναρτήσεων και των μιγαδικών αριθμών με ένα ιδιαίτερο τρόπο με τον οποίο δίνεται η δυνατότητα στους μαθητές να εμπλέκονται σε διερευνήσεις με τις πιο σημαντικές έννοιες των σχολικών τους μαθηματικών αξιοποιώντας τα εργαλεία που προσφέρει το εκπαιδευτικό λογισμικό GeoGebra.

Με τον όρο 'διερεύνηση' εννοούμε τη δράση την οποία αναπτύσσουν οι μαθητές όταν εξερευνούν ένα υπολογιστικό περιβάλλον (ένα μικρόκοσμο) όπως αυτά που προτείνουμε εδώ.

Τα εργαλεία εξερεύνησης που καλούνται να χρησιμοποιήσουν κατά την εξερεύνηση είναι δύο κατηγοριών. Είναι τα διαθέσιμα στο περιβάλλον υπολογιστικά εργαλεία καθώς και οι γνώσεις τους που μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την αναζήτηση και την επεξεργασία των πληροφοριών που αντλούν από αυτό. Ακόμα, το γεγονός ότι για να περιγράψουμε τον όρο 'διερεύνηση' χρησιμοποιούμε τον όρο 'εξερεύνηση' δηλώνει ότι η πρόσκληση την οποία απευθύνουμε στον κάθε μαθητή δεν είναι άλλο από μια εξερεύνηση σε ένα άγνωστο περιβάλλον.

Οι μικρόκοσμοι που περιλαμβάνονται εδώ, αφορούν τις γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων ή οικογενειών συναρτήσεων που συνήθως περιέχονται στα εκπαιδευτικά - σχολικά εγχειρίδια. Η χρήση παραμέτρων στη θέση των συντελεστών των εξισώσεων με τις οποίες ορίζονται οι συναρτήσεις, δίνει τη δυνατότητα, αφενός να εξετάζονται οι κοινές ιδιότητες αυτών για τις διάφορες τιμές των παραμέτρων αλλά και να εξερευνώνται οι ειδικές περιπτώσεις αυτών. Η οπτική εξερεύνηση στο γράφημα των συναρτήσεων και η αντιστοίχισή της με την εξίσωση αυτών είναι ένας κατάλληλος τρόπος για να αντλούν οι μαθητές συμπεράσματα για τις ιδιότητες αυτών. Τέλος, την εξήγηση των φαινομένων που παρατηρούνται στο υπολογιστικό περιβάλλον και την απόδειξη των σχέσεων που εμπλέκονται σ' αυτά τα φαινόμενα καλείται να διατυπώσει ο χρήστης ώστε να ολοκληρωθεί αυτό που παραπάνω καλέσαμε "διερεύνηση".

Οι συναρτησιακοί μικρόκοσμοι, που προτείνονται εδώ, είναι κατανεμημένοι σύμφωνα με τις ενότητες του σχολικού βιβλίου. Σε κάθε ενότητα οι προτεινόμενοι μικρόκοσμοι είναι ομαδοποιημένοι σε σενάρια, με βάση μια συγκεκριμένη κατηγοριοποίηση η οποία έχει σκοπό να διευκολύνει την εξαγωγή γενικών συμπερασμάτων. Ελπίζουμε αυτά τα γενικά συμπεράσματα καθώς εξάγονται από τα συναρτησιακά φαινόμενα, τα οποία οριοθετούνται από τις οπτικές εικόνες των μεταβολών θα αποτελέσουν τις δεξαμενές από τις οποίες θα αντλούνται πληροφορίες και για τις μελλοντικές διερευνήσεις σχετικών θεμάτων.

1 Η παιδαγωγική και διδακτική πρόταση για τα Μαθηματικά της Γ' Λυκείου

1.1 Οι μικρόκοσμοι του CDROM ως περιβάλλοντα μάθησης

1.1.1 Τα εργαλεία και οι λειτουργικότητες των μικρόκοσμων

Τα εργαλεία και λειτουργικότητες που είναι ενσωματωμένα σε κάθε ένα από τους 68 μικρόκοσμους, μπορούν να χωριστούν σε δυο κατηγορίες. Στην πρώτη κατηγορία, ανήκουν εργαλεία και λειτουργικότητες ανεξάρτητες από το περιεχόμενο του κάθε μικρόκοσμου, όπως τα εργαλεία διαχείρισης της μορφής των αντικειμένων και τα εργαλεία μεγέθυνσης-σμίκρυνσης. Στη δεύτερη κατηγορία ανήκουν τα εργαλεία και οι λειτουργικότητες που ενσωματώνονται από το σχεδιαστή του κάθε μικρόκοσμου, με σκοπό να εξυπηρετήσουν συγκεκριμένες διαδικασίες μάθησης. Αν και μερικά από τα εργαλεία αυτά αναφέρθηκαν παραπάνω εδώ παρουσιάζονται συνολικά.

Τα εργαλεία της πρώτης κατηγορίας εμφανίζονται όταν ο χρήστης επιλέξει:

- 1) Με το ποντίκι του την επιφάνεια εργασίας και κάνει δεξί κλικ. Τα κυριότερα είναι τα εξής:
 - **Η εντολή “Άξονες”**: Εμφανίζει ή αποκρύπτει τους άξονες από το περιβάλλον εργασίας.
 - **Η εντολή “Σύστημα συντεταγμένων με πλέγμα”**: Εμφανίζει ή αποκρύπτει το πλέγμα από την επιφάνεια εργασίας.
 - **Η εντολή “Μεγέθυνση-Σμίκρυνση”**: Χρησιμοποιείται για να γίνει μεγέθυνση ή σμίκρυνση των αντικειμένων του μικρόκοσμου.
 - **Η εντολή “Άξονα x : Άξονας y”**: Χρησιμοποιείται για να επιλεγεί η σχέση μεταξύ των μονάδων των δυο αξόνων. Η συνηθέστερη σχέση είναι η 1:1.
 - **Η εντολή “Πρότυπη μορφή”**: Επανατοποθετεί τα αντικείμενα της επιφάνειας εργασίας σε μια προκαθορισμένη θέση.
 - **Η εντολή “Ιδιότητες”**: Χρησιμοποιείται για να καθοριστούν μια σειρά από ιδιότητες των αντικειμένων. Συγκεκριμένα, ο χρήστης μπορεί να καθορίσει το χρώμα στο υπόβαθρο, να επιλέξει το όνομα στους άξονες, να επιλέξει την μονάδα σε κάθε άξονα, να επιλέξει τα άκρα των δυο αξόνων και φυσικά τη σχέση των μονάδων των δυο αξόνων.
- 2) Με το ποντίκι του ένα αντικείμενο της επιφάνειας εργασίας και κάνει δεξί κλικ. Τα κυριότερα είναι τα εξής:
 - **Η εντολή “Δείξε αντικείμενο”**: Αποκρύπτει το αντικείμενο. Για να εμφανίσει το αντικείμενο στην επιφάνεια εργασίας πρέπει να χρησιμοποιηθεί η εντολή “Ιδιότητες” για ένα άλλο αντικείμενο και στον κατάλογο των αντικειμένων που θα εμφανιστεί να επιλεγεί το συζητούμενο αντικείμενο και στη συνέχεια η εντολή “Δείξε αντικείμενο”.

- **Η εντολή “Δείξε ετικέτα”**: Αποκρύπτει ή εμφανίζει το όνομα ενός αντικειμένου.
- **Η εντολή “Ίχνος ενεργό”**: Επιτρέπει στο χρήστη να ορίσει αν το συγκεκριμένο αντικείμενο θα αφήνει ή όχι το ίχνος του κατά την κίνησή του.
- **Η εντολή “Βοηθητικό αντικείμενο”**. Ορίζει αν ένα αντικείμενο έχει την ιδιότητα του βοηθητικού (Auxiliary) αντικειμένου.
- **Η εντολή “Επαναπροσδιορισμός”**: Δίνει την δυνατότητα στον χρήστη να επαναπροσδιορίσει το αντικείμενο.
- **Η εντολή “Διαγραφή”**: Δίνει την δυνατότητα στο χρήστη να διαγράψει το αντικείμενο.
- **Η εντολή “Μετονομασία”**: Δίνει τη δυνατότητα στο χρήστη να αλλάξει το όνομα του αντικειμένου.
- **Η εντολή “Ιδιότητες”**: Δίνει τη δυνατότητα στο χρήστη να εμφανίζει τον κατάλογο όλων των αντικειμένων της επιφάνειας εργασίας, να επιλέξει ένα από αυτά και να καθορίσει όλες τις παραπάνω ιδιότητες και επιπλέον:
 - Αν θα εμφανίζει το όνομα μόνο ή το μέγεθος μόνο ή και τα δυο για το αντικείμενο.
 - Να καθορίζει το είδος και το πάχος και το χρώμα των αντικειμένων.

Τα εργαλεία της δεύτερης κατηγορίας είναι αυτά που ο σχεδιαστής του μικρόκοσμου προκαθορίζει. Είναι κυρίως μεταβολείς με τους οποίους ο χρήστης μπορεί να προκαλεί αλλαγές στα αντικείμενα και στα μεγέθη τους με τα οποία κάθε μεταβολέας συνδέεται καθώς και κουμπιά με τα οποία εμφανίζει ή αποκρύπτει αντικείμενα στο μικρόκοσμο. Τα τελευταία είναι χρήσιμα κυρίως όταν βοηθούν τον χρήστη να εστιάζει σε συγκεκριμένες πτυχές της εξερεύνησης.

1.1.2 Η επαναχρησιμοποίηση των μικρόκοσμων

Όσα αναφέρθηκαν στην παραπάνω ενότητα δηλώνουν ότι ένας μικρόκοσμος μπορεί να τροποποιηθεί σε αρκετά μεγάλο βαθμό. Μπορεί ο χρήστης να επαναπροσδιορίσει τα αντικείμενα, μπορεί να τροποποιήσει την εμφάνισή τους, μπορεί να εμφανίσει ή να αποκρύψει ιδιότητες κ.ο.κ. Έτσι ένας μικρόκοσμος μπορεί να χρησιμοποιηθεί και πέρα από τους αρχικούς του σκοπούς για τους οποίους σχεδιάστηκε. Για παράδειγμα, αν ένας μικρόκοσμος σχεδιάστηκε για να αναδείξει τις κοινές ιδιότητες μιας οικογένειας πολυωνυμικών συναρτήσεων ο χρήστης μπορεί να επανακαθορίσει την οικογένεια των συναρτήσεων, π.χ. τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις ή τις εκθετικές ή άλλες, ώστε να μελετήσει τις κοινές ιδιότητες των μελών της και ενδεχομένως να συγκρίνει τα συμπεράσματά του με αυτά άλλης οικογένειας.

1.1.3 Η έννοια της διερεύνησης

Όπως αναφέρθηκε και πιο πάνω, με τον όρο διερεύνηση εννοούμε το σύνολο των δράσεων που αναλαμβάνει ο χρήστης, προκειμένου να εξερευνήσει το μικρόκοσμο και να απαντήσει σε ερωτήματα που τίθενται στο πλαίσιο του μικρόκοσμου αλλά και αυτών που ο ίδιος θέτει κατά τη δράση.

Ως δράσεις εννοούμε νοητικές διαδικασίες που προκαλούνται από τη χρήση των εργαλείων του μικρόκοσμου και από τις ερμηνείες που ο ίδιος ο χρήστης δίνει στα αποτελέσματα των ενεργειών του. Οι προηγούμενες γνώσεις και οι εμπειρίες που έχει αποκτήσει ο χρήστης, είναι ένα σημαντικό κομμάτι των νοητικών διαδικασιών που εμπλέκεται στις ερμηνείες που δίνει και στις αποφάσεις που παίρνει. Ωστόσο, η εξερεύνηση των αντικειμένων του μικρόκοσμου και του τρόπου που συνδέονται μεταξύ τους αλλά και των φαινομένων που προκαλούνται από τη χρήση των εργαλείων, είναι η σημαντικότερη πηγή πληροφοριών που ο χρήστης έχει να διαχειριστεί για να δώσει νόημα στις ενέργειές του και στα όσα παρατηρεί στο μικρόκοσμο.

1.2 Η διαδικασία της εξερεύνησης των μικρόκοσμων

1.2.1 Η εξερεύνηση ως πηγή πληροφοριών

Ο όρος «εξερεύνηση», παραπέμπει σε διαδικασίες, που στοχεύουν στην προσέγγιση μιας άγνωστης περιοχής, στην απόκτηση πρόσβασης στα αντικείμενα και στις διαδικασίες αυτής και τέλος στην «οικειοποίησή» της. Δηλαδή, οι χρήστες ενός μικρόκοσμου αναλαμβάνουν πρωτοβουλίες και δράσεις που έχουν σκοπό:

- Να ανακαλύψουν τα αντικείμενα που απαρτίζουν το μικρόκοσμο.
- Να παρατηρήσουν τον τρόπο που συμπεριφέρονται τα αντικείμενα αυτά.
- Να μάθουν πώς συνδέονται μεταξύ τους.
- Να αναλάβουν δράσεις για τα «υποτάξουν» στις επιθυμίες τους και στους δικούς τους σκοπούς.
 - Η εξερεύνηση απαιτεί από τους χρήστες να κάνουν τις εξής ενέργειες:
- Να περιεργαστούν κάθε αντικείμενο του μικρόκοσμου, με σκοπό να αντλήσουν πληροφορίες για τη συμπεριφορά του.
- Να παρατηρήσουν ποιο αντικείμενο συνδέεται με ποιο.
- Να ερμηνεύουν τις πληροφορίες που προέρχονται από τις προηγούμενες ενέργειες με σκοπό να μάθουν τον τρόπο που συνδέονται τα αντικείμενα μεταξύ τους.

Οι πληροφορίες που αντλούν και η διαχείριση αυτών απαιτεί από τους μαθητές:

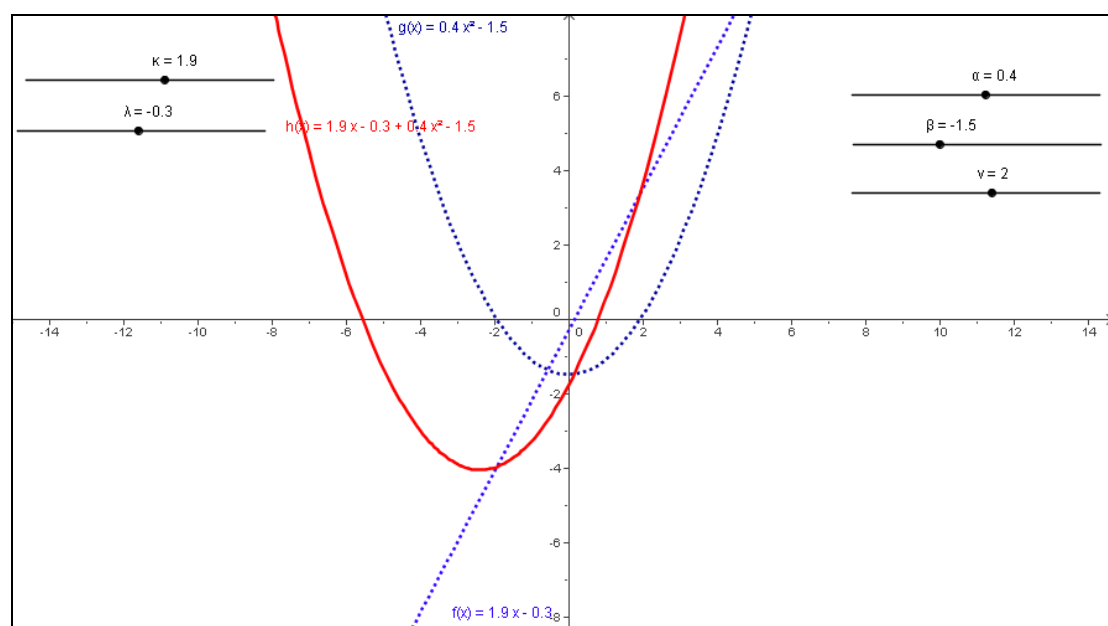
- Να κάνουν ταξινομήσεις μεταξύ των διαφόρων πληροφοριών
- Να κάνουν εκτιμήσεις και υπολογισμούς για πληροφορίες που αφορούν μεγέθη και ποσά.
- Να κάνουν αντιστοιχίσεις μεταξύ των πληροφοριών που αφορούν τη μορφή καμπυλών - σχημάτων και των δικών τους γνώσεων και εμπειριών.

Τα παραπάνω δηλώνουν, επιγραμματικά, πώς ένας μαθητής μπορεί να αξιοποιήσει τις πληροφορίες που αντλεί από τα αντικείμενα και τα εργαλεία ενός μικρόκοσμου. Ωστόσο κανείς δεν αναμένεται να μείνει στην εξερεύνηση μιας άγνωστης περιοχής. Μόλις την εξερευνήσει προσπαθεί να την φέρει στα «μέτρα» του, να την μετασχηματίσει και να την χρησιμοποιήσει για τους δικούς του σκοπούς. Έτσι οδηγείται στην επόμενη φάση της διερεύνησης, στη δημιουργία εικασιών, υποθέσεων και συμπερασμάτων.

1.2.2 Τα πειράματα στους μικρόκοσμους ως διαδικασία δημιουργίας εικασιών, υποθέσεων και συμπερασμάτων

Οι εικασίες είναι το πρώτο νοητικό βήμα που κάνει ο μαθητής όταν πειραματίζεται με τα εργαλεία του μικρόκοσμου και διαχειρίζεται τις πληροφορίες που αντλεί από τον πειραματισμό αυτό. Οι εκτιμήσεις του, οι κατηγοριοποιήσεις που κάνει μεταξύ των πληροφοριών που αντλεί από το περιβάλλον και οι αντιστοιχίσεις των πληροφοριών με τις γνώσεις και τις εμπειρίες του, είναι ο δρόμος για την κατασκευή εικασιών. Οι εικασίες, εφόσον αντέχουν στον πειραματικό έλεγχο, ενισχύονται σε υποθέσεις και αυτές σε συμπεράσματα εφόσον ερμηνεύονται και δικαιολογούνται.

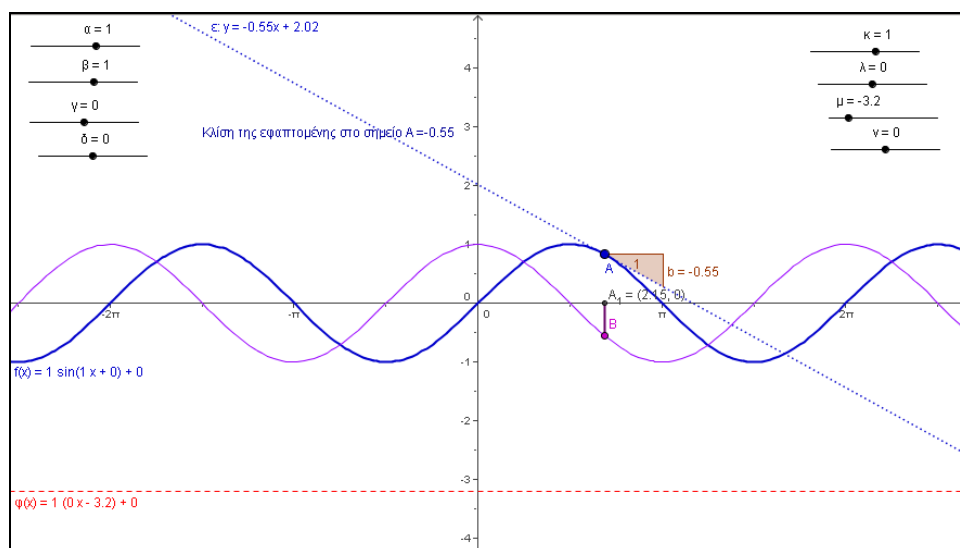
Για παράδειγμα, όταν ένας μαθητής εξερευνά το μικρόκοσμο που αφορά το άθροισμα δυο πολυωνυμικών συναρτήσεων, χειρίζεται τους μεταβολείς που ορίζουν τις δυο συναρτήσεις και παρατηρεί τα σχήματα των τριών γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων $f(x)$, $g(x)$ και του αθροίσματος τους $h(x)$. Παρατηρεί ότι όταν οι δυο αρχικές συναρτήσεις είναι πρώτου και δευτέρου βαθμού το άθροισμα είναι δευτέρου βαθμού και αυτό. Αυτό μπορεί να το ερμηνεύει χρησιμοποιώντας τις γνώσεις του για τον άθροισμα δυο πολυωνύμων. Ακόμα παρατηρεί ότι όταν μεταβάλλει τον δείκτη του μεταβολέα κ του μεγιστοβάθμιου όρου της πρωτοβάθμιας συνάρτησης (και διατηρεί σταθερούς τους άλλους δείκτες) το ακρότατο της καμπύλης του αθροίσματος μεταβάλλεται και αυτό. Και αυτό μπορεί να το ερμηνεύσει αξιοποιώντας τις γνώσεις του για το ακρότατο τριωνύμου και υπολογίζοντας τον τύπο ακρότατου της συνάρτησης άθροισμα με τη βοήθεια των συντελεστών των δυο αρχικών συναρτήσεων. Καθώς συνεχίζει να μεταβάλλει τις τιμές των κ σχηματίζει την εικασία ότι όταν αυξάνει προς τις θετικές τιμές η απόλυτη τιμή του ακρότατου αυξάνεται και αυτή κατ' απόλυτο τιμή. Το επόμενο βήμα είναι ο έλεγχος της εικασίας και γι' αυτό επαναλαμβάνει τα πειράματα και με άλλες τιμές του δείκτη κ . Εφόσον επιβεβαιώνεται διατυπώνει μια πιο ισχυρή εικασία, μια υπόθεση δηλαδή, ή αποσύρει την εικασία εφόσον δεν επιβεβαιώνεται. Στη συνέχεια επιβεβαιώνει την εικασία του αλγεβρικά και εφόσον αυτή ισχύει καταλήγει σε ένα συμπέρασμα.



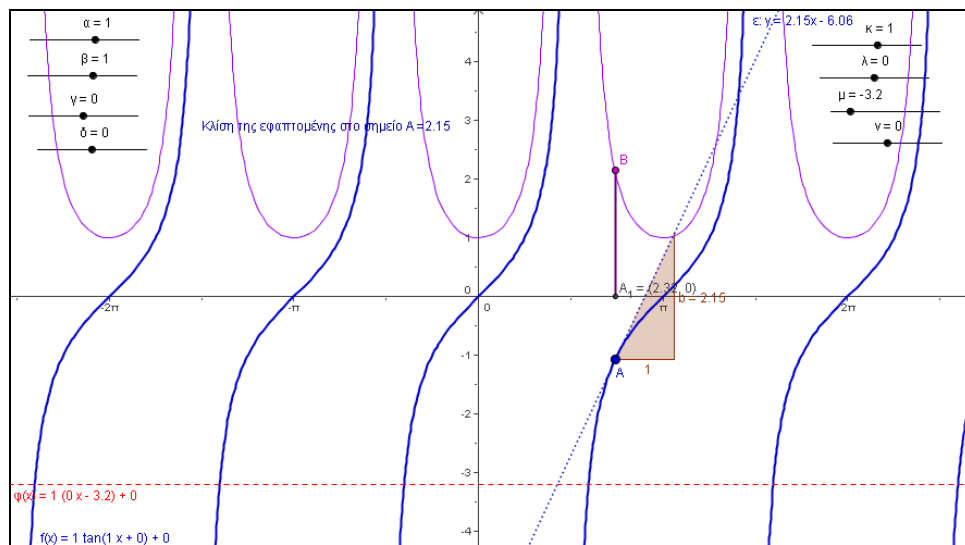
1.2.3 Η εξερεύνηση ως πηγή δημιουργίας μαθηματικών προβλημάτων

Μια άλλη πλευρά της εξερεύνησης ενός μικρόκοσμου είναι αυτή της διατύπωσης νέων ερωτημάτων – προβλημάτων από τον χρήστη. Αυτή η πλευρά συνδέεται στενά με το βαθμό οικειοποίησης του μικρόκοσμου από τον ίδιο το χρήστη καθώς, όπως συνήθως συμβαίνει, δεν υπάρχουν προθέσεις από την πλευρά του για τη διατύπωση νέων ερωτημάτων και προβλημάτων. Με τον όρο της οικειοποίησης του μικρόκοσμου που χρησιμοποιούμε εδώ θέλουμε να δηλώσουμε τη δυνατότητα που παρέχεται στο χρήστη να «κατακτήσει» και να «τροποποιήσει» τον κάθε μικρόκοσμο ώστε να το κάνει δικό του κατασκεύασμα. Έτσι θα μπορεί να θέτει ερωτήματα και προβλήματα που συνδέονται στενά με το βαθμό «κατάκτησης» του μικρόκοσμου από την εξερεύνηση, με το βαθμό «κατανόησης» των αντικειμένων του αλλά και με τις προσδοκίες που καλλιεργούνται κατά την εξερεύνηση. Ακόμα η διαδικασία αυτή, της διατύπωσης νέων προβλημάτων, συνδέεται στενά με τις διαδικασίες της δημιουργίας εικασιών και υποθέσεων. Η επαναχρησιμοποίηση των μικρόκοσμων, που προτείνονται εδώ, είναι ιδανικός τρόπος για τη διατύπωση νέων ερωτημάτων και προβλημάτων διερεύνησης.

Για παράδειγμα, στη διερεύνηση της εύρεσης της μεταβολής της κλίσης της εφαπτομένης της ημιτονοειδούς καμπύλης $f(x)=\eta\mu x$, το αρχικό πρόβλημα που τίθεται αφορά τον ορισμό της συνάρτησης $\varphi(x)$ ώστε η γραφική της παράσταση να ταυτίζεται με την καμπύλη της κλίσης. Η εξερεύνηση και τα πειράματα που θα κάνει ο χρήστης για τον ορισμό της συνάρτησης $\varphi(x)$ μπορούν εκτός από τη διατύπωση εικασιών και συμπερασμάτων να τον οδηγήσουν στη δημιουργία νέων ερωτημάτων που αφορούν ανάλογα θέματα.



Για παράδειγμα, μπορεί να επιλέξει διάφορες τιμές για τους συντελεστές της $f(x)$ και να εξετάσει διάφορες συναρτήσεις της μορφής $f(x)=a\eta\mu(\beta x+\gamma)+\delta$. Ακόμα μπορεί να πληκτρολογήσει οποιοδήποτε άλλο τύπο όπως για παράδειγμα $f(x)=a\sigma\upsilon\nu(\beta x+\gamma)+\delta$ ή $f(x)=a\epsilon\phi(\beta x+\gamma)+\delta$ ή οποιαδήποτε άλλη οικογένεια συναρτήσεων. Η επόμενη εικόνα αφορά την $f(x)=\epsilon\phi(x)$ και την καμπύλη της μεταβολής της κλίσης της. Το πρόβλημα της εύρεσης της $\varphi(x)$ απαιτεί ιδιαίτερες ικανότητες και διαδικασίες.



2 Τα σενάρια του CDROM

2.1 Κεφάλαιο 1 : Η έννοια της συνάρτησης

Η ενότητα αυτή περιέχει σενάρια, εργασίες και διερευνήσεις που αφορούν την έννοια της συνάρτησης.

Η έννοια της συνάρτησης και ο τρόπος με τον οποίο την διαχειριζόμαστε είναι από τα σημαντικότερα ζητήματα των σύγχρονων μαθηματικών. Με την βοήθεια της μελετάμε και ερμηνεύουμε φαινόμενα των διαφόρων επιστημών αλλά και της καθημερινότητας. Είναι το κύριο εργαλείο περιγραφής και μελέτης των μεταβολών, όπου και να συμβαίνουν αυτές, αρκεί να μπορούμε να αντλήσουμε δεδομένα από αυτές. Η βαθιά γνώση επομένως της έννοιας της συνάρτησης καθώς και η χρήσης της ως εργαλείο μελέτης και έκφρασης των μεταβολών είναι σημαντικά στοιχεία των σύγχρονων ανθρώπων που θέλουν να κατανοούν τον κόσμο και να προσαρμόζονται στις σύγχρονες απαιτήσεις της ζωής τους.

Στα σενάρια που προτείνουμε σ' αυτή την ενότητα αλλά και στις επόμενες, δίνεται η ευκαιρία σε κάθε μαθητή, ακόμα και σ' αυτόν που δεν είναι εξοικειωμένος με την χρήση εκπαιδευτικών λογισμικών των μαθηματικών, να προσεγγίσει την έννοια και τις ιδιότητες της συνάρτησης με ένα ολοκληρωμένο τρόπο.

- Μπορεί να χειρίζεται ο ίδιος φαινόμενα ή προσομοιώσεις φαινομένων στην επιφάνεια εργασίας και να παρακολουθεί τις συμμεταβολές των μεγεθών τους, των αριθμητικών τους τιμών καθώς και τον τρόπο που αυτά συμμεταβάλλονται στο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων.
- Μπορεί να επεξεργάζεται άμεσα την γραφική παράσταση μιας συνάρτησης και να παρακολουθεί πώς μεταβάλλεται ο τύπος της.
- Μπορεί να μεταβάλλει τον τύπο της και να παρακολουθεί τις μεταβολές στο γράφημά της.

Μπορεί επίσης να χειρίζεται με τη βοήθεια μεταβολών τους συντελεστές των εξισώσεων και να παρατηρεί τι μεταβάλλεται και τι όχι στο γράφημα της συνάρτησης.

Μερικά από τα θέματα αυτής της ενότητας αντλούνται από το σχολικό βιβλίο με αποτέλεσμα να μπορεί κάθε μαθητής να τα προσεγγίσει με ένα εναλλακτικό τρόπο.

Περιέχει έξι σενάρια για την έννοια της συνάρτησης

2.1.1 Σενάριο 1

Οι εργασίες που προτείνονται εδώ παρουσιάζουν την έννοια της μεταβολής και της συμμεταβολής μεγεθών που ορίζονται στο πλαίσιο προβλημάτων από την γεωμετρία ή προσομοιώσεις προβλημάτων της καθημερινότητας.

2.1.2 Σενάριο 2

Στο δεύτερο σενάριο προτείνονται θέματα που αφορούν μερικές από τις βασικές συναρτήσεις που οι μαθητές της Γ' τάξης διδάχθηκαν τα προηγούμενα χρόνια. Έτσι, εκτός από την επανάληψη των θεμάτων αποκαθίσταται και μια συνέχεια στον τρόπο

προσέγγισης ώστε να δημιουργηθεί μια όσο το δυνατόν ολοκληρωμένη για την έννοια της συνάρτησης και για τις διάφορες κατηγορίες συµµεταβολών.

2.1.3 Σενάριο 3

Το τρίτο σενάριο περιλαµβάνει την µελέτη οικογενειών συναρτήσεων. Δηλαδή συναρτήσεων που ορίζονται µε τη βοήθεια ενιαίων αλγεβρικών τύπων και που διαφέρουν ως προς τις τιμές των παραµέτρων τους. Έτσι οι µαθητές έχουν την ευκαιρία να µελετήσουν σε τι διαφέρουν και τι διατηρείται σταθερό στις συναρτήσεις της ίδιας οικογένειας και µέσω αυτών να οργανώσουν τα ποιοτικά χαρακτηριστικά αυτών των οικογενειών.

2.1.4 Σενάριο 4

Το τρίτο σενάριο περιλαµβάνει την µελέτη οικογενειών συναρτήσεων. Δηλαδή συναρτήσεων που ορίζονται µε τη βοήθεια ενιαίων αλγεβρικών τύπων και που διαφέρουν ως προς τις τιμές των παραµέτρων τους. Έτσι οι µαθητές έχουν την ευκαιρία να µελετήσουν σε τι διαφέρουν και τι διατηρείται σταθερό στις συναρτήσεις της ίδιας οικογένειας και µέσω αυτών να οργανώσουν τα ποιοτικά χαρακτηριστικά αυτών των οικογενειών.

2.1.5 Σενάριο 5

Στο πέµπτο σενάριο οι µαθητές καλούνται να µελετήσουν το αποτέλεσµα των πράξεων της πρόσθεσης, του πολλαπλασιασµού, του πηλίκου και της σύνθεσης δυο συναρτήσεων. Καλούνται δηλαδή να διερευνήσουν ποιές ιδιότητες των αρχικών συναρτήσεων παρεµβαίνουν και πώς στις ιδιότητες της συνάρτησης αποτέλεσµα.

2.1.6 Σενάριο 6

Η µονοτονία και τα ακρότατα συνάρτησης, η ιδιότητα του 1-1 και ορισµός της αντίστροφης συνάρτησης είναι τα θέµατα του τελευταίου σεναρίου αυτής της ενότητας.

2.2 Κεφάλαιο 2 : Όριο και συνέχεια

Όπως δηλώνεται και στον τίτλο αυτής της ενότητας τα δυο σενάρια που προτείνονται αφορούν στις έννοιες του ορίου, της συνέχεις και σχετικών µε αυτές θεωρηµάτων.

Με την µελέτη αυτών των ιδιοτήτων οι µαθητές έρχονται σε επαφή µε σηµαντικές ιδιότητες των συναρτήσεων µε ένα διαφορετικό τρόπο από αυτόν που παρουσιάζονται στο σχολικό βιβλίο αλλά και γενικότερα στα σχετικά διδακτικά εγχειρίδια. Με εργαλεία την µεγέθυνση του γραφήµατος σε ένα σηµείο του αλλά και το ορθογώνιο που ορίζεται από τα δ και ε οι µαθητές µπορούν να "δουν" πολύ κοντά σε ένα σηµείο της καµπύλης. Η διαδικασία αυτή που ζωντανεύει µε τα ίδια τα χέρια των µαθητών για αρκετά µικρές τιμές του δ και του ε εύκολα µπορεί να επαναληφθεί νοητικά για όσο µικρές τιμές θέλουν. Και η εξήγηση για το φαινόµενο αυτό δεν είναι τίποτα άλλο από την λεκτική και αλγεβρική διατύπωση της έννοιας του ορίου σε ένα σηµείο της καµπύλης.

Η έννοια της συνέχειας και τα θεωρήµατα Bolzano και ενδιάµεσων τιµών είναι λογικά επακόλουθα της έννοιας του ορίου. Η διερεύνησή τους θα εµπλουτίσει τους µαθητές µε νοητικές εικόνες εργαλεία που θα τους είναι χρήσιµα σε κάθε ανάλογη

περίπτωση. Περιέχει δυο σενάρια για τις έννοιες του ορίου και της συνέχειας της συνάρτησης

2.2.1 Σενάριο 1

Στο σενάριο αυτό οι μαθητές επεξεργάζονται την έννοια του ορίου σε ένα σημείο μιας συνάρτησης. Καλούνται να διερευνήσουν το όριο μερικών τύπων συναρτήσεων με τη βοήθεια ενός ορθογωνίου του οποίου οι δυο διαστάσεις ορίζονται για πολύ μικρές τιμές των μεταβολών δ και ϵ .

2.2.2 Σενάριο 2

Οι προτεινόμενες εργασίες του δεύτερου σεναρίου αναφέρονται στην έννοια της συνέχειας της συνάρτησης καθώς και στα θεωρήματα που αφορούν τις ρίζες της και το πρόσημο των τιμών της.

2.3 Κεφάλαιο 3 : Παράγωγος

Σ' αυτή την ενότητα οι μαθητές διερευνούν τον ρυθμό μεταβολής της κλίσης της εφαπτομένης καμπύλης σ' ένα σημείο της. Μ' άλλα λόγια μελετούν την έννοια του παράγωγου αριθμού σε ένα σημείο μιας συνάρτησης καθώς και την παράγωγο συνάρτηση που προκύπτει ως συνάρτηση των παραγώγων της σε όλα τα σημεία του πεδίου ορισμού της.

Ακόμα, μελετούν τον τρόπο σύνδεσης της έννοιας της παραγώγου με τις ιδιότητες της μονοτονίας, των ακροτάτων και της κυρτότητας των συναρτήσεων και χρησιμοποιούν την παράγωγο για να λύσουν προβλήματα μεγίστων - ελαχίστων που μερικά από αυτά περιέχονται στο σχολικό βιβλίο.

Περιέχει τρία σενάρια για την έννοια της παραγώγου συνάρτησης και των σχετικών με αυτή την έννοια

2.3.1 Σενάριο 1

Το σενάριο αυτό αφορά στην έννοια της εφαπτομένης καμπύλης. Οι μαθητές προσεγγίζουν την έννοια της κλίσης και του λόγου μεταβολής και μέσω αυτών στην έννοια της εφαπτομένης σε ένα σημείο της.

2.3.2 Σενάριο 2

Με το δεύτερο σενάριο οι μαθητές εμπλέκονται στον ορισμό της παραγώγου συνάρτησης με τη βοήθεια της μεταβολής της κλίσης της εφαπτομένης.

2.3.3 Σενάριο 3

Στο τρίτο σενάριο οι μαθητές διαπραγματεύονται τα σημαντικά θεωρήματα του διαφορικού λογισμού, όπως το θεώρημα της μέσης τιμής, το θεώρημα της μονοτονίας και των ακροτάτων, το θεώρημα της κυρτότητας και τέλος διερευνούν την έννοια της ασύμπτωτης μιας συνάρτησης

2.3.4 Σενάριο 4

Στο τελευταίο σενάριο οι μαθητές εμπλέκονται με προβλήματα μεγίστων - ελαχίστων τα οποία περιέχονται στο σχολικό βιβλίο.

2.4 Κεφάλαιο 4 : Ολοκλήρωμα

Με την ενότητα αυτή συμπληρώνονται οι βασικές έννοιες των συναρτήσεων όπως περιέχονται στο σχολικό βιβλίο. Οι έννοιες και οι ιδιότητες του ολοκληρωτικού λογισμού διαπραγματεύονται με τρόπους ανάλογους με αυτούς των προηγούμενων εννοιών. Οι μαθητές έχουν την ευκαιρία να διαπραγματευτούν την έννοια του αόριστου ολοκληρώματος σε στενή σχέση με αυτή της παραγώγου και στη συνέχεια αφού διερευνήσουν τον τρόπο υπολογισμού του εμβαδού χωρίων τα οποία ορίζονται με τη βοήθεια συναρτήσεων, συνδέουν με απλό τρόπο τις δυο έννοιες, του αόριστου ολοκληρώματος και του εμβαδού του χωρίου που ορίζεται κάτω από μια συνάρτηση. Περιέχει τρία σενάρια για τις έννοιες του ολοκληρώματος

2.4.1 Σενάριο 1

Το πρώτο σενάριο αναφέρεται στην έννοια της αρχικής συνάρτησης. Οι μαθητές διερευνούν τον τρόπο ορισμού της αρχικής μιας δεδομένης συνάρτησης.

2.4.2 Σενάριο 2

Στο δεύτερο σενάριο οι μαθητές διαπραγματεύονται τον υπολογισμό του εμβαδού χωρίου που ορίζεται είτε από μια συνάρτηση. Διαιρώντας το χωρίο σε ορθογώνια ίσου πλάτους και συνδέουν το αποτέλεσμα της μέτρησης με την τιμή που δίνει η αρχική συνάρτηση της δεδομένης σε συγκεκριμένο σημείο. Δηλαδή συνδέουν το εμβαδόν του χωρίου με το αόριστο ολοκλήρωμα, δηλαδή με το ορισμένο ολοκλήρωμα.

2.4.3 Σενάριο 3

Στο τελευταίο σενάριο οι μαθητές διερευνούν το θεώρημα της μέσης τιμής του ολοκληρωτικού λογισμού καθώς και το εμβαδόν του χωρίου μεταξύ δυο συναρτήσεων είτε μεταξύ μιας συνάρτησης και της εφαπτομένης σε σημείο της.

2.5 Κεφάλαιο 5 : Μιγαδικοί αριθμοί

Η ενότητα αυτή διαπραγματεύεται τους μιγαδικούς αριθμούς και την αναπαράστασή τους στο μιγαδικό επίπεδο. Στο μιγαδικό επίπεδο οι μαθητές διαπραγματεύονται την αναπαράσταση των συζυγών μιγαδικών αριθμών και διερευνούν σχέσεις που συνδέονται στενά με το μέτρο των μιγαδικών αριθμών. Ακόμα, καθώς μπορούν να διαπραγματεύονται μιγαδικούς αριθμούς των οποίων το πραγματικό ή και το φανταστικό μέρος τους μπορεί να μεταβάλλεται, έρχονται σε επαφή με τις έννοιες του γεωμετρικού τόπου και του μετασχηματισμού αυτών. Περιέχει δυο σενάρια για τις έννοιες των μιγαδικών αριθμών

2.5.1 Σενάριο 1

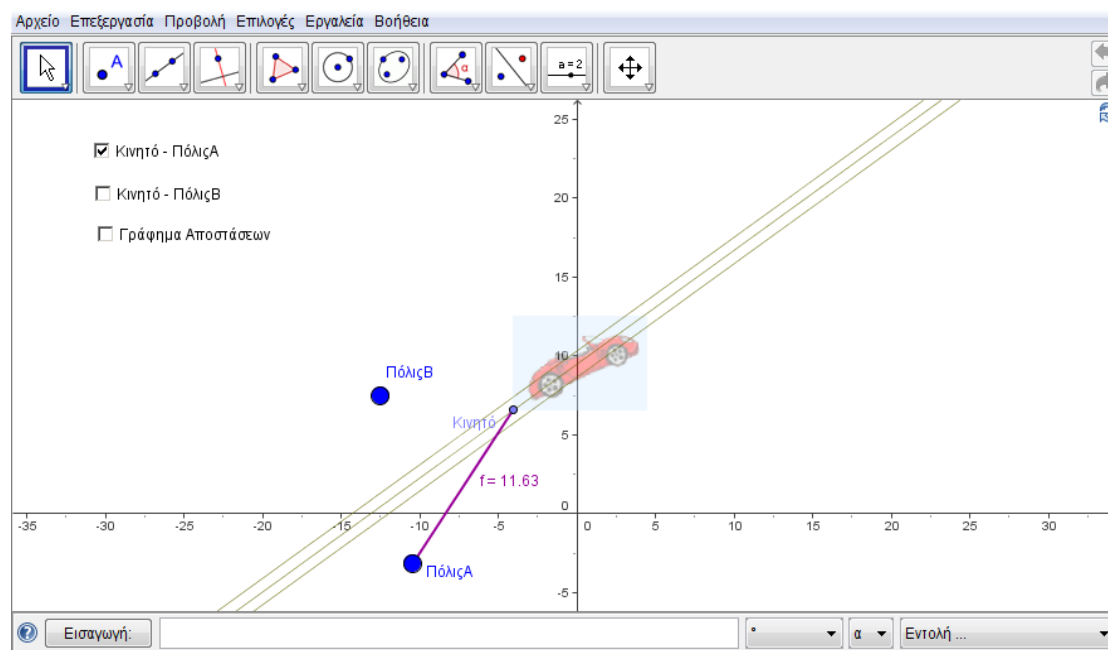
Το σενάριο αυτό αφορά το μιγαδικό επίπεδο, τον τρόπο αναπαράστασης των μιγαδικών αριθμών σ' αυτό. Ακόμα οι μαθητές διερευνούν σχέσεις μεταξύ μιγαδικών αριθμών, των συζυγών τους και των μέτρων τους.

2.5.2 Σενάριο 2

Το δεύτερο σενάριο αφορά στους γεωμετρικούς τόπους των μιγαδικών αριθμών καθώς και στους μετασχηματισμούς καμπύλων που ορίζονται στο μιγαδικό επίπεδο.

3 Κεφάλαιο 1 : Η έννοια της συνάρτησης

3.1 Σενάριο 1 : Η έννοια της συνάρτησης



3.1.1 Η κεντρική ιδέα του σεναρίου

Η κατανόηση της έννοιας της συνάρτησης είναι στενά συνδεδεμένη με την έννοια της μεταβολής και της συμμεταβολής δυο ποσοτήτων. Οι μαθητές συνήθως εμπλέκονται με τις έννοιες αυτές είτε μέσω στατικών φαινομένων είτε μέσω της αντιστοιχίας τιμών της ανεξάρτητης και της εξαρτημένης μεταβολής. Οι προτεινόμενες δραστηριότητες δίνουν την ευκαιρία στους μαθητές να εμπλακούν άμεσα με φαινόμενα τα οποία μπορούν να χειρίζονται άμεσα, να τα τροποποιούν και μεταβάλλοντας δυναμικά μια ποσότητα να προκαλούν τη μεταβολή άλλων ποσοτήτων. Η γραφική αναπαράσταση των ποσοτήτων αυτών σε πραγματικό χρόνο δίνει στους μαθητές τη δυνατότητα να παρακολουθούν τον τρόπο που εξελίσσονται οι μεταβολές αυτές και να κατανοούν τη σχέση αυτών, δηλαδή τη συμμεταβολή τους.

3.1.2 Στόχοι

- Να κατανοήσουν την έννοια της μεταβολής μιας ποσότητας.
- Να εκφράσουν τη μεταβολή μιας ποσότητας ως συνεχή μεταβολή των τιμών της.
- Να κατανοήσουν την έννοια της συμμεταβολής μιας ποσότητας.
- Να εκφράσουν τη συμμεταβολή δυο ποσοτήτων ως εξάρτηση των τιμών της μιας από τις τιμές της άλλης.
- Να περιγράψουν τη συμμεταβολή των ποσοτήτων από το γράφημα αυτών.

- Να εκφράσουν ποιοτικά ιδιότητες της συμμεταβολής των δυο ποσοτήτων.

3.1.3 Διδακτική πρόταση

ΟΡΓΑΝΩΣΗ ΤΗΣ ΤΑΞΗΣ

Οι δραστηριότητες αυτές ενδείκνυνται να διδάσκονται στο εργαστήριο υπολογιστών και οι μαθητές να εργάζονται σε ομάδες 2-3 ατόμων με φύλλο εργασίας. Ωστόσο η δομή τους εξυπηρετεί και την ένταξή τους σε τάξη που έχει μόνο έναν υπολογιστή με βιντεοπροβολέα. Σ' αυτήν την περίπτωση οι μαθητές συμπληρώνουν τα φύλλα εργασίας με βάση τη διερεύνηση που κάποιος άλλος διεξάγει ενώ οι ίδιοι παρεμβαίνουν στη διερεύνηση εκφράζοντας τη δική τους στρατηγική. Μ' άλλα λόγια στη διερεύνηση συμμετέχει όλη η τάξη ενώ την ευθύνη της διεξαγωγής της διερεύνησης έχει ο διδάσκων. Αυτό σημαίνει ότι ο ίδιος ο διδάσκων πρέπει αφενός να επιδιώκει να συζητηθούν στη τάξη όλες οι πιθανές στρατηγικές της διερεύνησης και αφετέρου να έχει από πριν προετοιμάσει τον τρόπο που θα χειριστεί τις στρατηγικές αυτές καθώς και τις διαφορετικές εκβάσεις τους. Άρα πρέπει με τη στάση του να προκαλεί την εφαρμογή των διαφορετικών τρόπων διερεύνησης, να ενθαρρύνει κάθε μαθητή να δοκιμάζει τις ιδέες του, να εκφράζει τις εικασίες του και να διατυπώνει τα συμπεράσματά του ελεύθερα.

ΟΙ ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΕΣ ΔΥΝΑΤΟΤΗΤΕΣ ΤΟΥ ΣΕΝΑΡΙΟΥ

Οι προτεινόμενες στο σενάριο δραστηριότητες αφορούν φαινόμενα τα οποία προκαλούνται από τη δράση των μαθητών σε προσχεδιασμένους υπολογιστικούς μικρόκοσμους. Αυτό σημαίνει, ότι οι μικρόκοσμοι έχουν σχεδιαστεί ώστε να ενσωματώνουν μαθηματικές δομές οι οποίες είναι δυνατόν να αναδύονται κατά τη διάρκεια της διερεύνησης, με σκοπό την απάντηση στα ερωτήματα που τίθενται στο πλαίσιο αυτό αλλά και αυτών που οι ίδιοι οι μαθητές ή ο διδάσκων μπορεί να θέσει. Τα ενσωματωμένα στους μικρόκοσμους εργαλεία δίνουν στους μαθητές τη δυνατότητα

- να κάνουν πειράματα,
- να παρατηρούν και να ερμηνεύουν τα αποτελέσματα των χειρισμών τους,
- να εκφράζουν εικασίες, να κάνουν γενικεύσεις, να διατυπώνουν υποθέσεις και θεωρήματα και να τα εκφράζονται με μαθηματικούς όρους.

Ακόμα, μπορούν να επεμβαίνουν και να επαναπροσδιορίζουν τις δυνατότητες των εργαλείων ή να επαναδιατυπώνουν τον τρόπο ορισμού των αντικειμένων και να μεταβάλλουν την εμφάνισή τους. Από αυτή την άποψη οι μικρόκοσμοι είναι επαναχρησιμοποιήσιμοι και δίνουν τη δυνατότητα στους χρήστες να διατυπώνουν και νέα ερωτήματα που αφορούν ιδιαίτερες γνωστικές πτυχές των μαθηματικών αντικειμένων.

ΠΟΡΕΙΑ ΤΗΣ ΕΦΑΡΜΟΓΗΣ ΤΟΥ ΣΕΝΑΡΙΟΥ

Το σενάριο αποτελείται από τέσσερις εργασίες. Στην πρώτη οι μαθητές διαπραγματεύονται το πρόβλημα με τον αυτοκινητόδρομο, στη δεύτερη ένα θεώρημα από την γεωμετρία της Β' Λυκείου (δύναμη σημείου ως προς κύκλο), στη τρίτη τη σχέση του εμβαδού ενός γεωμετρικού σχήματος με το μήκος της πλευράς που το

προσδιορίζει και στην τέταρτη τη σχέση που έχουν οι αποστάσεις που διήνυσε και που υπολείπεται να διανύσει ένας δρομέας.

Και στις τέσσερις δραστηριότητες οι μαθητές καλούνται να ερευνήσουν και να περιγράψουν (με μαθηματικούς όρους), αρχικά τον τρόπο μεταβολής κάθε ποσότητας ξεχωριστά και στη συνέχεια τον τρόπο συμμεταβολής των δυο ποσοτήτων εξερευνώντας (1) την μεταβολή των δυο μεγεθών οπτικά, (2) τις αριθμητικές τιμές των δυο μεγεθών και (3) το γράφημά της μεταβολής των δυο μεγεθών όταν το ένα μέγεθος θεωρείται ως ανεξάρτητη και το άλλο ως εξαρτημένη μεταβλητή.

Η εμπλοκή των μαθητών με κάθε μια δραστηριότητα αναμένεται να αναδείξει,

- την έννοια της μεταβολής μιας ποσότητας ως μια συνεχή διαδικασία αλλαγής της αριθμητικής της τιμής,
- την έννοια της συμμεταβολής δυο ποσοτήτων ως εξάρτηση της μιας μεταβλητής από την άλλη.

Το γράφημα που αυτόματα προκύπτει από το πρόγραμμα ως αποτέλεσμα της αλληλοεξάρτησης των δυο μεταβλητών ποσοτήτων, αποτελεί ένα πεδίο ποιοτικής ερμηνείας της συμμεταβολής τους. Για παράδειγμα, η διαφορετική μορφή που έχει σε σχέση με τις θέσεις των δύο πόλεων, στην πρώτη εργασία, θα δώσει την ευκαιρία στους μαθητές να διακρίνουν την έννοια της συνάρτησης σε σχέση με άλλες μορφές συμμεταβολής και να εξάγουν χρήσιμα συμπεράσματα για την έννοια αυτής. Ο εκπαιδευτικός μπορεί να κατευθύνει τους μαθητές να εξετάσουν τις περιπτώσεις που και οι δυο (ή η μία μόνο) πόλεις είναι πάνω στον αυτοκινητόδρομο, να εκφράσουν τον τρόπο συμμεταβολής των δυο αποστάσεων και να τον συγκρίνουν με άλλες περιπτώσεις. Οι επόμενες δραστηριότητες είναι εστιασμένες στην έννοια της συνάρτησης την οποία οι μαθητές καλούνται να διερευνήσουν και να εκφράσουν αλγεβρικά όπως για παράδειγμα στη δύναμη σημείου ως προς κύκλο. Στην περίπτωση αυτή οι μαθητές μπορούν να διακρίνουν την συμμεταβολή των δυο αποστάσεων ως συνάρτηση εκμεταλλευόμενοι (1) τα ποιοτικά χαρακτηριστικά του γραφήματος, τις γνώσεις που έχουν από τη γεωμετρία αλλά και την εμπειρία που απέκτησαν από την πρώτη δραστηριότητα. Ο εκπαιδευτικός μπορεί να ζητήσει από τους μαθητές να εκφράσουν αυτή τη συμμεταβολή ως αλγεβρική σχέση αφού εκφράσουν την μια μεταβλητή ως συνάρτηση της άλλης. Ανάλογες διαδικασίες προβλέπονται και για τις επόμενες δραστηριότητες.

ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

Εργασία	Περιγραφή	Τμήμα εφαρμογής	Περιεχόμενο
Εργασία 1	Εισαγωγή στην έννοια της συμμεταβολής	ΌΛΟΙ	Μεταβολή μιας ποσότητας και συμμεταβολή δυο ποσοτήτων. Έκφραση της συμμεταβολής μέσω γραφήματος. Η έννοια της συνάρτησης.
Εργασία 2	Εισαγωγή στην έννοια της έκφρασης της συμμεταβολής (συνάρτησης)	ΌΛΟΙ	Έκφραση της συμμεταβολής μέσω γραφήματος και αλγεβρικής εξίσωσης. Η έννοια της συνάρτησης.
Εργασία 3	Ιδιότητες της συνάρτησης από τη γραφική της παράσταση.	ΌΛΟΙ	Έκφραση της συμμεταβολής μέσω γραφήματος και αλγεβρικής εξίσωσης. Η έννοια της συνάρτησης.
Εργασία 4	Παραδείγματα συναρτήσεων	ΚΑΤ/ΣΕΙΣ	Έκφραση της συμμεταβολής μέσω γραφήματος και αλγεβρικής εξίσωσης.

3.1.4 Εργασία 1: Ο αυτοκινητόδρομος

Δυο πόλεις Α και Β βρίσκονται κοντά σε έναν αυτοκινητόδρομο. Ένα "κινητό" καθώς κινείται κατά μήκος του αυτοκινητόδρομου μπορεί, με τη βοήθεια ενός οργάνου, να μετρά συνεχώς τις αποστάσεις του από τις δυο πόλεις. Μπορείτε να ερευνήσετε τον τρόπο μεταβολής των αποστάσεων;

ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΕΙΣ

1. Πώς μεταβάλλεται κάθε απόσταση καθώς το κινητό κινείται στον αυτοκινητόδρομο;
2. Πώς συµμεταβάλλονται οι δυο αποστάσεις;
3. Διερευνήστε ειδικές περιπτώσεις. Για παράδειγμα διερευνήστε:
 - Σε ποια θέση των πόλεων η συµμεταβολή των αποστάσεων είναι γραμμική;
 - Πώς συµμεταβάλλονται οι δυο αποστάσεις όταν οι δυο πόλεις είναι συµμετρικές ως προς τον άξονα του δρόμου;
 - Πώς συµμεταβάλλονται οι δυο αποστάσεις αν η μία πόλις (ή και οι δυο) βρίσκεται πάνω στον αυτοκινητόδρομο.
4. Μπορείτε να βρείτε σε ποιές περιπτώσεις η συµμεταβολή είναι συνάρτηση;

Ανακεφαλαίωση: Συζητήστε στην τάξη για τα αποτελέσματα των διερευνήσεων που κάνατε. Περιγράψτε με δικά σας λόγια πώς μεταβάλλεται κάθε μια απόσταση καθώς και πώς η μεταβολή της μιας επηρεάζει την μεταβολή της άλλης. Συζητήστε αν γενικά η συµμεταβολή των δυο αποστάσεων είναι συνάρτηση ή σε ποιές περιπτώσεις αυτή είναι συνάρτηση. Εξηγήστε πώς πρέπει να συµμεταβάλλονται για να είναι αυτή η συµμεταβολή συνάρτηση.

ΟΔΗΓΙΕΣ ΠΡΟΣ ΤΟΝ ΔΙΔΑΣΚΟΝΤΑ

ΓΙΑ ΤΗΝ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗ ΤΩΝ ΕΡΓΑΛΕΙΩΝ ΤΟΥ ΜΙΚΡΟΚΟΣΜΟΥ

Ζητήστε από τους μαθητές:

- Να επιλέγουν κάθε κουμπί ώστε να μπορούν να παρατηρούν τη μια απόσταση ή και τις δυο.
- Να κινούν το «Κινητό» και να παρακολουθούν τον τρόπο μεταβολής κάθε απόστασης ξεχωριστά.
- Να κινούν το σημείο Μ και να παρακολουθούν πώς συµμεταβάλλονται οι δυο αποστάσεις.
- Να περιγράφουν με δικά τους λόγια τις μεταβολές που παρατηρούν.
- Να μεταβάλλουν τις θέσεις των δυο πόλεων.
- Να μην ξεχνούν να παρακολουθούν και το γράφημα και τη μεταβολή των δυο αποστάσεων καθώς και τα μήκη των πλευρών του ορθογωνίου.

ΓΙΑ ΤΙΣ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΕΙΣ

Ζητήστε από τους μαθητές να παρατηρούν και να εκφράζουν στην ομάδα τους και στην τάξη:

- Για κάθε απόσταση:
 - ✓ Πότε μεγαλώνει.
 - ✓ Πότε μικραίνει.
 - ✓ Πότε είναι η μεγαλύτερη δυνατή.
- Για τις δυο αποστάσεις:
 - ✓ Πότε μεγαλώνουν και οι δύο.
 - ✓ Πότε ενώ μεγαλώνει η μια η άλλη μικραίνει.
 - ✓ Πότε είναι ίσες
- Για το γράφημα:
 - ✓ Σε πόσες περιπτώσεις το κινητό απέχει την ίδια απόσταση από την μια πόλη και διαφορετικές αποστάσεις από την άλλη πόλη;
 - ✓ Σε ποια περίπτωση δεν ισχύει η προηγούμενη κατάσταση; (Δηλαδή δεν υπάρχουν δυο θέσεις όπου το κινητό απέχει ίσες αποστάσεις από τη μια πόλη και διαφορετικές από την άλλη)
 - ✓ Πότε είναι ευθεία και τι σημαίνει αυτό;
 - ✓ Πώς μεταβάλλονται οι αποστάσεις στις ειδικές περιπτώσεις
 - i. που η μία πόλη είναι πάνω στον αυτοκινητόδρομο,
 - ii. και οι δύο βρίσκονται σε θέσεις συμμετρικές ως προς τον άξονα του δρόμου,
 - iii. και οι δυο βρίσκονται στην ίδια πλευρά του δρόμου.

ΓΙΑ ΤΙΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

Ζητήστε από τους μαθητές να εκφράσουν στην τάξη τις απαντήσεις τους. Είναι πιθανόν οι μαθητές να δώσουν απαντήσεις όπως οι παρακάτω:

Διερεύνηση 1

Καθώς το κινητό κινείται από κάτω αριστερά, η κάθε απόσταση αρχικά μειώνεται και αφού αποκτήσει μια ελάχιστη απόσταση αρχίζει να μεγαλώνει όσο το κινητό απομακρύνεται από την πόλη.

Διερεύνηση 2

Εύκολα μπορούν να παρατηρήσουν και με τη βοήθεια του γραφήματος ότι συνήθως όταν η μια απόσταση μεγαλώνει, μεγαλώνει και η άλλη. Σε ορισμένες περιπτώσεις όταν η μια μεγαλώνει η άλλη μικραίνει.

Διερεύνηση 3

Για παράδειγμα, για την απόσταση της πόλης Β 8,48 μπορούν να βρουν δυο θέσεις με αποστάσεις από τη πόλη Α 4,47 και 11,64. Γραμμική είναι σε διάφορες περιπτώσεις. Μια περίπτωση είναι όταν οι δυο πόλεις ταυτίζονται. Γενικά όταν το γράφημά τους

είναι μια γραμμή. Όταν οι δυο πόλεις είναι συμμετρικές ως προς τον δρόμο το γράφημα είναι μια γραμμή. Όταν η μια ή και η δυο πόλεις βρίσκονται στον αυτοκινητόδρομο το γράφημα είναι ένα είδος ανοικτού πολυγώνου. Στην πρώτη περίπτωση η μια κορυφή του πολυγώνου ανήκει στον ένα άξονα και στη δεύτερη και οι δυο κορυφές του. Αυτό μπορεί να εξηγηθεί καθώς όταν το κινητό φτάσει στη μια πόλη η απόσταση από αυτή γίνεται 0. Έτσι το αντίστοιχο σημείο στο γράφημα ανήκει στον άξονα που περιγράφει την άλλη απόσταση.

Διερεύνηση 4

Η συμμεταβολή είναι συνάρτηση στις περιπτώσεις που στο γράφημα δεν υπάρχει διπλή γραμμή, όπως για παράδειγμα στην περίπτωση που οι δυο πόλεις ταυτίζονται ή όταν είναι συμμετρικές ως προς τον δρόμο.

Ανακεφαλαίωση

Ζητήστε από τους μαθητές να παρουσιάσουν στη τάξη τα αποτελέσματα των διερευνήσεων που έκαναν. Βοηθήστε τους να καταλήξουν σε συμπεράσματα σχετικά με το θέμα της διερεύνησης.

3.1.5 Εργασία 2: Η κίνηση σημείου σε κύκλο

Το σημείο M μπορεί να κινείται ελεύθερα πάνω στον κύκλο. Ερευνήστε τον τρόπο που μεταβάλλονται τα δυο τμήματα στα οποία διαιρείται η χορδή AM από το σημείο Σ .

ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΕΙΣ

1. Πώς μεταβάλλεται κάθε μήκος καθώς το σημείο κινείται στον κύκλο;
2. Πώς συµμεταβάλλονται τα μήκη των δυο ευθυγράµµων τµημάτων ΣA και ΣM ;
3. Διερευνήστε ειδικές περιπτώσεις. Για παράδειγμα διερευνήστε:
 - Πώς θα συµμεταβάλλονται τα μήκη των ΣM και ΣA όταν μετακινήσετε το Σ ώστε να είναι πάνω στον κύκλο;
 - Πώς θα συµμεταβάλλονται τα μήκη των ΣM και ΣA όταν μετακινήσετε το Σ ώστε να είναι εκτός του κύκλου;
 - Πώς θα συµμεταβάλλονται τα μήκη των ΣM και ΣA όταν μετακινήσετε το Σ ώστε να είναι στο κέντρο του κύκλου;
4. Μπορείτε να βρείτε μια εξίσωση (ένα τύπο) που να περιγράφει τη συµμεταβολή των ΣM και ΣA ;

Ανακεφαλαίωση: Συζητήστε στην τάξη σας για τα αποτελέσματα των διερευνήσεων που κάνατε. Περιγράψτε με δικά σας λόγια χρησιμοποιώντας και το γράφημα των δυο αποστάσεων, πώς η μεταβολή της μιας απόστασης επηρεάζει την μεταβολή της άλλης. Εξηγήστε γιατί αυτή η συµμεταβολή είναι συνάρτηση.

ΟΔΗΓΙΕΣ ΠΡΟΣ ΤΟΝ ΔΙΔΑΣΚΟΝΤΑ

ΓΙΑ ΤΗ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗ ΤΩΝ ΕΡΓΑΛΕΙΩΝ ΤΟΥ ΜΙΚΡΟΚΟΣΜΟΥ

Ζητήστε από τους μαθητές:

- Κινήστε το σημείο M και παρακολουθήστε τον τρόπο μεταβολής των $M\Sigma$ και $A\Sigma$ ξεχωριστά.
- Κινήστε το σημείο M και παρακολουθήστε πώς συµμεταβάλλονται τα δυο ευθύγραµµα τµήµατα.
- Περιγράψτε με δικά σας λόγια τις μεταβολές.
- Μεταβάλετε τη θέση του Σ ή την ακτίνα του κύκλου.
- Μην ξεχνάτε να παρακολουθείτε και το γράφηµα και την μεταβολή των δυο αποστάσεων καθώς και τα μήκη των πλευρών του ορθογωνίου.

ΓΙΑ ΤΙΣ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΕΙΣ

Ζητήστε από τους μαθητές να παρατηρούν και να εκφράζουν στην ομάδα τους και στην τάξη:

- Για κάθε τμήμα:
 - ✓ Πότε μεγαλώνει.

- ✓ Πότε μικραίνει.
- ✓ Πότε είναι η μεγαλύτερη δυνατή.
- Για τα δυο τμήματα:
 - ✓ Τι συμβαίνει στο ένα τμήμα όταν μεγαλώνει το άλλο;
 - ✓ Πότε είναι ίσα
- Για το γράφημα:
 - ✓ Τι συμβαίνει με τα δυο ευθύγραμμα τμήματα όταν το σημείο Γ βρίσκεται στο ανώτερο σημείο της καμπύλης και τι συμβαίνει όταν βρίσκεται στο κατώτερο σημείο;
 - ✓ Πότε το γράφημα πλησιάζει στην αρχή των αξόνων και πότε απομακρύνεται;
 - ✓ Πώς πρέπει να μεταβάλλονται οι αποστάσεις ώστε
 - i. το σημείο Γ να κατέρχεται της καμπύλης
 - ii. το σημείο Γ να ανέρχεται της καμπύλης.

ΓΙΑ ΤΙΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

Ζητήστε από τους μαθητές να εκφράσουν στην τάξη τις απαντήσεις τους. Είναι πιθανόν οι μαθητές να δώσουν απαντήσεις όπως οι παρακάτω:

Διερεύνηση 1

Κάθε μήκος άλλοτε μικραίνει και άλλοτε μεγαλώνει.

Διερεύνηση 2

Όταν μεγαλώνει το ένα το άλλο μικραίνει.

Διερεύνηση 3

Όταν το σημείο Σ ανήκει στον κύκλο τότε ταυτίζεται με το Μ ή το Α και επομένως η μια απόσταση είναι 0 και άρα οι δυο αποστάσεις δεν συµμεταβάλλονται. Όταν το Σ μετακινηθεί εκτός του κύκλου συμβαίνει το εξής. Όσο το Α είναι μεταξύ των Σ και Μ (δηλαδή στο ένα τόξο που ορίζουν οι εφαπτόμενες από το Σ στον κύκλο) και στο ένα ημικύκλιο από αυτά που ορίζει η ΣΟ η συµμεταβολή είναι μια υπερβολή. Δηλαδή τα δυο μεγέθη έχουν γινόμενο σταθερό. Όταν το Μ μεταφερθεί στο άλλο τεταρτημόριο η συµμεταβολή επαναλαμβάνεται. Όταν το Α πάψει να είναι ανάμεσα στα Σ και Μ τότε το Α ταυτίζεται με το Μ και έτσι η συµμεταβολή των ΣΑ και ΣΜ είναι γραμμική (διχοτόμος της γωνίας του 1^{ου} τεταρτημορίου) διότι αυτές είναι ίσες. Όταν το Σ μεταφερθεί στο κέντρο Ο οι δυο αποστάσεις παραμένουν σταθερές και ίσες άρα δεν υπάρχει συµμεταβολή και στο γράφημα έχουμε ένα σημείο.

Διερεύνηση 4

Όταν το σημείο Σ είναι εντός του κύκλου, η σχέση είναι $\Sigma\text{Α} \cdot \Sigma\text{Μ} = \text{σταθερό} = \rho^2 - (\Sigma\text{Ο})^2$. Δηλαδή τα δυο ποσά είναι αντιστρόφως ανάλογα και γι' αυτό το γράφημα έχει το σχήμα της υπερβολής. Άρα αν το ένα ονομαστεί χ και το άλλο ψ ισχύει $\psi = a/\chi$ όπου α το δεύτερο μέλος της πιο πάνω σχέσης. Στην άλλη περίπτωση που έχουμε συµμεταβολή είναι όταν το Σ είναι εκτός κύκλου. Στην περίπτωση αυτή η συνάρτηση που εκφράζει την συµμεταβολή έχει δυο κλάδους. Ο ένας είναι της μορφής $\psi = a/\chi$

όταν το $\chi = \Sigma M$ είναι μεγαλύτερο από το $\psi = \Sigma A$ και την μορφή $\psi = \chi$ όταν $\chi = \Sigma M$ είναι μικρότερο ή ίσο του ΣA . (Προφανώς στη δεύτερη περίπτωση η κατασκευή του μικρόκοσμου έγινε έτσι ώστε να μην ισχύει πάντοτε το θεώρημα της δύναμης σημείου ως προς κύκλο)

Ανακεφαλαίωση

Ζητήστε από τους μαθητές να παρουσιάσουν στη τάξη τα αποτελέσματα των διερευνήσεων που έκαναν. Βοηθήστε τους να καταλήξουν σε συμπεράσματα σχετικά με το θέμα της διερεύνησης.

3.1.6 Εργασία 3: Ο δρομέας

Ένας δρομέας σκοπεύει να ξεκινήσει από το σημείο Α με σκοπό να φτάσει στο νησί Ο κάνοντας τον λιγότερο δυνατό χρόνο. Γνωρίζει ότι η μέγιστη ταχύτητα με την οποία μπορεί να τρέξει είναι 10 Km/h ενώ μπορεί να κολυπήσει με ταχύτητα το πολύ 3 Km/h. Μπορείτε να ερευνήσετε πώς πρέπει να κινηθεί για να επιτύχει το σκοπό του;

ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΕΙΣ

1. Κινήστε το σημείο Μ από το Α μέχρι το Β και παρατηρήστε το ίχνος του σημείου Σ. Τι αναπαριστά το ίχνος του σημείου Σ;
2. Πώς συµμεταβάλλονται οι δυο αποστάσεις α και β;
3. Διερευνήστε για το πρόβλημα του δρομέα. Σύμφωνα με το πρόβλημα, ο δρομέας μπορεί να κινείται με 5 Km/h και να κολυπά με ταχύτητα 2 Km/h. Μπορείτε με την εντολή "Redefine" να καθορίσετε το σημείο Σ να αναπαριστά τον τρόπο συµμεταβολής της απόστασης α και του χρόνου που χρειάζεται για να κάνει όλη τη διαδρομή από το Α μέχρι το νησί Ο; Μπορείτε να βρείτε σε ποιά περίπτωση θα κάνει το ελάχιστο δυνατό χρόνο;
4. Στην επιφάνεια εργασίας υπάρχει σχεδιασμένη η γραφική παράσταση της συνάρτησης $\psi=15$. Αν επιλέξετε "Redefine" Μπορείτε να τροποποιήσετε τον τύπο της συνάρτησης. Ποιά συνάρτηση πρέπει να πληκτρολογήσετε ώστε η γραφική της παράσταση να ταυτίζεται με την γραμμή του ίχνους της;

Ανακεφαλαίωση: Ζητήστε από τους μαθητές να παρουσιάσουν στη τάξη τα αποτελέσματα των διερευνήσεων που έκαναν. Βοηθήστε τους να καταλήξουν σε συμπεράσματα σχετικά με το θέμα της διερεύνησης.

ΟΔΗΓΙΕΣ ΠΡΟΣ ΤΟΝ ΔΙΔΑΣΚΟΝΤΑ

Για τη διαχείριση των εργαλείων του μικρόκοσμου

Ζητήστε από τους μαθητές:

- Να κινούν το «Κινητό» και να παρακολουθούν τον τρόπο μεταβολής κάθε απόστασης ξεχωριστά.
- Να κινούν το σημείο Μ και να παρακολουθούν πώς συµμεταβάλλονται οι δυο αποστάσεις.
- Να περιγράφουν με δικά τους λόγια τις μεταβολές που παρατηρούν.
- Να μεταβάλλουν τις θέσεις των δυο πόλεων.
- Να μην ξεχνούν να παρακολουθούν και το γράφημα και τη μεταβολή των δυο αποστάσεων καθώς και τα μήκη των πλευρών του ορθογωνίου.

Για τις διερευνήσεις

Ζητήστε από τους μαθητές να παρατηρούν και να εκφράζουν στην ομάδα τους και στην τάξη:

- Για κάθε απόσταση:

- ✓ Πότε μεγαλώνει.
- ✓ Πότε μικραίνει.
- ✓ Πότε είναι η μεγαλύτερη δυνατή.
- Για τις δυο αποστάσεις:
 - ✓ Πότε μεγαλώνουν και οι δύο.
 - ✓ Πότε ενώ μεγαλώνει η μια η άλλη μικραίνει.
 - ✓ Πότε είναι ίσες
- Για το γράφημα:
 - ✓ Σε πόσες περιπτώσεις το κινητό απέχει την ίδια απόσταση από την μια πόλη και διαφορετικές αποστάσεις από την άλλη πόλη;
 - ✓ Σε ποια περίπτωση δεν ισχύει η προηγούμενη κατάσταση; (Δηλαδή δεν υπάρχουν δυο θέσεις όπου το κινητό απέχει ίσες αποστάσεις από τη μια πόλη και διαφορετικές από την άλλη)
 - ✓ Πότε είναι ευθεία και τι σημαίνει αυτό;
 - ✓ Πώς μεταβάλλονται οι αποστάσεις στις ειδικές περιπτώσεις
 - i. που η μία πόλη είναι πάνω στον αυτοκινητόδρομο,
 - ii. και οι δύο βρίσκονται σε θέσεις συμμετρικές ως προς τον άξονα του δρόμου,
 - iii. και οι δυο βρίσκονται στην ίδια πλευρά του δρόμου.

Για τις απαντήσεις

Ζητήστε από τους μαθητές να εκφράσουν στην τάξη τις απαντήσεις τους. Είναι πιθανόν οι μαθητές να δώσουν απαντήσεις όπως οι παρακάτω:

Διερεύνηση 1

Αναπαριστά τη σχέση που έχουν τα μήκη α και β .

Διερεύνηση 2

Η καμπύλη του ίχνους του σημείου Σ αναπαριστά τη σχέση που έχουν οι δυο μεταβλητές α και β . Μάλιστα καθώς εμείς μπορούμε να μεταβάλλουμε το μήκος α (ανεξάρτητη μεταβλητή) παρακολουθούμε το μήκος β να εξαρτάται από το α . Όταν μειώνεται το μήκος α αυξάνει το μήκος β και αντιστρόφως. Η ακριβής σχέση μπορεί να βρεθεί με τη γεωμετρία του προβλήματος. Δηλαδή αν η απόσταση $AB=20$ και η απόσταση του νησιού είναι 5 τότε η διαδρομή β έχει μήκος $\beta^2=25+(MB)^2$. Δηλαδή $\beta = \sqrt{25+(20-\alpha)^2}$ Αυτή είναι η σχέση που ορίζει τη γραφική παράσταση.

Διερεύνηση 3

Επιλέξτε το νησί Ο να βρίσκεται στην κατακόρυφη από το Β και σε απόσταση 5 μονάδες. Ακόμα επιλέξτε το μήκος AB να είναι 20,2 μονάδες. Σύμφωνα με την προηγούμενη διερεύνηση το σημείο Σ έχει συντεταγμένες (α, β) . Δηλαδή αναπαριστά τη σχέση των αποστάσεων α και β σε κάθε θέση της διαδρομής του. Για την απάντηση στη διερεύνηση αυτή πρέπει να πληκτρολογήσουμε ως συντεταγμένες στο $\Sigma(\alpha, \alpha/5+\beta/2)$.

Διερεύνηση 4

Πληκτρολογήστε τον τύπο της συνάρτησης $f(x)=x/5+0.5*\sqrt{25+(20.2-x)^2}$. Εύκολα παρατηρούμε ότι το γράφημα της συνάρτησης και το ίχνος του Σ ταυτίζονται.

Μπορείτε να διερευνήσετε το ίδιο θέμα όταν το μήκος AB είναι διαφορετικό ή η απόσταση και η θέση του O είναι διαφορετική και όταν τα στοιχεία της διαδρομής επίσης είναι διαφορετικά.

3.1.7 Εργασία 4: Η έννοια της συνάρτησης

Οι προηγηθείσες δραστηριότητες είχαν σκοπό να αναδείξουν την έννοια της συνάρτησης ως συμμεταβολή δυο μεγεθών, μέσα από μοντέλα και προσομοιώσεις στο ψηφιακό περιβάλλον του λογισμικού Geogebra. Δύο είναι τα κύρια ερωτήματα των διερευνήσεων αυτών στα οποία καλείστε να απαντήσετε και να συζητήσετε στη τάξη.

- Πότε η συμμεταβολή των δυο ποσοτήτων είναι συνάρτηση;
- Πώς εκφράζεται η συμμεταβολή αυτή αλγεβρικά σε κάθε μια από αυτές τις περιπτώσεις;

ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΕΙΣ

1. Διερευνήστε τη συμμεταβολή των συντεταγμένων σημείου που κινείται σε έλλειψη Στην περιοχή του λογισμικού, σχεδιάστε μια έλλειψη με τρία σημεία, επιλέγοντας τα σημεία $(-3,0)$, $(3,0)$ και $(0,2)$. Στο σχήμα που προκύπτει επιλέξτε ένα σημείο A να κινείται ελεύθερα και εμφανίστε τις συντεταγμένες του. Μπορείτε να περιγράψετε τον τρόπο συμμεταβολής των δυο συντεταγμένων; Είναι συνάρτηση η συμμεταβολή αυτή; Μπορείτε να ορίσετε μια συνάρτηση με βάση τις συμμεταβολές των συντεταγμένων του σημείου A;
2. Διερευνήστε τη συμμεταβολή των συντεταγμένων σημείου που κινείται σε ευθεία. Στο περιβάλλον εργασίας σχεδιάστε μια ευθεία και ένα σημείο A πάνω σε αυτή. Μπορείτε να περιγράψετε λεκτικά και αλγεβρικά τον τρόπο συμμεταβολής των συντεταγμένων του σημείου A;
3. Διερευνήστε τη συμμεταβολή βάσης και εμβαδού ισοσκελούς τριγώνου. Σχεδιάστε ένα ισοσκελές τρίγωνο του οποίου οι ίσες πλευρές έχουν σταθερό μήκος 2 μονάδες. Μπορείτε να βρείτε πώς μεταβάλλονται το μήκος της βάσης του και το εμβαδόν του;
4. Η συμμεταβολή και η αντιστοιχία σημείων. Στην επιφάνεια εργασίας εμφανίστε ένα "δρομέα" με όνομα "a", μήκος 200 μονάδες από το -4 έως το 4 και να μεταβάλεται ανά 1 μονάδα (αύξηση). Ορίστε στη συνέχεια δυο σημεία το A με συντεταγμένες $(a,3)$ και στη συνέχεια ένα δεύτερο B με συντεταγμένες $(2 \cdot x(A), 1)$. Στη συνέχεια σχεδιάστε το διάνυσμα AB και επιλέξτε τα δυο σημεία να αφήνουν τα ίχνη τους. Μπορείτε να περιγράψετε τον τρόπο συμμεταβολής των δυο σημείων A και B καθώς μεταβάλετε τον δρομέα; Τι θα συμβεί αν μεταβάλετε την αύξηση διαδοχικά σε 0.5, 0.25, 0.125 κ.ο.κ;

Ανακεφαλαίωση: Ζητήστε από τους μαθητές να παρουσιάσουν στη τάξη τα αποτελέσματα των διερευνήσεων που έκαναν. Βοηθήστε τους να καταλήξουν σε συμπεράσματα σχετικά με το θέμα της διερεύνησης.

ΟΔΗΓΙΕΣ ΠΡΟΣ ΤΟΝ ΔΙΔΑΣΚΟΝΤΑ

Για τη διαχείριση των εργαλείων του μικρόκοσμου

Ζητήστε από τους μαθητές:

- Να χρησιμοποιήσουν τα εργαλεία του λογισμικού για να κατασκευάσουν μόνοι τους τον αντίστοιχο μικρόκοσμο.
- Να κινούν το εκάστοτε σημείο και να παρακολουθούν τον τρόπο μεταβολής των σχετικών μεγεθών.
- Να περιγράφουν με δικά τους λόγια τις μεταβολές που παρατηρούν.
- Να μεταβάλλουν τις θέσεις των δυο πόλεων.
- Να μην ξεχνούν να παρακολουθούν και το γράφημα και τη μεταβολή των δυο αποστάσεων καθώς και τα μήκη των πλευρών του ορθογωνίου.

Για τις διερευνήσεις

Ζητήστε από τους μαθητές να παρατηρούν και να εκφράζουν στην ομάδα τους και στην τάξη:

- Για κάθε μέγεθος
 - ✓ Πότε μεγαλώνει.
 - ✓ Πότε μικραίνει.
 - ✓ Πότε είναι η μεγαλύτερη δυνατή.
- Για τα δυο μεγέθη:
 - ✓ Πότε μεγαλώνουν και οι δύο.
 - ✓ Πότε ενώ μεγαλώνει το ένα το άλλο μικραίνει.
 - ✓ Πότε είναι ίσα

Για τις απαντήσεις

Ζητήστε από τους μαθητές να εκφράσουν στην τάξη τις απαντήσεις τους. Είναι πιθανόν οι μαθητές να δώσουν απαντήσεις όπως οι παρακάτω:

Διερεύνηση 1

Με τη βοήθεια των γνώσεών τους από τα μαθηματικά της προηγούμενης τάξης αναμένεται να προσδιορίσουν τις συναρτήσεις $\psi = \pm \sqrt{4 - \frac{4}{13}x^2}$.

Διερεύνηση 2

Οι μαθητές αναμένεται να εμπλέξουν και την κλίση της ευθείας και με αυτό τον τρόπο να διατυπώσουν την συνάρτηση $\psi = ax + b$ για να περιγράψουν τον τρόπο συμμεταβολής των δυο συντεταγμένων.

Διερεύνηση 3

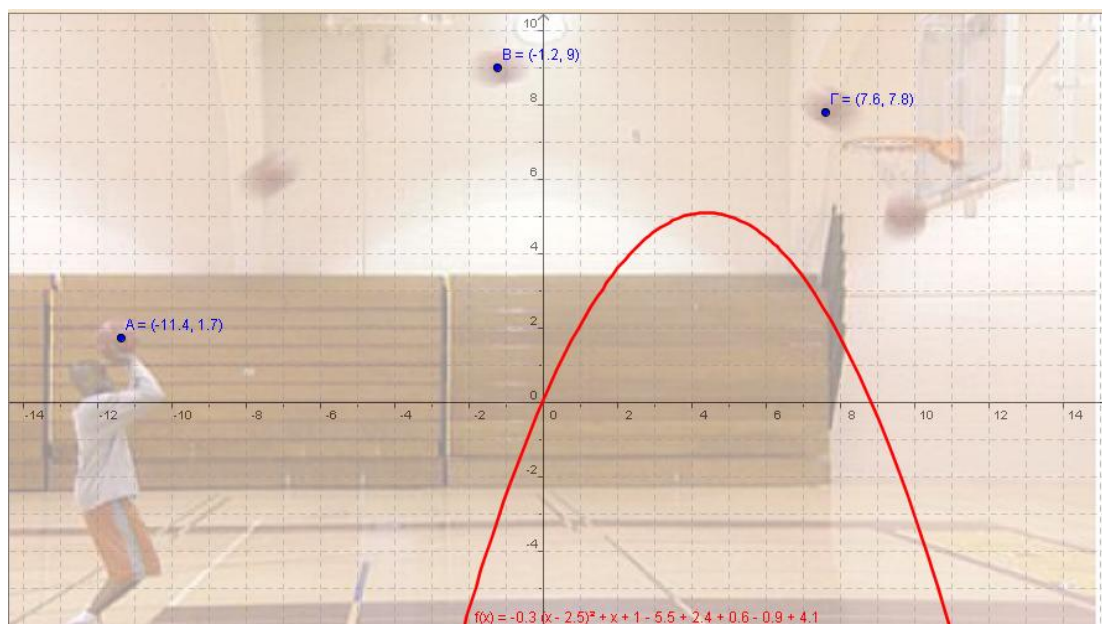
Οι μαθητές αναμένεται αφού λάβουν υπόψη τους τον τύπο του εμβαδού τριγώνου να

προσδιορίσουν την συνάρτηση $\psi = \frac{1}{2}x\sqrt{4 - \frac{x^2}{4}}$

Διερεύνηση 4

Οι μαθητές αναμένεται να διαπιστώσουν ότι τα σημεία A και B συμμεταβάλλονται καθώς ο δρομέας κινείται. Ο τρόπος που συμμεταβάλλονται τα A και B καθορίζεται από το βήμα αλλαγής του δρομέα έτσι ώστε σε κάθε θέση του A να αντιστοιχεί μια θέση του B. Οι μαθητές αναμένεται να διαπιστώσουν με μεγαλύτερη σαφήνεια την έννοια της αντιστοιχίας μεταξύ των θέσεων των δυο σημείων καθώς και μια βαθύτερη σύνδεση αυτής με την έννοια της συμμεταβολής των θέσεων αυτών.

3.2 ΣΕΝΑΡΙΟ 2 : Μελέτη των βασικών Συναρτήσεων



3.2.1 Η κεντρική ιδέα του σεναρίου

Στο σενάριο αυτό οι μαθητές καλούνται να διερευνήσουν και να μελετήσουν τις βασικές συναρτήσεις, δηλαδή τις πολυωνυμικές, τις ρητές, τις τριγωνομετρικές, τις εκθετικές και τις λογαριθμικές. Καθώς έχουν ήδη εμπειρίες για τις συναρτήσεις αυτές από τα προηγούμενα σχολικά έτη θα έχουν την ευκαιρία να τις χρησιμοποιήσουν για να διερευνήσουν διάφορες μορφές των συναρτήσεων αυτών καθώς και να εξετάσουν διάφορες ιδιότητες αυτών.

Ποιο συγκεκριμένα οι μαθητές εμπλέκονται σε διαδικασίες προσδιορισμού του τύπου μιας συνάρτησης ώστε να έχει μια συγκεκριμένη ιδιότητα όπως:

- (1) Να διέρχεται από κάποια σημεία
- (2) Να κινείται παράλληλα
- (3) Να σχηματίζει το συμμετρικό γράφημα ως προς τους δύο άξονες και κέντρο την αρχή των αξόνων
- (4) Να μετασχηματίζεται σε μια συγκεκριμένη συνάρτηση μέσω μετασχηματισμών.
- (5) Να προσδιορίζει μια νέα συνάρτηση με ένα καθορισμένο τρόπο (συμμετρική ως προς τη διχοτόμο της γωνίας $\chi\psi$)

Έτσι, κατανοούν την αξία των ιδιοτήτων των συναρτήσεων και πολύ περισσότερο την αξία του να γνωρίζουν τις ιδιότητες, να μπορούν να τις αναγνωρίζουν και να τις ορίζουν μέσω της εξίσωσης ή του γραφήματος της συνάρτησης. Οι προτεινόμενες δραστηριότητες δίνουν την ευκαιρία στους μαθητές να εμπλακούν άμεσα με τα γραφήματα των συναρτήσεων αυτών, τα οποία μπορούν να χειρίζονται άμεσα με το

ποντίκι τους, καθώς και με την εξίσωσή τους την οποία μπορούν να τροποποιούν και να επαναπροσδιορίζουν. Έτσι, η διπλή αναπαράσταση των βασικών συναρτήσεων και ιδιαίτερα η άμεση σύνδεση αυτών των μορφών δίνει στους μαθητές τη δυνατότητα να τις χρησιμοποιούν ως εργαλεία προκειμένου να καθορίσουν τις ζητούμενες ιδιότητές τους.

3.2.2 Στόχοι

- Να αποκτήσουν εμπειρίες με μερικές από τις ιδιότητες βασικών συναρτήσεων.
- Να κατανοήσουν την σύνδεση του ορισμού της εξίσωσης της συνάρτησης με τις ιδιότητες αυτής.
- Να αποκτήσουν εμπειρίες σχετικές με την αναγνώριση ιδιοτήτων των συναρτήσεων από το γράφημα και την εξίσωση αυτής.
- Να κατανοήσουν τη σύνδεση της γραφικής παράστασης της συνάρτησης με τις ιδιότητες αυτής.
- Να εκφράσουν ποιοτικά χαρακτηριστικά των γραφημάτων που συνδέονται με τις ιδιότητες των συναρτήσεων.

3.2.3 Διδακτική πρόταση

ΟΡΓΑΝΩΣΗ ΤΗΣ ΤΑΞΗΣ

Οι δραστηριότητες αυτές ενδείκνυται να διδάσκονται στο εργαστήριο υπολογιστών και οι μαθητές να εργάζονται σε ομάδες 2-3 ατόμων με φύλλο εργασίας. Ωστόσο η δομή τους εξυπηρετεί και την ένταξή τους σε τάξη που έχει μόνο ένα υπολογιστή με βιντεοπροβολέα. Σ' αυτή τη περίπτωση οι μαθητές συμπληρώνουν τα φύλλα εργασίας με βάση την διερεύνηση που κάποιος άλλος διεξάγει (διδάσκων ή μαθητής) ενώ οι ίδιοι παρεμβαίνουν στην διερεύνηση εκφράζοντας τη δική τους στρατηγική. Μ' άλλα λόγια στην διερεύνηση συμμετέχει όλη η τάξη ενώ την ευθύνη της διεξαγωγής της διερεύνησης έχει ο διδάσκων. Αυτό σημαίνει ότι ο ίδιος ο διδάσκων πρέπει αφενός να επιδιώκει να συζητηθούν στη τάξη όλες οι πιθανές στρατηγικές της διερεύνησης και αφετέρου να έχει από πριν προετοιμάσει τον τρόπο που θα χειριστεί τις στρατηγικές αυτές καθώς και τις διαφορετικές εκβάσεις τους. Άρα πρέπει με τη στάση του να προκαλεί την εφαρμογή των διαφορετικών τρόπων διερεύνησης, να ενθαρρύνει κάθε μαθητή να δοκιμάζει τις ιδέες του, να εκφράζει τις εικασίες του και να διατυπώνει τα συμπεράσματά του ελεύθερα.

ΟΙ ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΕΣ ΔΥΝΑΤΟΤΗΤΕΣ ΤΟΥ ΣΕΝΑΡΙΟΥ

Οι προτεινόμενες στο σενάριο δραστηριότητες αφορούν φαινόμενα τα οποία προκαλούνται από την δράση των μαθητών σε προσχεδιασμένους υπολογιστικούς μικρόκοσμους με σκοπό την ανάδειξη μερικών από τις ιδιότητες αυτών. Αυτό σημαίνει ότι οι μικρόκοσμοί έχουν σχεδιαστεί ώστε να ενσωματώνουν συγκεκριμένες βασικές συναρτήσεις οι ιδιότητες των οποίων είναι δυνατόν να αναδύονται κατά τη διάρκεια της διερεύνησης. Έτσι οι απαντήσεις στα ερωτήματα που τίθενται στο πλαίσιο αυτών των διερευνήσεων αλλά και αυτών που ο διδάσκων ή οι ίδιοι οι μαθητές μπορούν να θέσουν είναι δυνατόν να αποτελέσουν ένα περιβάλλον απόκτησης και έκφρασης εμπειριών σχετικών με τις ιδιότητες των συναρτήσεων. Τα ενσωματωμένα στους μικρόκοσμους εργαλεία δίνουν στους μαθητές τη δυνατότητα:

- να κάνουν πειράματα,
- να παρατηρούν και να ερμηνεύουν τα αποτελέσματα των χειρισμών τους,
- να εκφράζουν εικασίες, να κάνουν γενικεύσεις, να διατυπώνουν υποθέσεις και θεωρήματα και να τα εκφράζουν με μαθηματικούς όρους.

Ακόμα, μπορούν να επεμβαίνουν και να επαναπροσδιορίζουν τις δυνατότητες των εργαλείων ή να επαναδιατυπώνουν τον τρόπο ορισμού των αντικειμένων και να μεταβάλλουν την εμφάνιση τους. Από αυτή την άποψη οι μικρόκοσμοι είναι επαναχρησιμοποιήσιμοι και δίνουν τη δυνατότητα στους χρήστες να διατυπώνουν και νέα ερωτήματα που αφορούν ιδιαίτερες γνωστικές πτυχές των μαθηματικών αντικειμένων.

ΠΟΡΕΙΑ ΤΗΣ ΕΦΑΡΜΟΓΗΣ ΤΟΥ ΣΕΝΑΡΙΟΥ

Το σενάριο αποτελείται από τέσσερις εργασίες. Στην πρώτη οι μαθητές διαπραγματεύονται μερικές από τις ιδιότητες της τετραγωνικής συνάρτησης, στη δεύτερη ιδιότητες μιας ρητής συνάρτησης, στην τρίτη ιδιότητες τριγωνομετρικών συναρτήσεων και στην τέταρτη ιδιότητες της εκθετικής και της λογαριθμικής συνάρτησης.

Η εμπλοκή των μαθητών με κάθε μια δραστηριότητα αναμένεται να αναδείξει,

- τη διασύνδεση των ιδιοτήτων της με τη μορφή του γραφήματος με την εξίσωσή της,
- την ενσωμάτωση ή μεταβολή ιδιοτήτων μιας συνάρτησης μέσω της μεταβολής του γραφήματος ή της εξίσωσής της.

Για παράδειγμα, το να διέρχεται το γράφημα της τετραγωνικής συνάρτησης από τρία συγκεκριμένα σημεία έχει σχέση με τον τρόπο ορισμού της ο οποίος τελικά καθορίζεται από την εξίσωσή της. Έτσι η σχετική διερεύνηση αναμένεται να αναδείξει τον ρόλο των συντελεστών στη διαμόρφωση της κατάλληλης συνάρτησης. Ο εκπαιδευτικός μπορεί να κατευθύνει τους μαθητές να εξετάσουν αρχικά πότε η συνάρτηση επαληθεύεται από ένα σημείο ή από δυο και τέλος και από τα τρία σημεία. Οι επόμενες δραστηριότητες, είναι εστιασμένες στους κανόνες μετασχηματισμού της συνάρτησης ώστε το γράφημά της να μετατοπίζεται παράλληλα με τον εαυτόν της είτε να είναι συμμετρικό του αρχικού ως προς άξονα ή σημείο, είτε να μετατοπίζεται οριζόντια ή κατακόρυφα είτε να διαστέλλεται ή να συστέλλεται.

Ο εκπαιδευτικός μπορεί να ζητήσει από τους μαθητές να προβλέπουν την εξίσωσή της και να την εκφράζουν και στη συνέχεια να επαληθεύουν τις προβλέψεις τους.

ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

Εργασία	Περιγραφή	Τμήμα εφαρμογής	Περιεχόμενο
Εργασία 1	Πολυωνυμικές συναρτήσεις	Όλοι	Επαναπροσδιορισμό του τύπου ώστε η γραφική παράσταση να διέρχεται από 1 ή 2 ή 3 σημεία.
Εργασία 2	Ρητές συναρτήσεις	Όλοι	Κανόνες μετασχηματισμού της συνάρτησης για παράλληλη μεταφορά της καμπύλης και συμμετρίες της ως προς τους άξονες και το κέντρο του συστήματος.
Εργασία 3	Τριγωνομετρικές συναρτήσεις	Όλοι	Μετασχηματισμός της καμπύλης όταν στη θέση της μεταβλητής x πληκτρολογούνται διάφορες σχέσεις του x με τους αριθμούς $\pi/2, \pi$ και 2π .
Εργασία 4	Εκθετική & Λογαριθμική	Όλοι	Επαναπροσδιορισμό του τύπου ώστε να διέρχεται από 1 ή 2 ή 3 σημεία.

3.2.4 Θέμα 1: Βρείτε την κατάλληλη συνάρτηση

Στην επιφάνεια εργασίας του παρακάτω μικρόκοσμου έχει σχεδιαστεί η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης καθώς και τρία σταθερά σημεία A, B και Γ. Μπορείτε να επαναπροσδιορίσετε την εξίσωση της συνάρτησης ώστε η γραφική της παράσταση να διέρχεται από τα σημεία αυτά;

ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΕΙΣ

1. Μπορείτε να επαναπροσδιορίσετε την καμπύλη ώστε η γραφική της παράσταση να διέρχεται από το σημείο A; Σε ποια περίπτωση το σημείο A γίνεται κορυφή της καμπύλης;
2. Μπορείτε να επαναπροσδιορίσετε την συνάρτηση ώστε η γραφική της παράσταση να διέρχεται από τα σημεία B και Γ; Σε ποια περίπτωση τα δυο σημεία είναι συμμετρικά;
3. Μπορείτε να επαναπροσδιορίσετε την συνάρτηση ώστε η γραφική της παράσταση να διέρχεται και από τα τρία σημεία A, B και Γ.
4. Μετακινήστε τα τρία σημεία στις θέσεις $(-1,0)$, $(2,0)$ και $(-4,2)$. Μπορείτε να προβλέψετε την εξίσωση της συνάρτησης ώστε η γραφική της παράσταση να διέρχεται και από τα τρία σημεία.

Ανακεφαλαίωση: Ζητήστε από τους μαθητές να παρουσιάσουν στη τάξη τα αποτελέσματα των διερευνήσεων που έκαναν. Βοηθήστε τους να καταλήξουν σε συμπεράσματα σχετικά με το θέμα της διερεύνησης.

Οι δραστηριότητες αυτής της εργασίας είχαν ως σκοπό να εμπλέξουν τους μαθητές στον προσδιορισμό συνάρτησης που να διέρχεται από ένα ή περισσότερα γνωστά σημεία. Παρόλο που ήταν γνωστός ο τύπος της αλγεβρικής εξίσωσης της συνάρτησης, η εύρεση αυτής δεν είναι καθόλου εύκολη υπόθεση. Απαιτεί αρκετή νοητική εργασία που βασίζεται στη διαίσθηση αλλά και ακόμα περισσότερη αλγεβρική η οποία στηρίζεται στην διαισθητική κατανόηση. Η εργασία αυτή που στα Μαθηματικά ονομάζεται "προσαρμογή καμπύλης" στα δεδομένα (κυρίως στατιστικά) αν και δεν διδάσκεται θεωρούμε ότι είναι χρήσιμη σε αυτό το στάδιο καθώς αναδεικνύει την σημασία και τον ρόλο των ιδιοτήτων της συνάρτησης που επιλέγεται κάθε φορά. Από την άλλη, η εύρεση σημείων που επαληθεύουν την συνάρτηση είναι απλή διαδικασία που έχει σκοπό την σχεδίαση της γραφικής παράστασης της δεδομένης αλγεβρικά συνάρτησης.

Οι διερευνήσεις με τις οποίες πρόκειται να εμπλακούν σ' αυτή την εργασία δηλώνουν απερίφραστα

- τον ρόλο των συντελεστών της εξίσωσης στον προσδιορισμό της ακριβούς παραβολής
- τον ρόλο του άξονα συμμετρίας της καθώς και
- την θέση της κορυφής της.

ΟΔΗΓΙΕΣ ΠΡΟΣ ΤΟΝ ΔΙΔΑΣΚΟΝΤΑ

Για τη διαχείριση των εργαλείων του μικρόκοσμου

Ζητήστε από τους μαθητές:

- Να κινούν το γράφημα και να παρακολουθούν τον τρόπο μεταβολής της εξίσωσής του.
- Να κινούν τα σημεία A, B και Γ και επαναλαμβάνουν τον προσδιορισμό της συνάρτησης.
- Να περιγράφουν με δικά τους λόγια τις μεταβολές που παρατηρούν καθώς κινούν τη γραφική παράσταση.
- Να μην ξεχνούν να παρακολουθούν και το γράφημα και την εξίσωσή του κατά τις μεταβολές.

Για τις διερευνήσεις

Ζητήστε από τους μαθητές να παρατηρούν και να εκφράζουν στην ομάδα τους και στην τάξη:

- Για το γράφημα:
 - ✓ Τι μεταβάλλεται στο ίδιο το γράφημα όταν το μετακινείτε.
 - ✓ Τι μεταβάλλεται και τι όχι στις αλλαγές της θέσης του γραφήματος σε σχέση με το σύστημα συντεταγμένων.
 - ✓ Πότε είναι η μεγαλύτερη δυνατή.
- Για την εξίσωση του γραφήματος:
 - ✓ Τι αλλάζει στην εξίσωση όταν μεταφέρετε το γράφημα οριζόντια προς τα αριστερά ή προς τα δεξιά.
 - ✓ Τι αλλάζει στην εξίσωση όταν μεταφέρετε το γράφημα κατακόρυφα προς τα αριστερά ή προς τα δεξιά.
 - ✓ Τι αλλάζει στο γράφημα όταν μεταβάλλετε τον συντελεστή της μεταβλητής x στην εξίσωση.
 - ✓ Ποια συνάρτηση πρέπει να πληκτρολογήσετε στη θέση του υπάρχοντος τύπου ώστε το γράφημά της να διέρχεται από το ένα ή τα δυο ή τα τρία σημεία.
- Για τα σημεία A, B και Γ:
 - ✓ Να βρουν περισσότερες από μια γραφικές παραστάσεις που να διέρχονται από ένα σημείο, π.χ. το A.
 - ✓ Να ερευνήσουν αν υπάρχουν περισσότερες από μια γραφικές παραστάσεις που να διέρχονται από δυο σημεία, π.χ. τα A και B.
 - ✓ Να ερευνήσουν αν υπάρχουν περισσότερες από μια γραφικές παραστάσεις που να διέρχονται από τρία σημεία, π.χ. τα A, B και Γ.
 - ✓ Να ερευνήσουν αν υπάρχουν και άλλου τύπου συναρτήσεις, οι γραφικές παραστάσεις των οποίων να διέρχονται από ένα ή δυο ή τρία σημεία.

Για τις απαντήσεις

Ζητήστε από τους μαθητές να εκφράσουν στην τάξη τις απαντήσεις τους. Είναι πιθανόν οι μαθητές να δώσουν απαντήσεις όπως οι παρακάτω:

Διερεύνηση 1

Αφού μεταφέρουν το γράφημα σε διάφορες θέσεις έτσι ώστε το σημείο A να ανήκει σ' αυτό, να απαντήσουν ότι υπάρχουν άπειρες λύσεις. Μπορούν να τοποθετήσουν το σημείο A σε μια συγκεκριμένη θέση και να κάνουν προβλέψεις για τον τύπο της συνάρτησης ώστε να διέρχεται από το A. Για παράδειγμα, αν ορίσουν το A στη θέση (-10,0) μια από τις εξισώσεις που αναμένεται να βρουν είναι η $f(x) = -0.3(x+6)^2 + x + 14.8$

Διερεύνηση 2

Μπορούν να μετακινούν το γράφημα ώστε αυτό να διέρχεται από το A και το B. Αναμένεται να διαπιστώσουν ότι χωρίς να αλλάξουν τον συντελεστή -0,3 στον τύπο της θα βρουν μόνο μια καμπύλη που να διέρχεται από τα δυο σημεία. Αν αλλάξουν τον τύπο της μπορούν να προβλέψουν πολλές αν θεωρήσουν τη γενική της μορφή $\psi = -0.3x^2 + \beta x + \gamma$ και λύσουν το σύστημα που προκύπτει με την αντικατάσταση των τριών σημείων.

Διερεύνηση 3

Στην περίπτωση αυτή πρέπει να επαναπροσδιορίσουν τον τύπο της συνάρτησης. Να υποθέσουν την γενική μορφή $\psi = ax^2 + \beta x + \gamma$ και στη συνέχεια να αντικαταστήσουν τις συντεταγμένες των τριών σημείων και να λύσουν το σύστημα.

Διερεύνηση 4

Επαναλαμβάνουν ότι έκαναν στην προηγούμενη δραστηριότητα. Μπορούν ακόμα να υποθέσουν τον τύπο $f(x) = a \cdot (x-2) \cdot (x+1)$ και να πειραματιστούν με την τιμή του a. Αναμένεται να βρουν τον τύπο $f(x) = 0.1 \cdot (x+1) \cdot (x-2)$ που μένει να επαληθεύσουν και αλγεβρικά.

3.2.5 Θέμα 2: Επανακαθορίστε τη συνάρτηση

Στην επιφάνεια εργασίας του παρακάτω μικρόκοσμου έχει σχεδιαστεί η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης. Διερευνήστε πώς πρέπει να επαναπροσδιορίσετε τον τύπο της συνάρτησης ώστε η γραφική της παράσταση να μετακινείται παράλληλα με τον εαυτόν της ή να μετακινείται σε θέση συμμετρική ως προς τους άξονες ή το κέντρο του συστήματος των αξόνων;

ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΕΙΣ

1. Τι θα αλλάξει στην εξίσωση της συνάρτησης αν μετακινήσετε με το ποντίκι σας την καμπύλη οριζόντια ή κατακόρυφα προς τις δυο κατευθύνσεις;
2. Τι θα συμβεί στην καμπύλη της συνάρτησης αν στη θέση του συντελεστή 1 του x στον αριθμητή και στον παρανομαστή πληκτρολογήσετε άλλο αριθμό; Τι μεταβάλλεται στην καμπύλη όταν αυξάνετε ή ελαττώνετε αυτόν τον συντελεστή.
3. Τι θα συμβεί στην καμπύλη όταν στη θέση του αριθμού 2 πληκτρολογήσετε άλλο αριθμό;
4. Μπορείτε να διατυπώσετε κανόνες μετασχηματισμού της συνάρτησης ώστε το γράφημα αυτής (1) να μετακινείται παράλληλα με τον εαυτό του και (2) να προκύπτει η συμμετρική καμπύλη ως προς τον άξονα $x'x$ (3) η συμμετρική καμπύλη ως προς τον άξονα $y'y$ (4) η συμμετρική καμπύλη ως προς την αρχή των αξόνων;

Ανακεφαλαίωση: Ζητήστε από τους μαθητές να ανακοινώσουν στη τάξη τον τρόπο που εργάστηκαν στις διερευνήσεις, να ανακοινώσουν τα συμπεράσματά τους τα σχετικά με τους μετασχηματισμούς στους οποίους υποβάλλατε την συνάρτηση καθώς και τους αλγεβρικούς κανόνες που διατύπωσαν στις προηγούμενες διερευνήσεις.

ΟΔΗΓΙΕΣ ΠΡΟΣ ΤΟΝ ΔΙΔΑΣΚΟΝΤΑ

Για τη διαχείριση των εργαλείων του μικρόκοσμου

Ζητήστε από τους μαθητές:

- Να κινούν το γράφημα και να παρακολουθούν τον τρόπο μεταβολής της εξίσωσής του.
- Να επιλέγουν την εντολή «Redefine» για να μεταβάλλουν τους συντελεστές της εξίσωσης της συνάρτησης και να παρακολουθούν τις αλλαγές στο γράφημα.
- Να περιγράφουν με δικά τους λόγια τις μεταβολές που παρατηρούν στο γράφημα ή στην εξίσωση της συνάρτησης καθώς κινούν το γράφημα ή αλλάζουν τους συντελεστές της εξίσωσης.

Για τις διερευνήσεις

Ζητήστε από τους μαθητές να παρατηρούν και να εκφράζουν στην ομάδα τους και στην τάξη:

- Για το γράφημα:
 - ✓ Τι αλλάζει στο γράφημα όταν μειώνετε ή αυξάνετε τον συντελεστή 1 του x .

- ✓ Τι αλλάζει στο γράφημα όταν μειώνετε ή αυξάνετε τον συντελεστή 2 της εξίσωσης.
- Για την εξίσωση του γραφήματος:
 - ✓ Ποιοί συντελεστές μεταβάλλονται στην εξίσωση της συνάρτησης και πώς, όταν μετακινούν το ίδιο το γράφημα οριζόντια.
 - ✓ Ποιοί συντελεστές μεταβάλλονται στην εξίσωση της συνάρτησης και πώς, όταν μετακινούν το ίδιο το γράφημα κατακόρυφα.
 - ✓ Ποιοι συντελεστές δεν μεταβάλλονται κατά τις μετακινήσεις του γραφήματος.
- Για τον κανόνα:
 - ✓ Επαναλάβετε τις μεταβολές στο γράφημα και διατυπώστε κανόνες για την μεταβολή της εξίσωσης.
 - ✓ Επαναλάβετε τις μεταβολές στην εξίσωση και διατυπώστε κανόνες για τις μεταβολές στο γράφημα.

Για τις απαντήσεις

Ζητήστε από τους μαθητές να εκφράσουν στην τάξη τις απαντήσεις τους. Είναι πιθανόν να δώσουν απαντήσεις όπως οι παρακάτω:

Διερεύνηση 1

Όταν μεταφέρουν το γράφημα κατακόρυφα προς τις θετικές τιμές του άξονα ψ , αυξάνεται ο σταθερός όρος στο τέλος της εξίσωσης. Όταν μετακινούν το γράφημα προς τα αρνητικά ψ αυτός μειώνεται. Όταν η μετακίνηση γίνεται οριζόντια προς τα δεξιά αυξάνει ο συντελεστής 2 ενώ προς τα αριστερά μειώνεται.

Διερεύνηση 2

Όταν πληκτρολογούν στη θέση του 2 αριθμούς 3, 4, 5, 8, 10 κ.ο.κ. η καμπύλη πλαταίνει. Όταν πληκτρολογούν αριθμούς μικρότερους του 2 αυτή στενεύει.

Διερεύνηση 3

Στην περίπτωση αυτή πρέπει να επαναπροσδιορίσουν τον τύπο της συνάρτησης. Να υποθέσουν την γενική μορφή $\psi = ax^2 + bx + c$ και στη συνέχεια να αντικαταστήσουν τις συντεταγμένες των τριών σημείων και να λύσουν το σύστημα.

Διερεύνηση 4

Οι μαθητές αναμένεται να διατυπώσουν κανόνες παρόμοιους με αυτούς που διατύπωσαν στις προηγούμενες τρεις διερευνήσεις. Δεν είναι απαραίτητο να διατυπώσουν κανόνες με αυστηρότητα ή πληρότητα ή σαφήνεια. Οι διερευνήσεις αυτές στοχεύουν να μάθουν τους μαθητές (1) να αναγνωρίζουν ποιοτικές διαφορές στα γραφήματα και να τα συνδέουν με την εξίσωσή της και (2) να διατυπώνουν συμπεράσματα όταν κάνουν διερευνήσεις πάνω σε ποιοτικά χαρακτηριστικά και μεταβολές της συνάρτησης.

3.2.6 Θέμα 3: Ο μετασχηματισμός της ημιτονοειδούς καμπύλης

Στην επιφάνεια εργασίας έχουμε σχεδιάσει τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \eta\mu x$, δηλαδή $[f(x) = \sin(x)]$;

Διερευνήστε πώς μετασχηματίζεται η καμπύλη της συνάρτησης όταν στη θέση της μεταβλητής x πληκτρολογήσετε γραμμικούς συνδυασμούς του x με το $\pi/2$, το π και το 2π .

ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΕΙΣ

1. Τι θα συμβεί στο γράφημα αν στη θέση του x πληκτρολογήσετε $\pi/2 - x$; Μπορείτε να επανακαθορίσετε τον τύπο της συνάρτησης $g(x)$ ώστε το γράφημά της να ταυτίζεται με αυτό της $f(x)$;
2. Τι θα συμβεί στο γράφημα αν στη θέση του x πληκτρολογήσετε $\pi - x$; Μπορείτε να επανακαθορίσετε τον τύπο της συνάρτησης $g(x)$ ώστε το γράφημά της να ταυτίζεται με αυτό της $f(x)$;
3. Τι θα συμβεί στο γράφημα αν στη θέση του x πληκτρολογήσετε $2\pi - x$; Μπορείτε να επανακαθορίσετε τον τύπο της συνάρτησης $g(x)$ ώστε το γράφημά της να ταυτίζεται με αυτό της $f(x)$;
4. Τι θα συμβεί στο γράφημα της συνάρτησης $f(x) = \sin(x)$ αν στη θέση της μεταβλητής x πληκτρολογήσετε (1) $\pi/2 + x$, (2) $3\pi/2 - x$, (3) $3\pi/2 + x$; Πώς πρέπει να επανακαθορίσετε την συνάρτησης $g(x)$ ώστε το γράφημά της να ταυτίζεται με αυτό που θα προκύψει από τους μετασχηματισμούς της συνάρτησης $f(x)$

Ανακεφαλαίωση: Συζητήστε με τους μαθητές σας στη τάξη για τον τρόπο που εργάστηκαν στις διερευνήσεις που προηγήθηκαν.

- Ζητήστε τους να διατυπώσουν τα συμπεράσματά τους για τους μετασχηματισμούς της συνάρτησης που διερεύνησαν.
- Ζητήστε τους να διατυπώσουν τα συμπεράσματά τους για τις συναρτήσεις που οι γραφικές τους παραστάσεις ταυτίζονται με αυτές των μετασχηματισμών της $f(x)$.

ΟΔΗΓΙΕΣ ΠΡΟΣ ΤΟΝ ΔΙΔΑΣΚΟΝΤΑ

Για τη διαχείριση των εργαλείων του μικρόκοσμου

Ζητήστε από τους μαθητές:

- Να επιλέγουν την εντολή «Redefine» για να μεταβάλλουν τους συντελεστές της εξίσωσης της συνάρτησης και να παρακολουθούν τις αλλαγές στο γράφημα.
- Να περιγράφουν με δικά τους λόγια τις μεταβολές που παρατηρούν στο γράφημα της συνάρτησης καθώς αλλάζουν τους συντελεστές της εξίσωσης.

Για τις διερευνήσεις

Ζητήστε από τους μαθητές να κάνουν πειράματα, να παρατηρούν και να εκφράζουν στην ομάδα τους και στην τάξη:

- Για το γράφημα της $f(x)$:

- ✓ Να κάνουν σταδιακά τις αλλαγές στον τύπο. Πρώτα να πληκτρολογούν το $-x$ και να βλέπουν τι αλλάζει στο νέο γράφημα και μετά να προσθέτουν $\pi/2$ ή π ή 2π , ή $3\pi/2$.
- ✓ Να περιγράφουν τι αλλάζει στο γράφημα όταν στη θέση της μεταβλητής x πληκτρολογούν $\pi/2-x$ ή $\pi-x$ ή $2\pi-x$ ή $3\pi/2-x$ ή $3\pi/2+x$.
- ✓ Να κάνουν προβλέψεις για τις αλλαγές στο γράφημα πριν κάνουν τις αλλαγές στην εξίσωση.
- Για την εξίσωση του γραφήματος της $g(x)$:
 - ✓ Να προβλέψουν και να πειραματιστούν για την εξίσωση που πρέπει να πληκτρολογήσουν στη θέση της συνάρτησης $g(x)$ ώστε το γράφημά της να ταυτίζεται με αυτό της $f(x)$ αλλά να προσπαθούν να πληκτρολογούν διαφορετική συνάρτηση.
- Για κανόνες:
 - ✓ Να διατυπώσουν κανόνες για τις αλλαγές στην εξίσωση της συνάρτησης.
 - ✓ Να συσχετίσουν τις εξισώσεις των συναρτήσεων $f(x)$ με τις συναρτήσεις της $g(x)$.

Για τις απαντήσεις

Ζητήστε από τους μαθητές να εκφράσουν στην τάξη τις απαντήσεις τους. Είναι πιθανόν να δώσουν απαντήσεις όπως οι παρακάτω:

Διερεύνηση 1

Το νέο γράφημα θα έχει μετακινηθεί στη συμμετρική ως προς τον xx' θέση και θα έχει μετακινηθεί προς τα αριστερά κατά $\pi/2$. Το γράφημα της συνάρτησης $f(x) = \sin(\pi/2-x)$ ταυτίζεται με το γράφημα της $g(x)$ όταν ο τύπος της είναι $g(x)=\cos(x)$. Δηλαδή επαληθεύεται ο τύπος $\eta\mu(\pi/2-x)=\sigma\upsilon\nu x$

Διερεύνηση 2

Το νέο γράφημα παραμένει αμετάβλητο αν και πρώτα μετακινείται στη συμμετρική θέση και μετά προς τα αριστερά κατά π . Το γράφημα της συνάρτησης $f(x) = \sin(\pi-x)$ ταυτίζεται με το γράφημα της $g(x)$ όταν ο τύπος της είναι $g(x)=\sin(x)$. Δηλαδή επαληθεύεται ο τύπος $\eta\mu(\pi-x)=\eta\mu x$.

Διερεύνηση 3

Το νέο γράφημα μετακινείται στη συμμετρική θέση ως προς τον άξονα $x'x$. Το γράφημα της συνάρτησης $f(x) = \sin(2\pi-x)$ ταυτίζεται με το γράφημα της $g(x)$ όταν ο τύπος της είναι $g(x)=\sin(-x)$ ή και με την $g(x)=-\sin(x)$. Δηλαδή επαληθεύεται ο τύπος $\eta\mu(2\pi-x)=\eta\mu(-x) = -\eta\mu(x)$.

Διερεύνηση 4

Οι μαθητές αναμένεται να χρησιμοποιήσουν τις γνώσεις από την τριγωνομετρία για να απαντήσουν στα ερωτήματα αυτής της διερεύνησης. Έτσι αναμένεται να ταυτίσουν τα γραφήματα των δυο συναρτήσεων στις εξής περιπτώσεις:

$$f(x) = \sin(\pi/2+x) \text{ και } g(x)=\cos(x)$$

$$f(x) = \sin(3\pi/2-x) \text{ και } g(x)=-\cos(x)$$

$$f(x) = \sin(3\pi/2+x) \text{ και } g(x)=-\cos(x)$$

3.2.7 Θέμα 4: Η εκθετική και η λογαριθμική συνάρτηση

Στην επιφάνεια εργασίας έχουμε σχεδιάσει τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)=\exp(x)$ και $g(x) = \log(x)$, καθώς και δυο σημεία A και B. Το A είναι σημείο της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x)$. Μπορείτε να επανακαθορίσετε τον τύπο της συνάρτησης $g(x)$ ώστε το σημείο B να κινείται στη γραφική της παράσταση;

ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΕΙΣ

1. Κινήστε το σημείο A και παρατηρήστε πώς κινείται το B. Επιλέξτε το B να αφήνει το ίχνος του (Εντολή "Ίχνος on"). Μπορείτε να βρείτε την εξίσωση της συνάρτησης που έχει γράφημα την καμπύλη του ίχνους του σημείου B;
2. Επαναπροσδιορίστε τον τύπο της συνάρτησης $f(x)$ πληκτρολογώντας στη θέση του 20 τον αριθμό -20. Ποιός θα είναι τώρα ο τύπος της $g(x)$ ώστε να διέρχεται από το σημείο B; Μπορείτε να διατυπώσετε ένα κανόνα σχετικό με τον προσδιορισμό του ίχνους του σημείου B.
3. Επαναπροσδιορίστε τον τύπο της συνάρτησης $f(x)$ πληκτρολογώντας $f(x)=\exp(x-4)$. Μπορείτε τώρα να επαναπροσδιορίσετε τον τύπο της $g(x)$ ώστε το γράφημά της να διέρχεται από το B. Ποιόν κανόνα ακολουθήσατε;
4. Επαναπροσδιορίστε τον τύπο της $f(x)=\exp(x)$ ώστε αυτή να έχει τον τύπο $f(x)=20*\exp(x)-5$. Μπορείτε να προβλέψετε τον τύπο της συνάρτησης της $g(x)$ ώστε η γραφική της παράσταση να διέρχεται από το σημείο B; Υπάρχει κάποιος κανόνας που συνδέει τις δυο συναρτήσεις;

Ανακεφαλαίωση: Συζητήστε με τους μαθητές σας για τις αντίστροφες συναρτήσεις καθώς και για τον τρόπο ορισμού των συμμετρικών ως προς την ευθεία $y=x$ σημείων.

Ζητήστε από τους μαθητές να

- διατυπώσουν ένα ορισμό της αντίστροφης συνάρτησης,
- διατυπώσουν μια ιδιότητα των γραφικών παραστάσεων των αντίστροφων συναρτήσεων,
- διατυπώσουν τις ιδιότητες που πρέπει να έχει μια συνάρτηση ώστε η αντίστροφή της να είναι συνάρτηση,
- εξηγήσουν πώς μπορούν να υπολογίζουν την εξίσωση της αντίστροφης συνάρτησης μια δεδομένης συνάρτησης καθώς και το πεδίο ορισμού και σύνολο τιμών της.

ΟΔΗΓΙΕΣ ΠΡΟΣ ΤΟΝ ΔΙΔΑΣΚΟΝΤΑ

Για τη διαχείριση των εργαλείων του μικρόκοσμου

Ζητήστε από τους μαθητές:

- Να κινούν το γράφημα και να παρακολουθούν τον τρόπο μεταβολής της εξίσωσής του.
- Να κινούν το σημείο A και να παρακολουθούν πώς κινείται το σημείο B, αφού επιλέξουν την εντολή «Trace on».
- Να επιλέγουν την εντολή Redefine και να προσδιορίζουν την εξίσωση της καμπύλης στην οποία κινείται το σημείο B.

Για τις διερευνήσεις

Ζητήστε από τους μαθητές να παρατηρούν και να εκφράζουν στην ομάδα τους και στην τάξη:

- Για το γράφημα της συνάρτησης $f(x)$:
 - ✓ Τι μεταβάλλεται στο ίδιο το γράφημα όταν μεταβάλλουν τους συντελεστές της εξίσωσής της.
 - ✓ Πώς μεταβάλλεται η καμπύλη του ίχνους του σημείου B.
- Για την εξίσωση του γραφήματος της $g(x)$:
 - ✓ Τι αλλάζει στην εξίσωση όταν μεταφέρετε το γράφημα οριζόντια προς τα αριστερά ή προς τα δεξιά.
 - ✓ Τι αλλάζει στην εξίσωση όταν μεταφέρετε το γράφημα κατακόρυφα προς τα αριστερά ή προς τα δεξιά.
 - ✓ Τι αλλάζει στο γράφημα όταν μεταβάλλετε τους συντελεστές της εξίσωσής της.
 - ✓ Ποια συνάρτηση πρέπει να πληκτρολογήσετε στη θέση του υπάρχοντος τύπου της $g(x)$ ώστε το γράφημά της να ταυτίζεται με την καμπύλη του ίχνους του σημείου B.
- Για τα σημεία A και B:
 - ✓ Την σχέση που έχουν τα σημεία A και B.
 - ✓ Τη σχέση που έχουν το γράφημα στο οποίο ανήκει το ίχνος του B και το γράφημα της συνάρτησης $f(x)$.

Για τις απαντήσεις

Ζητήστε από τους μαθητές να εκφράσουν στην τάξη τις απαντήσεις τους. Είναι πιθανόν οι μαθητές να δώσουν απαντήσεις όπως οι παρακάτω:

Διερεύνηση 1

Αφού πειραματιστούν με το ίχνος του B και τους τύπους των δυο συναρτήσεων $f(x)$ και $g(x)$ αναμένεται να πληκτρολογήσουν τον εξής τύπο $g(x)=\log(0.05*x)$ και αυτό

διότι (1) τα σημεία A και B είναι συμμετρικά ως προς την διχοτόμο της πρώτης γωνίας των αξόνων και (2) ο συντελεστής $1/20 = 0.05$.

Διερεύνηση 2

Αξιοποιώντας την εμπειρία που απέκτησαν από την προηγούμενη δραστηριότητα με το ίχνος του B και τους τύπους των δυο συναρτήσεων $f(x)$ και $g(x)$ αναμένεται να πληκτρολογήσουν τον εξής τύπο $g(x)=\log(-0.05*x)$. Ακόμα, αναμένεται να εκφράσουν τον εξής κανόνα. Αν $f(x)=a*e^x$ τότε ο τύπος του ίχνους του B θα προσδιορίζεται από την $g(x)$ αν είναι $g(x) = \log(1/a*x)$.

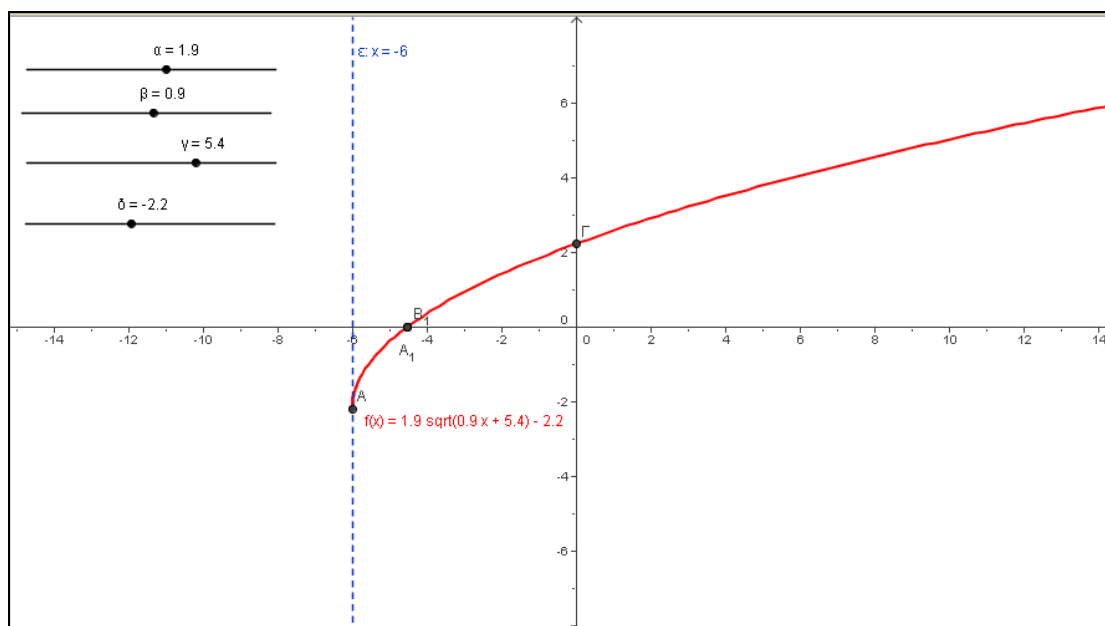
Διερεύνηση 3

Αξιοποιώντας την εμπειρία που απέκτησαν από τις προηγούμενες δραστηριότητες αναμένεται να πληκτρολογήσουν τον εξής τύπο $g(x)=\log(x)+4$. Ακόμα, αναμένεται να εκφράσουν τον εξής κανόνα. Αν $f(x)=e^{x-a}$ τότε ο τύπος του ίχνους του B θα προσδιορίζεται από την $g(x)$ αν είναι $g(x) = \log(x)+a$.

Διερεύνηση 4

Αξιοποιώντας την εμπειρία που απέκτησαν από τις προηγούμενες δραστηριότητες αναμένεται να πληκτρολογήσουν τον εξής τύπο $g(x)=\log(0.05*x+0.05*5)$. Ακόμα, αναμένεται να εκφράσουν τον εξής κανόνα. Αν $f(x)=a*e^{x+b}$ τότε ο τύπος του ίχνους του B θα προσδιορίζεται από την $g(x)$ αν είναι $g(x) = \log(1/a*x-b/a)$. Για τον τελευταίο κανόνα ο εκπαιδευτικός μπορεί να ζητήσει από τους μαθητές να κάνουν και άλλα πειράματα προσδιορισμού της καμπύλης στην οποία ανήκει το σημείο B.

3.3 ΣΕΝΑΡΙΟ 3 : Μελέτη Οικογενειών Συναρτήσεων



3.3.1 Η κεντρική ιδέα του σεναρίου

Στο σενάριο αυτό οι μαθητές καλούνται να διερευνήσουν και να μελετήσουν τις κοινές ιδιότητες που έχουν οικογένειες συναρτήσεων. Με τον όρο «οικογένεια συναρτήσεων» εννοούμε συναρτήσεις όπως οι πολυωνμικές, οι ρητές, οι τριγωνομετρικές, οι εκθετικές και οι λογαριθμικές και όπου κάθε μέλος μιας οικογένειας ορίζεται με διαφορετικούς συντελεστές. Με αυτόν τον τρόπο οι μαθητές αποκτούν αντιλήψεις και γνώσεις για ομάδες συναρτήσεων και μπορούν να τις χρησιμοποιούν στη μελέτη επιμέρους συναρτήσεων.

Πιο συγκεκριμένα, οι μαθητές, κάνοντας χρήση μεταβολών μπορούν να μεταβάλουν τους συντελεστές της εξίσωσης μιας συνάρτησης και έτσι να προσδιορίζουν τις αλλαγές και τα αναλλοίωτα στο γράφημα αυτής. Με αυτόν τον τρόπο μελετούν τις κοινές και τις διαφορετικές ιδιότητες συναρτήσεων που ανήκουν σε μια οικογένεια.

3.3.2 Στόχοι

- Να αποκτήσουν εμπειρίες για τις ιδιότητες συναρτήσεων που ανήκουν σε μια οικογένεια.
- Να αποκτήσουν εμπειρίες σχετικές με την αναγνώριση ιδιοτήτων των συναρτήσεων μιας οικογένειας από το γράφημα και την εξίσωση αυτής.
- Να αναγνωρίζουν το ρόλο κάθε συντελεστή της εξίσωσης μιας συνάρτησης στον καθορισμό των ιδιοτήτων της.
- Να εκφράζουν ποιοτικά χαρακτηριστικά των γραφημάτων οικογενειών συναρτήσεων που συνδέονται με τις ιδιότητες αυτών.

3.3.3 Διδακτική πρόταση

ΟΡΓΑΝΩΣΗ ΤΗΣ ΤΑΞΗΣ

Οι δραστηριότητες αυτές ενδείκνυται να διδάσκονται στο εργαστήριο υπολογιστών και οι μαθητές να εργάζονται σε ομάδες 2-3 ατόμων με φύλλο εργασίας. Μπορούν όμως να διεξαχθούν και στην τάξη που έχει μόνο έναν υπολογιστή με βιντεοπροβολέα. Σ' αυτή την περίπτωση οι μαθητές συμπληρώνουν τα φύλλα εργασίας με βάση τις παρατηρήσεις που κάνουν κατά τη διερεύνηση καθώς και με βάση τις παρεμβάσεις τους στην διερεύνηση με τις οποίες εκφράζουν την δική τους στρατηγική. Καθώς τέτοιες παρεμβάσεις γίνονται στη τάξη ο διδάσκων πρέπει να τις υποστηρίζει και να επιδιώκει να συζητούνται όλες οι πιθανές στρατηγικές της διερεύνησης. Ακόμα πρέπει να έχει από πριν προετοιμάσει τον τρόπο που θα χειριστεί τις διαφορετικές στρατηγικές καθώς και τις πιθανές εκβάσεις τους. Με άλλα λόγια πρέπει με τη στάση του να προκαλεί την εφαρμογή των διαφορετικών τρόπων διερεύνησης, να ενθαρρύνει κάθε μαθητή να δοκιμάζει τις ιδέες του, να εκφράζει τις εικασίες του και να διατυπώνει τα συμπεράσματά του ελεύθερα.

ΟΙ ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΕΣ ΔΥΝΑΤΟΤΗΤΕΣ ΤΟΥ ΣΕΝΑΡΙΟΥ

Οι προτεινόμενες στο σενάριο δραστηριότητες αφορούν φαινόμενα τα οποία προκαλούνται από τη δράση των μαθητών σε προσχεδιασμένους υπολογιστικούς μικρόκοσμους με σκοπό την ανάδειξη μερικών από τις ιδιότητες αυτών. Έτσι οι απαντήσεις στα ερωτήματα που τίθενται στο πλαίσιο αυτών των διερευνήσεων αλλά και αυτών που ο διδάσκων ή οι ίδιοι οι μαθητές μπορούν να θέσουν είναι δυνατόν να αποτελέσουν ένα περιβάλλον απόκτησης και έκφρασης εμπειριών σχετικών με τον χειρισμό των συντελεστών των εξισώσεων και κατ' επέκταση με τις ιδιότητες των συναρτήσεων. Οι ενσωματωμένοι στους μικρόκοσμους μεταβολείς, ένας για κάθε συντελεστή, δίνουν στους μαθητές τη δυνατότητα:

- να κάνουν πειράματα με την αλλαγή των τιμών των συντελεστών των εξισώσεων,
- να παρατηρούν και να ερμηνεύουν τα αποτελέσματα των χειρισμών τους,
- να εκφράζουν εικασίες, να κάνουν γενικεύσεις, να διατυπώνουν υποθέσεις και θεωρήματα και να τα εκφράζουν με μαθηματικούς όρους.

Ακόμα, μπορούν να επεμβαίνουν και να επαναπροσδιορίζουν τις δυνατότητες των εργαλείων ή να επαναδιατυπώνουν τον τρόπο ορισμού των αντικειμένων και να μεταβάλλουν την εμφάνισή τους. Από αυτή την άποψη οι μικρόκοσμοι είναι επαναχρησιμοποιήσιμοι και δίνουν τη δυνατότητα στους χρήστες να διατυπώνουν και νέα ερωτήματα που αφορούν ιδιαίτερες γνωστικές πτυχές των μαθηματικών αντικειμένων.

ΠΟΡΕΙΑ ΤΗΣ ΕΦΑΡΜΟΓΗΣ ΤΟΥ ΣΕΝΑΡΙΟΥ

Το σενάριο αποτελείται από πέντε εργασίες. Στην πρώτη, οι μαθητές διαπραγματεύονται την οικογένεια των πολυωνυμικών συναρτήσεων $f(x) = \alpha \cdot x^v + \beta \cdot x + \gamma$. Στη δεύτερη, την οικογένεια των ρητών συναρτήσεων που έχουν εξίσωση $f(x) = \frac{\alpha}{\beta \cdot x + \gamma} + \delta$. Στην Τρίτη, την οικογένεια των τριγωνομετρικών συναρτήσεων $f(x) = \alpha \cdot \eta\mu(\beta \cdot x + \gamma) + \delta$ στην τέταρτη, την οικογένεια των εκθετικών

συναρτήσεων $f(x) = \rho \cdot a^{(kx+\lambda)} + \mu$ και στην πέμπτη, την οικογένεια των άρρητων συναρτήσεων $f(x) = a \cdot \sqrt{\beta x + \gamma} + \delta$.

Η εμπλοκή των μαθητών με κάθε μια δραστηριότητα αναμένεται να αναδείξει,

- τον ρόλο των συντελεστών της εξίσωσης στον καθορισμό της μορφής του γραφήματος και κατ' επέκταση των ποιοτικών χαρακτηριστικών της,
- την ενσωμάτωση ή μεταβολή των ιδιοτήτων μιας συνάρτησης μέσω της μεταβολής των συντελεστών της εξίσωσής της.

Για παράδειγμα, οι πολυωνυμικές συναρτήσεις μεταβάλλονται με ανάλογους τρόπους όταν ο συντελεστής του μεγιστοβάθμιου όρου μειώνεται ή μεγαλώνει. Ακόμα, η μορφή των γραφημάτων έχει κοινά χαρακτηριστικά όταν ο ίδιος συντελεστής είναι θετικός ή αρνητικός ανεξάρτητα από το πόσο μεγάλη ή μικρή είναι η τιμή του. Έτσι η σχετική διερεύνηση αναμένεται να αναδείξει τον ρόλο του συγκεκριμένου συντελεστή στη διαμόρφωση του γραφήματος αυτής και κατ' επέκταση στις ιδιότητες της συνάρτησης όπως είναι ο ρυθμός μεταβολής των τιμών της ή το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από αυτή και τον x σε ένα διάστημα του πεδίου ορισμού της.

Ο εκπαιδευτικός μπορεί να ζητά από τους μαθητές να προβλέπουν την μορφή της καμπύλης και τις αλλαγές της σε κάθε αλλαγή των τιμών των συντελεστών της εξίσωσής της και στη συνέχεια να επαληθεύουν τις προβλέψεις τους.

ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

Εργασία	Περιγραφή	Τμήμα εφαρμογής	Περιεχόμενο
Εργασία 1	Οικογένεια πολυωνυμικών	ΟΛΟΙ	Διατυπώνουν συμπεράσματα για τα κοινά χαρακτηριστικά των συναρτήσεων $f(x) = a \cdot x^v + \beta \cdot x + \gamma$
Εργασία 2	Οικογένεια ρητών	ΟΛΟΙ	Διατυπώνουν συμπεράσματα για τα κοινά χαρακτηριστικά των συναρτήσεων $f(x) = \frac{a}{\beta x + \gamma} + \delta$
Εργασία 3	Οικογένεια τριγωνομετρικών	ΟΛΟΙ	Διατυπώνουν συμπεράσματα για τα κοινά χαρακτηριστικά των συναρτήσεων $f(x) = a \cdot \eta\mu(\beta \cdot x + \gamma) + \delta$
Εργασία 4	Οικογένεια εκθετικών/λογαριθμικών	ΟΛΟΙ	Διατυπώνουν συμπεράσματα για τα κοινά χαρακτηριστικά των συναρτήσεων $f(x) = \rho \cdot a^{(kx+\lambda)} + \mu$
Εργασία 5	Οικογένεια άρρητων	ΟΛΟΙ	Διατυπώνουν συμπεράσματα για τα κοινά χαρακτηριστικά των συναρτήσεων $f(x) = a \cdot \sqrt{\beta x + \gamma} + \delta$

3.3.4 Θέμα 1: Η οικογένεια των συναρτήσεων $f(x) = \alpha \cdot x^n + \beta \cdot x + \gamma$

Στην επιφάνεια εργασίας έχει σχεδιαστεί η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \alpha \cdot x^n + \beta \cdot x + \gamma$. Διερευνήστε τι αλλάζει στο γράφημα και τι διατηρείται σταθερό όταν μεταβάλλετε τους συντελεστές της μέσω των μεταβολών;

ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΕΙΣ

1. Τι αλλάζει στο γράφημα όταν μεταβάλλετε τον κέρσορα του μεταβολέα που αντιστοιχεί στον συντελεστή α ;
2. Τι αλλάζει στο γράφημα όταν μεταβάλλετε τον συντελεστή β με τον αντίστοιχο μεταβολέα
3. Τι αλλάζει στο γράφημα όταν μεταβάλλετε τον συντελεστή γ με τον αντίστοιχο μεταβολέα
4. Τι αλλάζει στο γράφημα όταν μεταβάλλετε τον συντελεστή δ με τον αντίστοιχο μεταβολέα;
Τι θα συμβεί στο γράφημα όταν ο κέρσορας του μεταβολέα δ δείχνει 4 και μεταβάλλετε τους άλλους τρεις συντελεστές

ΟΔΗΓΙΕΣ ΠΡΟΣ ΤΟΝ ΔΙΔΑΣΚΟΝΤΑ

Για τη διαχείριση των εργαλείων του μικρόκοσμου

Ζητήστε από τους μαθητές:

- Να κινούν τον κάθε μεταβολέα αργά και να παρατηρούν τι αλλάζει στο γράφημα της συνάρτησης σε κάθε αλλαγή της τιμής του αντίστοιχου συντελεστή.
- Να μεταβάλλουν τις δυνατότητες του κάθε μεταβολέα επιλέγοντας τον με το δεξί πλήκτρο και με την εντολή «Ιδιότητες» να προσδιορίζουν το εύρος των τιμών του, το βήμα μεταβολής καθώς και το μέγεθος του μεταβολέα.
- Να περιγράφουν με δικά τους λόγια τις μεταβολές που παρατηρούν καθώς κινούν τον μεταβολέα.

Για τις διερευνήσεις

Ζητήστε από τους μαθητές να παρατηρούν, να προβλέπουν, να ελέγχουν και να εκφράζουν στην ομάδα τους και στην τάξη:

- Για το γράφημα:
 - ✓ Τι μεταβάλλεται και τι όχι στο ίδιο το γράφημα όταν αυξάνετε ή ελαττώνετε την τιμή ενός μεταβολέα.
 - ✓ Τι θα συμβεί (στο γράφημα) αν επιλεγούν συγκεκριμένες τιμές για μερικούς συντελεστές.
 - ✓ Τι τιμές πρέπει μνα έχουν οι συντελεστές της εξίσωσης ώστε το γράφημα της συνάρτησης να έχει μια συγκεκριμένη ιδιότητα.
- Για την εξίσωση του γραφήματος:

- ✓ Τι τιμές πρέπει να πάρουν οι συντελεστές της εξίσωσης ώστε το γράφημα της να αποκτήσει μια συγκεκριμένη ιδιότητα.
- ✓ Τι κοινό έχουν τα γραφήματα των εξισώσεων που προκύπτουν όταν αλλάζουν οι τιμές του εκθέτη του μεγιστοβάθμιου όρου.

Για τις απαντήσεις

Ζητήστε από τους μαθητές να εκφράσουν στην τάξη τις απαντήσεις τους. Είναι πιθανόν οι μαθητές να δώσουν απαντήσεις όπως οι παρακάτω:

Διερεύνηση 1

Αναμένεται να απαντήσουν ότι όταν ο συντελεστής α έχει μικρές τιμές η καμπύλη είναι ανοικτή και κλειστή, όταν έχει μεγάλες τιμές. Ακόμα, όταν οι τιμές του συντελεστή α είναι θετικές στρέφει τα κοίλα της προς τα πάνω και αρνητικές, όταν στρέφει τα κοίλα της προς τα κάτω.

Διερεύνηση 2

Αναμένεται να απαντήσουν ότι όταν ο συντελεστής β παίρνει τιμές αυξανόμενες η καμπύλη μεταφέρεται προς τα αριστερά και ταυτόχρονα προς τα κάτω. Αντίθετα συμβαίνουν όταν οι τιμές του β μειώνονται. Σε κάθε μεταβολή η καμπύλη δεν αλλάζει το εύρος του ανοίγματός της ή την κοιλότητά της και επίσης διέρχεται πάντοτε από ένα σταθερό σημείο.

Διερεύνηση 3

Αναμένεται να απαντήσουν ότι όταν ο συντελεστής γ παίρνει τιμές αυξανόμενες η καμπύλη μεταφέρεται προς τα πάνω. Αντίθετα συμβαίνουν όταν οι τιμές του β μειώνονται. Σε κάθε μεταβολή η καμπύλη δεν αλλάζει το εύρος του ανοίγματός της ή την κοιλότητά της.

Διερεύνηση 4

Αναμένεται να απαντήσουν ότι ο συντελεστής ν ορίζει τον εκθέτη της πολυωνυμικής συνάρτησης. Έτσι όταν έχει την τιμή 0 ή 1 ορίζει την γραμμική συνάρτηση, την τιμή 2 την τετραγωνική, την τιμή 3 την τριτοβάθμια κ.ο.κ. Επίσης όταν έχει αρνητικές τιμές ορίζει κλασματικές συναρτήσεις της μορφής $f(x) = \frac{\alpha}{x^\nu} + \beta \cdot x + \gamma$. Στην περίπτωση

που το ν είναι 4 οι μεταβολές των άλλων συντελεστών ορίζουν ανάλογες με τις αναφερθείσες προηγουμένως μεταβολές στο γράφημα.

3.3.5 Θέμα 2: Η οικογένεια των συναρτήσεων $f(x) = \frac{\alpha}{\beta \cdot x + \gamma} + \delta$

Στην επιφάνεια εργασίας έχει σχεδιαστεί η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \alpha / (\beta \cdot x + \gamma) + \delta$. Διερευνήστε τι αλλάζει στο γράφημα και τι διατηρείται σταθερό όταν μεταβάλλετε τους συντελεστές της μέσω των μεταβολών;

ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΕΙΣ

1. Τι αλλάζει στο γράφημα όταν μεταβάλλετε τον κέρσορα του μεταβολέα που αντιστοιχεί στον συντελεστή α ;
2. Τι αλλάζει στο γράφημα όταν μεταβάλλετε τον συντελεστή β με τον αντίστοιχο μεταβολέα
3. Τι αλλάζει στο γράφημα όταν μεταβάλλετε τον συντελεστή γ με τον αντίστοιχο μεταβολέα
4. Τι αλλάζει στο γράφημα όταν μεταβάλλετε τον συντελεστή δ με τον αντίστοιχο μεταβολέα;

ΟΔΗΓΙΕΣ ΠΡΟΣ ΤΟΝ ΔΙΔΑΣΚΟΝΤΑ

Για τη διαχείριση των εργαλείων του μικρόκοσμου

Ζητήστε από τους μαθητές:

- Να κινούν τον κάθε μεταβολέα αργά και να παρατηρούν τι αλλάζει στο γράφημα της συνάρτησης σε κάθε αλλαγή της τιμής του αντίστοιχου συντελεστή.
- Να μεταβάλλουν τις δυνατότητες του κάθε μεταβολέα επιλέγοντας τον με το δεξί πλήκτρο και με την εντολή «Ιδιότητες» να προσδιορίζουν το εύρος των τιμών του, το βήμα μεταβολής καθώς και το μέγεθος του μεταβολέα.
- Να περιγράφουν με δικά τους λόγια τις μεταβολές που παρατηρούν καθώς κινούν τον μεταβολέα.

Για τις διερευνήσεις

Ζητήστε από τους μαθητές να παρατηρούν, να προβλέπουν, να ελέγχουν και να εκφράζουν στην ομάδα τους και στην τάξη:

- Για το γράφημα
 - ✓ Τι μεταβάλλεται και τι όχι στο ίδιο το γράφημα όταν αυξάνετε ή ελαττώνετε την τιμή ενός μεταβολέα.
 - ✓ Τι θα συμβεί (στο γράφημα) αν επιλεγούν συγκεκριμένες τιμές για μερικούς συντελεστές.
 - ✓ Τι τιμές πρέπει μνα έχουν οι συντελεστές της εξίσωσης ώστε το γράφημα της συνάρτησης να έχει μια συγκεκριμένη ιδιότητα.
- Για την εξίσωση του γραφήματος:

- ✓ Τι τιμές πρέπει να πάρουν οι συντελεστές της εξίσωσης ώστε το γράφημα της να αποκτήσει μια συγκεκριμένη ιδιότητα.

Για τις απαντήσεις

Ζητήστε από τους μαθητές να εκφράσουν στην τάξη τις απαντήσεις τους. Είναι πιθανόν οι μαθητές να δώσουν απαντήσεις όπως οι παρακάτω:

Διερεύνηση 1

Αναμένεται να απαντήσουν ότι όταν ο συντελεστής α έχει μικρές τιμές οι δυο κλάδοι της καμπύλης πλησιάζουν μεταξύ τους και όταν έχει μεγάλες τιμές αυτοί απομακρύνονται. Ακόμα, όταν οι τιμές του συντελεστή α είναι θετικές τείνει να σχηματίζεται στο δεύτερο και στο τέταρτο τεταρτημόριο ενώ για αρνητικές τιμές τείνει να σχηματίζεται στο πρώτο και στο τρίτο τεταρτημόριο.

Διερεύνηση 2

Αναμένεται να απαντήσουν ότι όταν ο συντελεστής β παίρνει μικρές θετικές και αυξανόμενες τιμές η καμπύλη μεταφέρεται από πάνω αριστερά προς τα κάτω και δεξιά ενώ οι κλάδοι της πλησιάζουν μεταξύ τους. Οι μεταβολές αυτές είναι σχεδόν ανεπαίσθητες όταν οι τιμές του β είναι θετικές και μεγάλες ενώ οι κλάδοι πλησιάζουν ελάχιστα μεταξύ τους. Ανάλογα συμβαίνουν όταν οι τιμές του β είναι αρνητικές και μειώνονται.

Διερεύνηση 3

Αναμένεται να απαντήσουν ότι όταν ο συντελεστής γ παίρνει τιμές αυξανόμενες η καμπύλη μεταφέρεται προς τα δεξιά. Αντίθετα συμβαίνουν όταν οι τιμές του β μειώνονται. Σε κάθε μεταβολή δεν αλλάζει η απόσταση των δυο καμπύλων .

Διερεύνηση 4

Αναμένεται να απαντήσουν ότι όταν ο συντελεστής δ παίρνει τιμές αυξανόμενες η καμπύλη μεταφέρεται προς τα πάνω. Αντίθετα συμβαίνουν όταν οι τιμές του δ μειώνονται. Σε κάθε μεταβολή δεν αλλάζει η απόσταση των δυο καμπύλων .

Πέραν των αναμενόμενων απαντήσεων ο εκπαιδευτικός μπορεί να ζητήσει από τους μαθητές να δώσουν επιπλέον εξηγήσεις των παραπάνω αναμενόμενων φαινομένων που πιθανόν να περιγράψουν εστιάζοντας στην εξίσωση και στον τρόπο που οι τιμές της μεταβάλλονται όταν μειώνεται ή αυξάνεται ένας συντελεστής της.

3.3.6 Θέμα 3: Η οικογένεια των συναρτήσεων $f(x) = a \cdot \eta\mu(\beta \cdot x + \gamma) + \delta$

Στην επιφάνεια εργασίας έχει σχεδιαστεί η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = a \cdot \sin(\beta \cdot x + \gamma) + \delta$. Διερευνήστε τι αλλάζει στο γράφημα και τι διατηρείται σταθερό όταν μεταβάλλετε τους συντελεστές της μέσω των μεταβολέων;

ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΕΙΣ

1. Τι αλλάζει στο γράφημα όταν μεταβάλλετε τον κέρσορα του μεταβολέα που αντιστοιχεί στον συντελεστή a ;
2. Τι αλλάζει στο γράφημα όταν μεταβάλλετε τον συντελεστή β με τον αντίστοιχο μεταβολέα
3. Τι αλλάζει στο γράφημα όταν μεταβάλλετε τον συντελεστή γ με τον αντίστοιχο μεταβολέα
4. Τι αλλάζει στο γράφημα όταν μεταβάλλετε τον συντελεστή δ με τον αντίστοιχο μεταβολέα;

ΟΔΗΓΙΕΣ ΠΡΟΣ ΤΟΝ ΔΙΔΑΣΚΟΝΤΑ

Για τη διαχείριση των εργαλείων του μικρόκοσμου

Ζητήστε από τους μαθητές:

- Να κινούν τον κάθε μεταβολέα αργά και να παρατηρούν τι αλλάζει στο γράφημα της συνάρτησης σε κάθε αλλαγή της τιμής του αντίστοιχου συντελεστή.
- Να μεταβάλλουν τις δυνατότητες του κάθε μεταβολέα επιλέγοντας τον με το δεξί πλήκτρο και με την εντολή «Ιδιότητες» να προσδιορίζουν το εύρος των τιμών του, το βήμα μεταβολής καθώς και το μέγεθος του μεταβολέα.
- Να περιγράφουν με δικά τους λόγια τις μεταβολές που παρατηρούν καθώς κινούν τον μεταβολέα.

Για τις διερευνήσεις

Ζητήστε από τους μαθητές να παρατηρούν, να προβλέπουν, να ελέγχουν και να εκφράζουν στην ομάδα τους και στην τάξη:

- Για το γράφημα:
 - ✓ Τι μεταβάλλεται και τι όχι στο ίδιο το γράφημα όταν αυξάνετε ή ελαττώνετε την τιμή ενός μεταβολέα.
 - ✓ Τι θα συμβεί (στο γράφημα) αν επιλεγούν συγκεκριμένες τιμές για μερικούς συντελεστές.
 - ✓ Τι τιμές πρέπει να έχουν οι συντελεστές της εξίσωσης ώστε το γράφημα της συνάρτησης να έχει μια συγκεκριμένη ιδιότητα.
- Για την εξίσωση του γραφήματος:

- ✓ Τι τιμές πρέπει να πάρουν οι συντελεστές της εξίσωσης ώστε το γράφημα της να αποκτήσει μια συγκεκριμένη ιδιότητα.

Για τις απαντήσεις

Ζητήστε από τους μαθητές να εκφράσουν στην τάξη τις απαντήσεις τους. Είναι πιθανόν οι μαθητές να δώσουν απαντήσεις όπως οι παρακάτω:

Διερεύνηση 1

Αναμένεται να απαντήσουν ότι όταν ο συντελεστής α αυξάνει η καμπύλη τεντώνεται κατακόρυφα. Δηλαδή οι κορυφές της καμπύλης απομακρύνονται από τον οριζόντιο άξονα. Το αντίθετο συμβαίνει όταν μειώνονται.

Διερεύνηση 2

Αναμένεται να απαντήσουν ότι όταν ο συντελεστής β μειώνεται η καμπύλη τεντώνεται οριζόντια. Δηλαδή αυξάνει η περιοδικότητά της. Το αντίθετο συμβαίνει όταν μειώνονται.

Διερεύνηση 3

Αναμένεται να απαντήσουν ότι όταν ο συντελεστής γ παίρνει τιμές αυξανόμενες η καμπύλη μεταφέρεται προς τα δεξιά. Αντίθετα συμβαίνουν όταν οι τιμές του β μειώνονται.

Διερεύνηση 4

Αναμένεται να απαντήσουν ότι όταν ο συντελεστής δ παίρνει τιμές αυξανόμενες η καμπύλη μεταφέρεται προς τα πάνω. Αντίθετα συμβαίνουν όταν οι τιμές του δ μειώνονται. Σε κάθε μεταβολή δεν αλλάζει η απόσταση των δυο καμπύλων.

Πέραν των αναμενόμενων απαντήσεων ο εκπαιδευτικός μπορεί να ζητήσει από τους μαθητές να δώσουν επιπλέον εξηγήσεις των παραπάνω αναμενόμενων φαινομένων που πιθανόν να περιγράψουν, εστιάζοντας στην εξίσωση και στον τρόπο που οι τιμές της μεταβάλλονται όταν μειώνεται ή αυξάνεται ένας συντελεστής της.

3.3.7 Θέμα 4: Η οικογένεια των συναρτήσεων $f(x) = \rho \cdot a^{(\kappa x + \lambda)} + \mu$

Στην επιφάνεια εργασίας έχει σχεδιαστεί η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \rho \cdot a^{(\kappa x + \lambda)} + \mu$. Διερευνήστε τι αλλάζει στο γράφημα και τι διατηρείται σταθερό όταν μεταβάλλετε τους συντελεστές της μέσω των μεταβολών;

ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΕΙΣ

1. Επιλέξτε μια τιμή για την μεταβλητή a και διερευνήστε τι αλλάζει στο γράφημα όταν μεταβάλλετε τον κέρσορα του μεταβολέα που αντιστοιχεί στον συντελεστή ρ ; Στη συνέχεια επιλέξτε άλλη τιμή για το a και επαναλάβετε τη διερεύνηση.
2. Επιλέξτε μια τιμή για την μεταβλητή a και διερευνήστε τι αλλάζει στο γράφημα όταν μεταβάλλετε τον κέρσορα του μεταβολέα που αντιστοιχεί στον συντελεστή κ ; Στη συνέχεια επιλέξτε άλλη τιμή για το a και επαναλάβετε τη διερεύνηση.
3. Επιλέξτε μια τιμή για την μεταβλητή a και διερευνήστε τι αλλάζει στο γράφημα όταν μεταβάλλετε τον κέρσορα του μεταβολέα που αντιστοιχεί στον συντελεστή λ ; Στη συνέχεια επιλέξτε άλλη τιμή για το a και επαναλάβετε τη διερεύνηση.
4. Επιλέξτε μια τιμή για την μεταβλητή a και διερευνήστε τι αλλάζει στο γράφημα όταν μεταβάλλετε τον κέρσορα του μεταβολέα που αντιστοιχεί στον συντελεστή μ ; Στη συνέχεια επιλέξτε άλλη τιμή για το a και επαναλάβετε τη διερεύνηση.

ΟΔΗΓΙΕΣ ΠΡΟΣ ΤΟΝ ΔΙΔΑΣΚΟΝΤΑ

Για τη διαχείριση των εργαλείων του μικρόκοσμου

Ζητήστε από τους μαθητές:

- Να κινούν τον κάθε μεταβολέα αργά και να παρατηρούν τι αλλάζει στο γράφημα της συνάρτησης σε κάθε αλλαγή της τιμής του αντίστοιχου συντελεστή.
- Να μεταβάλλουν τις δυνατότητες του κάθε μεταβολέα επιλέγοντας τον με το δεξί πλήκτρο και με την εντολή «Ιδιότητες» να προσδιορίζουν το εύρος των τιμών του, το βήμα μεταβολής καθώς και το μέγεθος του μεταβολέα.
- Να περιγράφουν με δικά τους λόγια τις μεταβολές που παρατηρούν καθώς κινούν τον μεταβολέα.

Για τις διερευνήσεις

Ζητήστε από τους μαθητές να παρατηρούν, να προβλέπουν, να ελέγχουν και να εκφράζουν στην ομάδα τους και στην τάξη:

- Για το γράφημα:
 - ✓ Τι μεταβάλλεται και τι όχι στο ίδιο το γράφημα όταν αυξάνετε ή ελαττώνετε την τιμή ενός μεταβολέα.
 - ✓ Τι θα συμβεί (στο γράφημα) αν επιλεγούν συγκεκριμένες τιμές για μερικούς συντελεστές.
 - ✓ Τι τιμές πρέπει να έχουν οι συντελεστές της εξίσωσης ώστε το γράφημα της συνάρτησης να έχει μια συγκεκριμένη ιδιότητα.

- Για την εξίσωση του γραφήματος:
 - ✓ Τι τιμές πρέπει να πάρουν οι συντελεστές της εξίσωσης ώστε το γράφημα της να αποκτήσει μια συγκεκριμένη ιδιότητα.

Για τις απαντήσεις

Ζητήστε από τους μαθητές να εκφράσουν στην τάξη τις απαντήσεις τους. Είναι πιθανόν οι μαθητές να δώσουν απαντήσεις όπως οι παρακάτω:

Διερεύνηση 1

Αναμένεται να απαντήσουν ότι όταν ο συντελεστής ρ αυξάνει προς τις θετικές τιμές ένα μέρος της καμπύλης πλησιάζει προς τον κατακόρυφο άξονα ενώ ένα άλλο μέρος της φαίνεται να παραμένει ακίνητο. Όταν οι τιμές της μειώνονται προς τις αρνητικές τιμές ο ένας κλάδος μεταφέρεται στη συμμετρική θέση για τις αντίθετες τις τιμές του ρ .

Διερεύνηση 2

Αναμένεται να δώσουν απαντήσεις ανάλογες με αυτές της διερεύνησης 1. Επίσης αναμένεται να παρατηρήσουν ότι όταν αλλάζουν πρόσημο οι τιμές του συντελεστή αλλάζει ρόλο το κάθε τμήμα της καμπύλης.

Διερεύνηση 3

Αναμένεται και εδώ να δώσουν απαντήσεις ανάλογες με αυτές της διερεύνησης 1. Επίσης αναμένεται να παρατηρήσουν ότι καθώς οι τιμές του συντελεστή αυξάνονται η καμπύλη «μαζεύει» ανάλογα με τον τρόπο που μαζεύει ή απλώνεται η καμπύλη της προηγούμενης εργασίας.

Διερεύνηση 4

Αναμένεται να απαντήσουν ότι όταν ο συντελεστής μ παίρνει τιμές αυξανόμενες η καμπύλη μεταφέρεται προς τα πάνω. Αντίθετα συμβαίνουν όταν οι τιμές του δ μειώνονται. Σε κάθε μεταβολή δεν αλλάζει η απόσταση των δυο καμπύλων .

Πέραν των αναμενόμενων απαντήσεων ο εκπαιδευτικός μπορεί να ζητήσει από τους μαθητές να δώσουν επιπλέον εξηγήσεις των παραπάνω αναμενόμενων φαινομένων που πιθανόν να περιγράψουν, εστιάζοντας στην εξίσωση και στον τρόπο που οι τιμές της μεταβάλλονται όταν μειώνεται ή αυξάνεται ένας συντελεστής της.

Ακόμα μπορεί να ζητήσει από τους μαθητές σε κάθε διερεύνηση να επιλέξουν ώστε το σημείο B' να αφήνει το ίχνος του και μέσω αυτού να εκφράσουν τον τρόπο μεταβολής του συμμετρικού του B ως προς την αρχή των αξόνων.

3.3.8 Θέμα 5: Η οικογένεια των συναρτήσεων $f(x) = a \cdot \sqrt{\beta x + \gamma} + \delta$

Στην επιφάνεια εργασίας έχει σχεδιαστεί η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = a \cdot \sqrt{\beta x + \gamma} + \delta$. Διερευνήστε τι αλλάζει στο γράφημα και τι διατηρείται σταθερό όταν μεταβάλλετε τους συντελεστές της μέσω των μεταβολών.

ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΕΙΣ

1. Τι αλλάζει στο γράφημα όταν μεταβάλλετε τον κέρσορα του μεταβολέα που αντιστοιχεί στον συντελεστή a ;
2. Τι αλλάζει στο γράφημα όταν μεταβάλλετε τον συντελεστή β της συνάρτησης με τον αντίστοιχο μεταβολέα;
3. Τι αλλάζει στο γράφημα όταν μεταβάλλετε τον συντελεστή γ με τον αντίστοιχο μεταβολέα;
4. Τι αλλάζει στο γράφημα όταν μεταβάλλετε τον συντελεστή δ με τον αντίστοιχο μεταβολέα;

ΟΔΗΓΙΕΣ ΠΡΟΣ ΤΟΝ ΔΙΔΑΣΚΟΝΤΑ

Για τη διαχείριση των εργαλείων του μικρόκοσμου

Ζητήστε από τους μαθητές:

- Να κινούν τον κάθε μεταβολέα αργά και να παρατηρούν τι αλλάζει στο γράφημα της συνάρτησης σε κάθε αλλαγή της τιμής του αντίστοιχου συντελεστή.
- Να μεταβάλλουν τις δυνατότητες του κάθε μεταβολέα επιλέγοντας τον με το δεξί πλήκτρο και με την εντολή «Ιδιότητες» να προσδιορίζουν το εύρος των τιμών του, το βήμα μεταβολής καθώς και το μέγεθος του μεταβολέα.
- Να περιγράφουν με δικά τους λόγια τις μεταβολές που παρατηρούν καθώς κινούν τον μεταβολέα.

Για τις διερευνήσεις

Ζητήστε από τους μαθητές να παρατηρούν, να προβλέπουν, να ελέγχουν και να εκφράζουν στην ομάδα τους και στην τάξη:

- Για το γράφημα:
 - ✓ Τι μεταβάλλεται και τι όχι στο ίδιο το γράφημα όταν αυξάνετε ή ελαττώνετε την τιμή ενός μεταβολέα.
 - ✓ Τι θα συμβεί (στο γράφημα) αν επιλεγούν συγκεκριμένες τιμές για μερικούς συντελεστές.
 - ✓ Τι τιμές πρέπει να έχουν οι συντελεστές της εξίσωσης ώστε το γράφημα της συνάρτησης να έχει μια συγκεκριμένη ιδιότητα.
- Για την εξίσωση του γραφήματος:
 - ✓ Τι τιμές πρέπει να πάρουν οι συντελεστές της εξίσωσης ώστε το γράφημα της να αποκτήσει μια συγκεκριμένη ιδιότητα.

Για τις απαντήσεις

Ζητήστε από τους μαθητές να εκφράσουν στην τάξη τις απαντήσεις τους. Είναι πιθανόν οι μαθητές να δώσουν απαντήσεις όπως οι παρακάτω:

Διερεύνηση 1

Αναμένεται να απαντήσουν ότι όταν ο συντελεστής a αυξάνει προς τις θετικές τιμές η καμπύλη πλησιάζει προς τον κατακόρυφο άξονα ενώ ταυτόχρονα «ανοίγει» με ανάλογο τρόπο που ισχύει και για την 1^η εργασία. Όταν οι τιμές της μειώνονται προς τις αρνητικές τιμές η καμπύλη αλλάζει καμπυλότητα και συμπεριφέρεται με ανάλογο τρόπο.

Διερεύνηση 2

Οι μαθητές αναμένεται να παρατηρήσουν και να περιγράψουν ότι καθώς οι τιμές του b αυξάνουν προς τις θετικές τιμές η καμπύλη και η κατακόρυφη ευθεία μεταφέρονται προς τα δεξιά ενώ ταυτόχρονα μεταβάλλεται και η καμπυλότητά της. Αντίθετα συμβαίνουν όταν οι τιμές μειώνονται προς αρνητικές ενώ αλλάζει η καμπυλότητά της.

Διερεύνηση 3

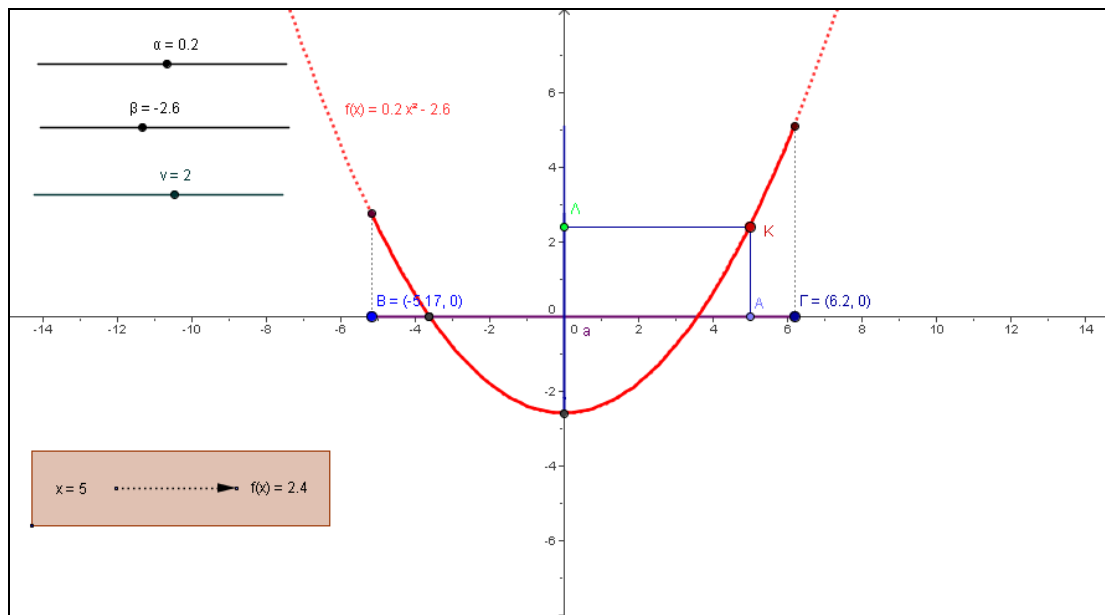
Οι μαθητές αναμένεται να παρατηρήσουν και να περιγράψουν ότι καθώς οι τιμές του γ αυξάνουν προς τις θετικές τιμές η καμπύλη και η κατακόρυφη ευθεία μεταφέρονται προς τα δεξιά χωρίς να μεταβάλλεται η καμπυλότητά της. Όταν οι τιμές μειώνονται η καμπύλη μεταφέρεται προς τα αριστερά.

Διερεύνηση 4

Αναμένεται να απαντήσουν ότι όταν ο συντελεστής δ παίρνει τιμές αυξανόμενες η καμπύλη μεταφέρεται προς τα πάνω. Αντίθετα συμβαίνουν όταν οι τιμές του δ μειώνονται. Σε κάθε μεταβολή δεν αλλάζει η απόσταση των δυο καμπύλων.

Πέραν των αναμενόμενων απαντήσεων ο εκπαιδευτικός μπορεί να ζητήσει από τους μαθητές να δώσουν επιπλέον εξηγήσεις των παραπάνω αναμενόμενων φαινομένων που πιθανόν να περιγράψουν, εστιάζοντας στην εξίσωση και στον τρόπο που οι τιμές της μεταβάλλονται όταν μειώνεται ή αυξάνεται ένας συντελεστής της.

3.4 ΣΕΝΑΡΙΟ 4 : Πεδίο ορισμού και σύνολο τιμών των συναρτήσεων



3.4.1 Η κεντρική ιδέα του σεναρίου

Στο σενάριο αυτό οι μαθητές καλούνται να διερευνήσουν και να μελετήσουν τη σχέση που έχει το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων με το σύνολο τιμών και το γράφημα της συνάρτησης. Οι μαθητές θα έχουν την ευκαιρία να διερευνήσουν την κάθε συνάρτηση ως μια αντιστοιχία μεταξύ συνόλων πραγματικών αριθμών μέσω των γραφικών τους παραστάσεων.

Ποιο συγκεκριμένα, οι μαθητές, μπορούν να ορίζουν το πεδίο ορισμού μιας συνάρτησης και να παρακολουθούν τον προσδιορισμό του συνόλου τιμών της με τη βοήθεια του γραφήματος. Οι προσδιορισμοί αυτοί αναπαρίστανται γεωμετρικά στο γράφημα της συνάρτησης αλλά και αριθμητικά ως αντιστοιχία μεταξύ των τιμών του πεδίου ορισμού και του συνόλου τιμών.

3.4.2 Στόχοι

- Να αποκτήσουν εμπειρίες για τη σχέση μεταξύ του πεδίου ορισμού και του συνόλου τιμών της συνάρτησης.
- Να αποκτήσουν εμπειρίες για το ρόλο του πεδίου ορισμού της συνάρτησης στον προσδιορισμό χαρακτηριστικών που σχετίζονται με το σύνολο τιμών της
- Να κατανοήσουν ότι το σύνολο τιμών της συνάρτησης εξαρτάται από το πεδίο ορισμού της καθώς και από τα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά της κάθε συνάρτησης.
- Να εκφράζουν ποιοτικά χαρακτηριστικά των τιμών της συνάρτησης καθώς και των μεταβολών τους.

3.4.3 Διδακτική πρόταση

ΟΡΓΑΝΩΣΗ ΤΗΣ ΤΑΞΗΣ

Οι δραστηριότητες αυτές ενδείκνυται να διδάσκονται στο εργαστήριο υπολογιστών και οι μαθητές να εργάζονται σε ομάδες 2-3 ατόμων με φύλλο εργασίας. Μπορούν όμως να διεξαχθούν και στη τάξη που έχει μόνο έναν υπολογιστή με βιντεοπροβολέα. Σ' αυτή την περίπτωση οι μαθητές συμπληρώνουν τα φύλλα εργασίας με βάση τις παρατηρήσεις που κάνουν κατά την διερεύνηση που γίνεται απ' όλη τη τάξη και κατευθύνεται από τον εκπαιδευτικό ή κάποιον μαθητή. Στο πλαίσιο αυτό κάνουν παρεμβάσεις στην διερεύνηση με τις οποίες εκφράζουν την δική τους στρατηγική στη διερεύνηση. Καθώς τέτοιες παρεμβάσεις μπορούν να γίνονται στην τάξη απ' όλους τους μαθητές ο διδάσκων πρέπει να τις υποστηρίζει και να επιδιώκει να συζητούνται όλες οι πιθανές στρατηγικές της διερεύνησης.

Σε κάθε περίπτωση ο εκπαιδευτικός πρέπει να έχει από πριν προετοιμάσει τον τρόπο που θα χειριστεί τις διαφορετικές στρατηγικές που πιθανόν να διατυπωθούν καθώς και τις πιθανές εκβάσεις τους.

Έτσι πρέπει με τη στάση του να προκαλεί την εφαρμογή των διαφορετικών τρόπων διερεύνησης, να ενθαρρύνει κάθε μαθητή να δοκιμάζει τις ιδέες του, να εκφράζει τις εικασίες του και να διατυπώνει τα συμπεράσματά του ελεύθερα.

ΟΙ ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΕΣ ΔΥΝΑΤΟΤΗΤΕΣ ΤΟΥ ΣΕΝΑΡΙΟΥ

Οι προτεινόμενες στο σενάριο δραστηριότητες αφορούν φαινόμενα τα οποία προκαλούνται από την δράση των μαθητών σε προσχεδιασμένους υπολογιστικούς μικρόκοσμους με σκοπό την ανάδειξη μερικών ιδιοτήτων τους. Έτσι οι απαντήσεις στα ερωτήματα που τίθενται στο πλαίσιο αυτών των διερευνήσεων αλλά και αυτών που ο διδάσκων ή οι ίδιοι οι μαθητές μπορούν να θέσουν είναι δυνατόν να αποτελέσουν ένα περιβάλλον απόκτησης και έκφρασης εμπειριών σχετικών με τον προσδιορισμό του συνόλου τιμών μιας συνάρτησης καθώς και με τη σχέση που έχει αυτό με το πεδίο ορισμού και τα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά της. Τα εργαλεία που έχουν ενσωματωθεί στους μικρόκοσμους δίνουν την δυνατότητα στους μαθητές,

- να κάνουν πειράματα με τον προσδιορισμό του πεδίου ορισμού προκειμένου να ορίσουν το σύνολο τιμών των διαφορών συναρτήσεων,
- να παρατηρούν και να ερμηνεύουν τα αποτελέσματα των χειρισμών τους,
- να εκφράζουν εικασίες, να κάνουν γενικεύσεις, να διατυπώνουν υποθέσεις και θεωρήματα και να τα εκφράζουν με μαθηματικούς όρους.
- να λύνουν προβλήματα αλγεβρικού υπολογισμού του συνόλου τιμών με τη βοήθεια των εμπειριών από την οπτική διαπραγμάτευση αυτών.

Ακόμα, μπορούν να επεμβαίνουν και να επαναπροσδιορίζουν τις δυνατότητες των εργαλείων ή να επαναδιατυπώνουν τον τρόπο ορισμού των αντικειμένων και να μεταβάλλουν την εμφάνισή τους. Από αυτή την άποψη οι μικρόκοσμοι είναι επαναχρησιμοποιήσιμοι και δίνουν τη δυνατότητα στους χρήστες να διατυπώνουν και νέα ερωτήματα που αφορούν ιδιαίτερες γνωστικές πτυχές των μαθηματικών αντικειμένων.

ΠΟΡΕΙΑ ΤΗΣ ΕΦΑΡΜΟΓΗΣ ΤΟΥ ΣΕΝΑΡΙΟΥ

Το σενάριο αποτελείται από τέσσερις εργασίες. Στην πρώτη, οι μαθητές διαπραγματεύονται τη σχέση μεταξύ του πεδίου ορισμού και του συνόλου τιμών της οικογένειας των πολυωνυμικών συναρτήσεων $f(x) = a \cdot x^v + \beta$. Στη δεύτερη, επαναλαμβάνουν την διερεύνηση για την οικογένεια των τριγωνομετρικών συναρτήσεων $f(x) = a \cdot \eta\mu(\beta \cdot x + \gamma)$ στην Τρίτη, την οικογένεια των ρητών συναρτήσεων $f(x) = a \cdot \sqrt{\beta x + \gamma} + \delta$ και στην τέταρτη, την οικογένεια των συναρτήσεων $f(x) = \begin{cases} ax + \beta, [x(A), x(M)] \\ \gamma x + \delta, [x(M), x(B)] \end{cases}$.

Η εμπλοκή των μαθητών με κάθε μια δραστηριότητα αναμένεται να αναδείξει,

- τον ρόλο του πεδίου ορισμού στον καθορισμό του συνόλου τιμών.
- τον ρόλο των συντελεστών της κάθε εξίσωσης στον καθορισμό του εκάστοτε συνόλου τιμών,

Ο εκπαιδευτικός μπορεί να ζητά από τους μαθητές να επαληθεύουν αλγεβρικά τα συμπεράσματά τους σε κάθε περίπτωση.

ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

Εργασία	Περιγραφή	Τμήμα εφαρμογής	Περιεχόμενο
Εργασία 1	Οικογένεια πολυωνυμικών	ΟΛΟΙ	Διατυπώνουν συμπεράσματα για τα κοινά χαρακτηριστικά των συναρτήσεων $f(x) = a \cdot x^v + \beta$
Εργασία 2	Οικογένεια τριγωνομετρικών	ΟΛΟΙ	Διατυπώνουν συμπεράσματα για τα κοινά χαρακτηριστικά των συναρτήσεων $f(x) = a \cdot \eta\mu(\beta \cdot x + \gamma)$
Εργασία 3	Οικογένεια άρρητων συναρτήσεων	ΟΛΟΙ	Διατυπώνουν συμπεράσματα για τα κοινά χαρακτηριστικά των συναρτήσεων $f(x) = a \cdot \sqrt{\beta x + \gamma} + \delta$
Εργασία 4	Οικογένεια συναρτήσεων πολλαπλού τύπου	ΟΛΟΙ	Διατυπώνουν συμπεράσματα για τα κοινά χαρακτηριστικά των συναρτήσεων $f(x) = \begin{cases} ax + \beta, [x(A), x(M)] \\ \gamma x + \delta, [x(M), x(B)] \end{cases}$

3.4.4 Θέμα 1: Βρείτε το κατάλληλο σύνολο τιμών

Στην επιφάνεια εργασίας του παρακάτω μικρόκοσμου έχει σχεδιαστεί η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = a \cdot x^n + b$. Μπορείτε να προσδιορίζετε τον τύπο της μετακινώντας τον κέρσορα κάθε μεταβολέα και να μετακινείτε τα σημεία Β και Γ για να επαναπροσδιορίσετε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης. Διερευνήστε τη σχέση μεταξύ του πεδίου ορισμού και του συνόλου τιμών αυτής.

ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΕΙΣ

1. Ποιό είναι το σύνολο τιμών της συνάρτησης $f(x)=0.3x^2-3$ όταν το πεδίο ορισμού της Α είναι:
2. $A = (-4,4)$ και (2) $A = (-3,5)$
3. Μπορείτε να προσδιορίσετε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x)=-x^2+7$ ώστε αυτή να έχει σύνολο τιμών το διάστημα $[-2,7]$;
4. Μπορείτε να συγκρίνετε τα σύνολα τιμών των συναρτήσεων $f(x) = 0.2x^2-3$ και $f(x)=0.2x^3-3$ όταν και στις δυο περιπτώσεις το πεδίο ορισμού είναι το $[-2,3]$; Μπορείτε να εξηγήσετε τις διαφορές και τις ομοιότητες (εφόσον υπάρχουν);
5. Μπορείτε να προσδιορίσετε το σύνολο τιμών της συνάρτησης $f(x)=1/x^2-3$ για διάφορα πεδία ορισμού της; Τι κοινό έχουν; Μπορείτε να επιβεβαιώνετε τα συμπεράσματά σας και αλγεβρικά;

ΟΔΗΓΙΕΣ ΠΡΟΣ ΤΟΝ ΔΙΔΑΣΚΟΝΤΑ

Για τη διαχείριση των εργαλείων του μικρόκοσμου

Ζητήστε από τους μαθητές:

- Να κινούν τον κάθε μεταβολέα κατάλληλα ώστε να ορίσουν ακριβώς την εξίσωση της συνάρτησης.
- Να μετακινούν τα σημεία Α και Β για να ορίσουν το πεδίο ορισμού.
- Να κινούν το σημείο Α και να παρατηρούν τον τρόπο μεταβολής του σημείου Κ πάνω στην καμπύλη και του Λ πάνω στον άξονα $\psi'\psi$.
- Να επαναπροσδιορίζουν τα χαρακτηριστικά (properties) των μεταβολέων για να μπορούν να επαναπροσδιορίζουν το πεδίο ορισμού.

Για τις διερευνήσεις

Ζητήστε από τους μαθητές να παρατηρούν, να προβλέπουν, να ελέγχουν και να εκφράζουν στην ομάδα τους και στην τάξη:

- Για το γράφημα:
 - ✓ Τη μορφή του γραφήματος που ορίζεται από το πεδίο ορισμού.
 - ✓ Τι συμβαίνει στο γράφημα όταν επιλέγουν συγκεκριμένο πεδίο ορισμού.
 - ✓ Πώς ορίζεται το τμήμα του άξονα $\psi'\psi$ που αναπαριστά το σύνολο τιμών της συνάρτησης.
- Για το σύνολο τιμών:

- ✓ Πώς μεταβάλλονται οι τιμές της συνάρτησης όταν κινούν το σημείο A.
- ✓ Πώς μεταβάλλεται το σύνολο τιμών όταν μεταβάλλεται το πεδίο ορισμού ή η εξίσωση της συνάρτησης .
- ✓ Αν επαληθεύεται το συμπέρασμά τους για το σύνολο τιμών και αλγεβρικά.

Για τις απαντήσεις

Ζητήστε από τους μαθητές να εκφράσουν στην τάξη τις απαντήσεις τους. Είναι πιθανόν οι μαθητές να δώσουν απαντήσεις όπως οι παρακάτω:

Διερεύνηση 1

Αναμένεται να απαντήσουν ότι το σύνολο τιμών είναι το διάστημα $[-3, 1,8]$.

Διερεύνηση 2

Αναμένεται να απαντήσουν ότι το σύνολο τιμών είναι το διάστημα $[-42, 7]$.

Διερεύνηση 3

Αναμένεται να απαντήσουν ότι το σύνολο τιμών είναι το διάστημα $[-3, -1,2]$.

Διερεύνηση 4

Αναμένεται να απαντήσουν ότι το σύνολο τιμών είναι ένα διάστημα της μορφής $[α,β]$ ή της μορφής $[α,+∞)$.

Οι αλγεβρικές επαληθεύσεις των παραπάνω αποτελεσμάτων μπορούν να γίνουν εύκολα σε κάθε περίπτωση αν λυθεί μια σειρά ανισώσεων.

3.4.5 Θέμα 2: Βρείτε το κατάλληλο σύνολο τιμών στις τριγωνομετρικές συναρτήσεις

Στην επιφάνεια εργασίας του παρακάτω μικρόκοσμου έχει σχεδιαστεί η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = a \cdot \sin(b \cdot x + \gamma) + \delta$. Μπορείτε να προσδιορίζετε τον τύπο της μετακινώντας τον κέρσορα κάθε μεταβολέα και να μετακινείτε τα σημεία Β και Γ για να επαναπροσδιορίσετε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

Διερευνήστε τη σχέση μεταξύ του πεδίου ορισμού και του συνόλου τιμών αυτής.

ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΕΙΣ

1. Ποιό είναι το σύνολο των τιμών της συνάρτησης $f(x) = 2 \cdot \sin(x) + 1$ όταν το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι, (1) $A = [-\pi, \pi]$ και (2) $[-2\pi, 2\pi]$; Σε τι διαφέρουν τα δυο σύνολα τιμών και πώς αυτό εξηγείται;
2. Τι θα αλλάξει στο σύνολο τιμών της συνάρτησης $f(x) = 2 \cdot \sin(x) + 1$ με πεδίο ορισμού το διάστημα $[-\pi, \pi]$ αν αλλάξετε τον συντελεστή 1 σε -1, 2, -2 κ.ο.κ. Μπορείτε να εξηγήσετε τις αλλαγές αυτές; Τι θα συμβεί αν αλλάξετε το πεδίο ορισμού σε $[-2\pi, 2\pi]$; Μπορείτε να εξηγήσετε αυτές τις αλλαγές;
3. Τι θα συμβεί στο σύνολο τιμών της συνάρτησης $f(x) = 2 \cdot \sin(x+1)$ με πεδίο ορισμού το σύνολο $[-\pi, \pi]$, αν μεταβάλλουμε την τιμή του συντελεστή 1; Πώς εξηγείτε το συμπέρασμά σας;
4. Μπορείτε να προσδιορίσετε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x) = \sin(2x - \pi/3) - 1$ ώστε αυτή να έχει σύνολο τιμών το διάστημα $[0, 1]$; Μπορείτε να επιβεβαιώσετε το συμπέρασμά σας αλγεβρικά;

Ανακεφαλαίωση: Συζητήστε με τους μαθητές σας στην τάξη για τα αποτελέσματα των διερευνήσεων που έκαναν. Ζητήστε τους να περιγράψουν τον τρόπο μεταβολής του συνόλου τιμών για τις διάφορες μεταβολές του πεδίου ορισμού. Συζητήστε για τις περιπτώσεις που στο σύνολο τιμών περιέχεται ένα ή δυο ή περισσότερα ακρότατα. Συζητήστε για την περιοδικότητα της συνάρτησης καθώς και για την περίοδο αυτής.

ΟΔΗΓΙΕΣ ΠΡΟΣ ΤΟΝ ΔΙΔΑΣΚΟΝΤΑ

Για τη διαχείριση των εργαλείων του μικρόκοσμου

Ζητήστε από τους μαθητές:

- Να κινούν τον κάθε μεταβολέα κατάλληλα ώστε να ορίσουν ακριβώς την εξίσωση της συνάρτησης.
- Να μετακινούν τα σημεία Α και Β για να ορίσουν το πεδίο ορισμού.
- Να κινούν το σημείο Α και να παρατηρούν τον τρόπο μεταβολής του σημείου Κ πάνω στην καμπύλη και του Λ πάνω στον άξονα $\psi'\psi$.
- Να επαναπροσδιορίζουν τα χαρακτηριστικά (properties) των μεταβολέων για να μπορούν να επαναπροσδιορίσουν το πεδίο ορισμού.

Για τις διερευνήσεις

Ζητήστε από τους μαθητές να παρατηρούν, να προβλέπουν, να ελέγχουν και να εκφράζουν στην ομάδα τους και στην τάξη:

- Για το γράφημα:
 - ✓ Τη μορφή του γραφήματος που ορίζεται από το πεδίο ορισμού.
 - ✓ Τι συμβαίνει στο γράφημα όταν επιλέγουν συγκεκριμένο πεδίο ορισμού.
 - ✓ Πώς ορίζεται το τμήμα του άξονα $\psi\psi$ που αναπαριστά το σύνολο τιμών της συνάρτησης.
- Για το σύνολο τιμών:
 - ✓ Πώς μεταβάλλονται οι τιμές της συνάρτησης όταν κινούν το σημείο Α.
 - ✓ Πώς μεταβάλλεται το σύνολο τιμών όταν μεταβάλλεται το πεδίο ορισμού ή η εξίσωση της συνάρτησης.
 - ✓ Αν επαληθεύεται το συμπέρασμά τους για το σύνολο τιμών και αλγεβρικά.

Για τις απαντήσεις

Ζητήστε από τους μαθητές να εκφράσουν στην τάξη τις απαντήσεις τους. Είναι πιθανόν οι μαθητές να δώσουν απαντήσεις όπως οι παρακάτω:

Διερεύνηση 1

Αναμένεται να απαντήσουν ότι το σύνολο τιμών και στις δυο περιπτώσεις είναι το διάστημα $[-1, 3]$.

Διερεύνηση 2

Αναμένεται να απαντήσουν ότι το σύνολο τιμών είναι το διάστημα $[-3, 1]$ στη περίπτωση της συνάρτησης $f(x)=2*\sin(x)-1$, $[0, 4]$ στην περίπτωση της συνάρτησης $f(x)=2*\sin(x)+2$ και $[-4, 0]$ στη περίπτωση $f(x)=2*\sin(x)-2$. Οι απαντήσεις αυτές ισχύουν και στη περίπτωση που το πεδίο ορισμού είναι το $[-2\pi, 2\pi]$.

Διερεύνηση 3

Αναμένεται να απαντήσουν ότι το σύνολο τιμών είναι το διάστημα $[-2, 2]$.

Διερεύνηση 4

Οι μαθητές πρέπει να χρησιμοποιήσουν την εντολή Μετονομασία και να πληκτρολογήσουν τη νέα συνάρτηση. Ακολούθως αναμένεται να απαντήσουν ότι δεν υπάρχει πεδίο ορισμού ώστε το αντίστοιχο σύνολο τιμών να είναι το $[0, 1]$.

Οι αλγεβρικές επαληθεύσεις των παραπάνω αποτελεσμάτων μπορούν να γίνουν εύκολα σε κάθε περίπτωση αν ληφθούν υπόψη οι ιδιότητες των τριγωνομετρικών αριθμών και ιδιαίτερα η ιδιότητα που αφορά το σύνολο τιμών της $f(x)=\sin(x)$ που είναι το $[-1, 1]$ και έτσι ισχύει η διπλή ανίσωση $-1 \leq \sin(x) \leq 1$.

Ο εκπαιδευτικός μπορεί επιπλέον να ζητήσει από τους μαθητές του να επαναλάβουν τις διερευνήσεις και με άλλες τριγωνομετρικές συναρτήσεις. Μπορεί, για παράδειγμα, να ζητήσει να επαναλάβουν τις διερευνήσεις αφού με τη βοήθεια της εντολής «Μετονομασία» πληκτρολογήσουν τη συνάρτηση $f(x)=\alpha*\cos(\beta*x+\gamma)+\delta$ ή τη συνάρτηση $f(x)=\alpha*\tan(\beta*x+\gamma)+\delta$ ή τη συνάρτηση $f(x)=\alpha*\tan(\beta*(\pi/2-x)+\gamma)+\delta$. Η τελευταία περίπτωση αφορά τη συνάρτηση της συνεφαπτομένης.

3.4.6 Θέμα 3: Βρείτε το κατάλληλο σύνολο τιμών στις άρρητες συναρτήσεις

Στην επιφάνεια εργασίας έχουμε σχεδιάσει τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=a*\sqrt{\beta x + \gamma} + \delta$.

Μπορείτε να προσδιορίζετε τον τύπο της μετακινώντας τον κέρσορα κάθε μεταβολέα και να μετακινείτε τα σημεία B και Γ για να επαναπροσδιορίσετε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

Διερευνήστε τη σχέση μεταξύ του πεδίου ορισμού και του συνόλου τιμών αυτής.

ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΕΙΣ

1. Πώς μεταβάλλεται το σύνολο τιμών της συνάρτησης $f(x)=-2*\sqrt{x+1}+3$ σε σχέση με το πεδίο ορισμού της; Τι θα συμβεί στο σύνολο τιμών αν μετακινήσετε το B στη θέση (1) (-2,0) , (2) (-1,0);
2. Μπορείτε να προσδιορίσετε τον τύπο της συνάρτησης ώστε με πεδίο ορισμού το $[1,5]$ να έχει σύνολο τιμών το $[-1,3]$; Μπορείτε να επιβεβαιώσετε το αποτέλεσμα της διερεύνησης κα αλγεβρικά;
3. Επιλέξτε την συνάρτηση $f(x) = 5-2*\sqrt{x-1}$. Μπορείτε να προβλέψετε το σύνολο τιμών της συνάρτησης στην περίπτωση που το πεδίο ορισμού είναι το διάστημα $[1,10]$;
4. Επιλέξτε την συνάρτηση $f(x) = 1-2*\sqrt{3*x+1}$.

Μπορείτε να προβλέψετε το σύνολο τιμών της συνάρτησης στην περίπτωση που το πεδίο ορισμού είναι το διάστημα $[1,5]$; Μπορείτε να προσδιορίσετε τις τιμές των συντελεστών της συνάρτησης $f(x)$ ώστε να έχει το σύνολο τιμών συμμετρικό του προηγούμενου ως προς την αρχή των αξόνων;

Ανακεφαλαίωση: Συζητήστε στην τάξη σας για τα αποτελέσματα των διερευνήσεων που κάνατε. Περιγράψτε τον τρόπο μεταβολής του συνόλου τιμών για τις διάφορες μεταβολές του πεδίου ορισμού.

ΟΔΗΓΙΕΣ ΠΡΟΣ ΤΟΝ ΔΙΔΑΣΚΟΝΤΑ

Για τη διαχείριση των εργαλείων του μικρόκοσμου

Ζητήστε από τους μαθητές:

- Να κινούν τον κάθε μεταβολέα κατάλληλα ώστε να ορίσουν ακριβώς την εξίσωση της συνάρτησης.
- Να μετακινούν τα σημεία A και B για να ορίσουν το πεδίο ορισμού.
- Να κινούν το σημείο A και να παρατηρούν τον τρόπο μεταβολής του σημείου K πάνω στην καμπύλη και του Λ πάνω στον άξονα $\psi'\psi$.
- Να επαναπροσδιορίζουν τα χαρακτηριστικά (properties) των μεταβολέων για να μπορούν να επαναπροσδιορίζουν το πεδίο ορισμού.

Για τις διερευνήσεις

Ζητήστε από τους μαθητές να παρατηρούν, να προβλέπουν, να ελέγχουν και να εκφράζουν στην ομάδα τους και στην τάξη:

- Για το γράφημα:
 - ✓ Τη μορφή του γραφήματος που ορίζεται από το πεδίο ορισμού.
 - ✓ Τι συμβαίνει στο γράφημα όταν επιλέγουν συγκεκριμένο πεδίο ορισμού.
 - ✓ Πώς ορίζεται το τμήμα του άξονα $\psi'\psi$ που αναπαριστά το σύνολο τιμών της συνάρτησης.
- Για το σύνολο τιμών:
 - ✓ Πώς μεταβάλλεται το σύνολο τιμών όταν μεταβάλλεται το πεδίο ορισμού ή η εξίσωση της συνάρτησης .
 - ✓ Αν επαληθεύεται το συμπέρασμά τους για το σύνολο τιμών και αλγεβρικά.

Για τις απαντήσεις

Ζητήστε από τους μαθητές να εκφράσουν στην τάξη τις απαντήσεις τους. Είναι πιθανόν οι μαθητές να δώσουν απαντήσεις όπως οι παρακάτω:

Διερεύνηση 1

Αναμένεται να απαντήσουν ότι το σύνολο τιμών εξαρτάται από τα δυο άκρα του πεδίου ορισμού όταν και τα δύο είναι μεγαλύτερα από το -1. Όταν το αριστερό άκρο είναι μικρότερο του -1 το σύνολο τιμών έχει αριστερό άκρο το 0 ενώ το δεξί άκρο καθορίζεται από το δεξί άκρο του πεδίου ορισμού. Στις περιπτώσεις που το πεδίο ορισμού είναι το διάστημα $[-2,0]$ ή $[-1,0]$ το σύνολο τιμών είναι το $[1,3]$.

Διερεύνηση 2

Οι μαθητές πρέπει πρώτα να ορίσουν το πεδίο ορισμού $[1,5]$ και στη συνέχεια να πειραματιστούν με τους μεταβολείς για να ορίσουν την κατάλληλη συνάρτηση. Αναμένεται να αναπτύξουν στρατηγικές όπως (1) με τους μεταβολείς των α, β, γ να ορίσουν σύνολο τιμών με εύρος τη διαφορά $3-(-1)=4$ και στη συνέχεια με τον μεταβολέα δ να ορίσουν αυτό να είναι το ζητούμενο ή (2) να δουλέψουν πρώτα στο χαρτί με μολύβι. Η συνάρτηση που αναμένεται να βρουν είναι η $f(x)=2*\sqrt{x-1}-1$

Διερεύνηση 3

Κατά τη διαδικασία της πρόβλεψης οι μαθητές αναμένεται να χρησιμοποιήσουν τις εμπειρίες που απέκτησαν από τις προηγούμενες διερευνήσεις και τα αποτελέσματα από την εργασία που θα κάνουν στο χαρτί. Η απάντηση που αναμένεται να δώσουν είναι το $[-1,5]$.

Διερεύνηση 4

Αναμένεται να απαντήσουν ότι το σύνολο τιμών είναι ένα διάστημα $[-7,-3]$.

Οι αλγεβρικές επαληθεύσεις των παραπάνω αποτελεσμάτων μπορούν να γίνουν εύκολα σε κάθε περίπτωση αν λυθεί μια σειρά ανισώσεων.

3.4.7 Θέμα 4: Το σύνολο τιμών σε συνάρτηση διπλού τύπου

Στην επιφάνεια εργασίας έχουμε σχεδιάσει τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)=\alpha x + \beta$, με πεδίο ορισμού το διάστημα $[x(A), x(M)]$ και $g(x)$

$$=\gamma x + \delta, \text{ με πεδίο ορισμού το διάστημα } [x(M), x(B)]. \quad \varphi(x) = \begin{cases} \alpha x + \beta, [x(A), x(M)] \\ \gamma x + \delta, [x(M), x(B)] \end{cases}$$

Μπορείτε να μετακινείτε τα τρία σημεία A, M και B καθώς και το σημείο K και να παρατηρείτε πώς μεταβάλλεται το πεδίο ορισμού, οι τιμές της κάθε συνάρτησης καθώς και το σύνολο των τιμών τους.

Μπορείτε να διερευνήσετε τη σχέση που έχουν τα δυο σύνολα τιμών σε σχέση με τα πεδία ορισμού τους;

ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΕΙΣ

1. Μπορείτε να καθορίσετε τον τύπο κάθε συνάρτησης καθώς και τα δυο πεδία ορισμού τους ώστε το κοινό σύνολο τιμών τους να είναι το διάστημα $[-2,4]$;
2. Επιλέξτε οι δείκτες των μεταβολών να δείχνουν $\alpha=0.8$, $\beta=1$, $\gamma=0.6$ και $\delta=0.6$. Μετακινήστε το σημείο A από τη θέση του B μέχρι τη θέση του Γ και περιγράψτε πώς μεταβάλλονται οι τιμές της συνάρτησης $\varphi(x)$. Ποιό είναι το σύνολο τιμών της;
3. Πώς πρέπει να επανακαθορίσουμε τους συντελεστές των επιμέρους τύπων της συνάρτησης της προηγούμενης διερεύνησης ώστε το σύνολο τιμών να είναι ένα διάστημα και όχι ένωση διαστημάτων;
4. Επιλέξτε οι δείκτες των μεταβολών να δείχνουν $\alpha=2$, $\beta=-1$, $\gamma=-2$ και $\delta=-1$. Πώς πρέπει να επιλέξετε τις θέσεις των σημείων A, B και M ώστε οι δυο γραφικές παραστάσεις να είναι συνεχόμενες; Ποιό είναι το σύνολο τιμών στην περίπτωση αυτή.

ΟΔΗΓΙΕΣ ΠΡΟΣ ΤΟΝ ΔΙΔΑΣΚΟΝΤΑ

Για τη διαχείριση των εργαλείων του μικρόκοσμου

Ζητήστε από τους μαθητές:

- Να κινούν τον κάθε μεταβολέα κατάλληλα ώστε να ορίσουν ακριβώς την εξίσωση της συνάρτησης.
- Να μετακινούν τα σημεία A και B για να ορίσουν το πεδίο ορισμού.
- Να κινούν το σημείο A και να παρατηρούν τον τρόπο μεταβολής του σημείου K πάνω στην καμπύλη και του Λ πάνω στον άξονα ψ'ψ.
- Να επαναπροσδιορίζουν τα χαρακτηριστικά (properties) των μεταβολών για να μπορούν να επαναπροσδιορίζουν το πεδίο ορισμού.

Για τις διερευνήσεις

Ζητήστε από τους μαθητές να παρατηρούν, να προβλέπουν, να ελέγχουν και να εκφράζουν στην ομάδα τους και στην τάξη:

- Για το γράφημα:
 - ✓ Τη μορφή του γραφήματος που ορίζεται από το πεδίο ορισμού.

- ✓ Τι συμβαίνει στο γράφημα όταν επιλέγουν συγκεκριμένο πεδίο ορισμού.
- ✓ Πώς ορίζεται το τμήμα του άξονα $\psi'\psi$ που αναπαριστά το σύνολο τιμών της συνάρτησης.
- Για το σύνολο τιμών:
 - ✓ Πώς μεταβάλλεται το σύνολο τιμών όταν μεταβάλλεται το πεδίο ορισμού ή η εξίσωση της συνάρτησης .
 - ✓ Αν επαληθεύεται το συμπέρασμά τους για το σύνολο τιμών και αλγεβρικά.

Για τις απαντήσεις

Ζητήστε από τους μαθητές να εκφράσουν στην τάξη τις απαντήσεις τους. Είναι πιθανόν οι μαθητές να δώσουν απαντήσεις όπως οι παρακάτω:

Διερεύνηση 1

Οι μαθητές αναμένεται να αναπτύξουν διάφορες στρατηγικές για να προσδιορίσουν το πεδίο ορισμού και τους τύπους των δυο κλάδων της συνάρτησης ώστε το σύνολο τιμών να είναι το $[-2,4]$. Για παράδειγμα, μπορούν να ορίσουν το πεδίο ορισμού της $f_1(x)$ και τον τύπο της έτσι ώστε να έχει σύνολο τιμών το διάστημα $[-2,4]$. Στη συνέχεια μπορούν να ορίσουν τον τύπο της $f_2(x)$ ώστε το σύνολο τιμών της να περιέχεται στο $[-2,4]$. Μια τέτοια πιθανή απάντηση είναι η περίπτωση που $f_1(x) = x+2$ και πεδίο ορισμού το διάστημα $[-4,2]$ ενώ η $f_2(x)$ έχει μια οποιαδήποτε εξίσωση της μορφής $f_2(x)=\gamma x+\delta$ και πεδίο ορισμού διάστημα της μορφής $[2,\kappa]$ ή κάποιο άλλο. Π.χ. $f_2(x)=-0,7x+4,6$ και πεδίο ορισμού το $[2,6]$.

Διερεύνηση 2

Οι μαθητές αναμένεται να πειραματιστούν με την θέση του σημείου Μ που ορίζει το πεδίο ορισμού κάθε κλάδου της συνάρτησης και με την μεταβολή των τιμών των δυο κλάδων. Πιθανόν να παρατηρήσουν και να περιγράψουν το άλμα που κάνουν οι τιμές της συνάρτησης όταν μετακινούνται από τον ένα κλάδο στον άλλο.

Διερεύνηση 3

Αρκεί να μετακινήσουν το σημείο Μ στη θέση $(-2,0)$. Τότε οι δυο κλάδοι ενώνονται (η συνάρτηση καθίσταται συνεχής) και το σύνολο τιμών είναι ένα διάστημα και όχι ένωση διαστημάτων.

Διερεύνηση 4

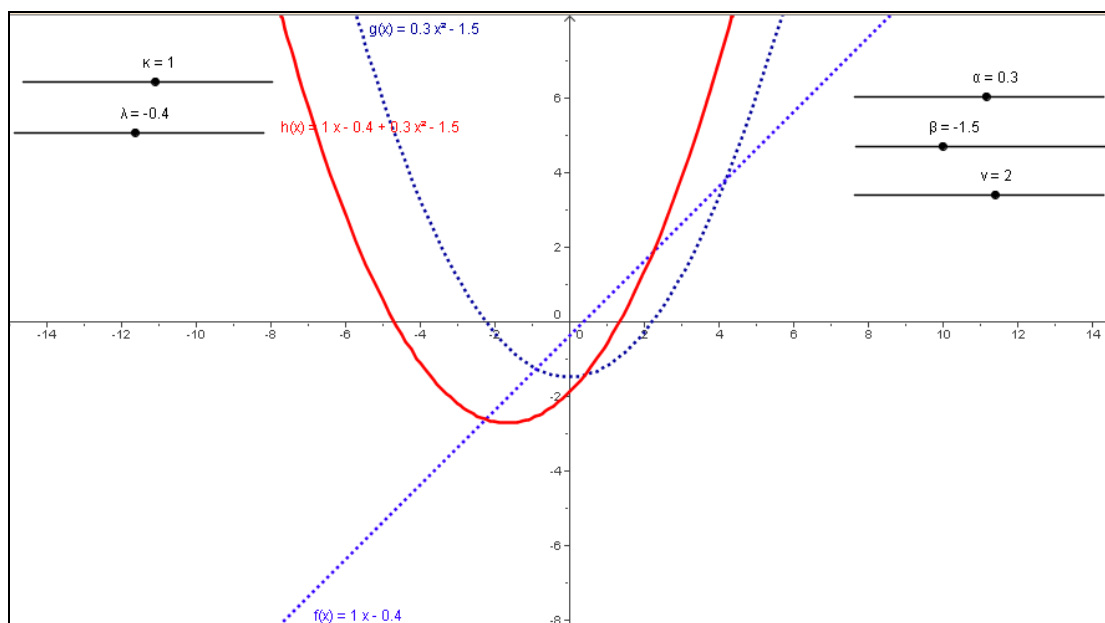
Μια πιθανή απάντηση είναι η εξής: $B(-2,0)$, $\Gamma(3,0)$ και $M(0,0)$.

Οι αλγεβρικές επαληθεύσεις των παραπάνω αποτελεσμάτων μπορούν να γίνουν εύκολα σε κάθε περίπτωση αν λυθεί μια σειρά ανισώσεων.

Ο εκπαιδευτικός μπορεί να θέσει και άλλα θέματα για συναρτήσεις διπλού τύπου ώστε οι μαθητές να αποκτήσουν εμπειρίες (1) για τον τρόπο προσδιορισμού του συνόλου τιμών και (2) για συνεχείς συναρτήσεις.

Ανακεφαλαίωση: Συζητήστε στην τάξη σας για τα αποτελέσματα των διερευνήσεων που κάνατε. Περιγράψτε τον τρόπο μεταβολής του συνόλου τιμών για τις διάφορες μεταβολές του πεδίου ορισμού.

3.5 ΣΕΝΑΡΙΟ 5 : Πράξεις συναρτήσεων



3.5.1 Η κεντρική ιδέα του σεναρίου

Στο σενάριο αυτό οι μαθητές καλούνται να διερευνήσουν και να μελετήσουν το αποτέλεσμα της πρόσθεσης ή του πολλαπλασιασμού ή της διαίρεσης ή της σύνθεσης δυο συναρτήσεων. Σε κάθε περίπτωση οι μαθητές καλούνται να διερευνήσουν το αποτέλεσμα μιας πράξης μεταξύ συναρτήσεων που ανήκουν σε οικογένειες συναρτήσεων επιλέγοντας κάθε φορά συγκεκριμένες τιμές για τις παραμέτρους αυτών. Έτσι έχουν την ευκαιρία να καταλήγουν σε συμπεράσματα που αφορούν οικογένειες συναρτήσεων.

Πιο συγκεκριμένα, οι μαθητές, μπορούν να επιλέγουν δυο συναρτήσεις με τη βοήθεια των μεταβολών που ορίζουν τιμές για τους συντελεστές τους και στη συνέχεια να παρακολουθούν πώς μεταβάλλεται το αποτέλεσμα της πράξης καθώς μεταβάλλουν τις τιμές των συντελεστών των αρχικών συναρτήσεων. Η αλγεβρική εξήγηση είναι το επόμενο βήμα αυτής της διερεύνησης με το οποίο ολοκληρώνεται η κάθε δραστηριότητα..

3.5.2 Στόχοι

- Να αποκτήσουν εμπειρίες σχετικές με τις πράξεις δυο συναρτήσεων.
- Να αποκτήσουν εμπειρίες για τον ρόλο των συντελεστών δυο συναρτήσεων στον καθορισμό της μορφής της συνάρτησης που προκύπτει από την πράξη των αρχικών.
- Να εκφράζουν ποιοτικά χαρακτηριστικά της συνάρτησης που προκύπτει από την πράξη δυο συναρτήσεων και να τα συνδέουν με ποιοτικά χαρακτηριστικά των αρχικών συναρτήσεων.

3.5.3 Διδακτική πρόταση

ΟΡΓΑΝΩΣΗ ΤΗΣ ΤΑΞΗΣ

Οι δραστηριότητες αυτές ενδείκνυται να διδάσκονται στο εργαστήριο υπολογιστών και οι μαθητές να εργάζονται σε ομάδες 2-3 ατόμων με φύλλο εργασίας. Μπορούν όμως να διεξαχθούν και στην τάξη που έχει μόνο έναν υπολογιστή με βιντεοπροβολέα. Σ' αυτή την περίπτωση οι μαθητές συμπληρώνουν τα φύλλα εργασίας με βάση τις παρατηρήσεις που κάνουν κατά την διερεύνηση που γίνεται απ' όλη την τάξη και κατευθύνεται από τον εκπαιδευτικό ή κάποιον μαθητή. Στο πλαίσιο αυτό κάνουν παρεμβάσεις στην διερεύνηση με τις οποίες εκφράζουν την δική τους στρατηγική στη διερεύνηση. Καθώς τέτοιες παρεμβάσεις μπορούν να γίνονται στην τάξη απ' όλους τους μαθητές ο διδάσκων πρέπει να τις υποστηρίζει και να επιδιώκει να συζητούνται όλες οι πιθανές στρατηγικές της διερεύνησης.

Σε κάθε περίπτωση ο εκπαιδευτικός πρέπει να έχει από πριν προετοιμάσει τον τρόπο που θα χειριστεί τις διαφορετικές στρατηγικές που πιθανόν να διατυπωθούν καθώς και τις πιθανές εκβάσεις τους.

Έτσι πρέπει με τη στάση του να προκαλεί την εφαρμογή των διαφορετικών τρόπων διερεύνησης, να ενθαρρύνει κάθε μαθητή να δοκιμάζει τις ιδέες του, να εκφράζει τις εικασίες του και να διατυπώνει τα συμπεράσματά του ελεύθερα.

ΟΙ ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΕΣ ΔΥΝΑΤΟΤΗΤΕΣ ΤΟΥ ΣΕΝΑΡΙΟΥ

Οι προτεινόμενες στο σενάριο δραστηριότητες αφορούν φαινόμενα τα οποία προκαλούνται από την δράση των μαθητών σε προσχεδιασμένους υπολογιστικούς μικρόκοσμους με σκοπό την ανάδειξη μερικών ιδιοτήτων τους. Έτσι οι απαντήσεις στα ερωτήματα που τίθενται στο πλαίσιο αυτών των διερευνήσεων αλλά και αυτών που ο διδάσκων ή οι ίδιοι οι μαθητές μπορούν να θέσουν είναι δυνατόν να αποτελέσουν ένα περιβάλλον απόκτησης και έκφρασης εμπειριών σχετικών με τον προσδιορισμό του συνόλου τιμών μιας συνάρτησης καθώς και με τη σχέση που έχει αυτό με το πεδίο ορισμού και τα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά της. Τα εργαλεία που έχουν ενσωματωθεί στους μικρόκοσμους δίνουν την δυνατότητα στους μαθητές,

- να κάνουν πειράματα με τον προσδιορισμό των αρχικών συναρτήσεων προκειμένου να ορίσουν το αποτέλεσμα της πράξης μεταξύ αυτών,
- να παρατηρούν και να ερμηνεύουν τα αποτελέσματα των χειρισμών τους,
- να εκφράζουν εικασίες, να κάνουν γενικεύσεις, να διατυπώνουν υποθέσεις και θεωρήματα και να τα εκφράζουν με μαθηματικούς όρους.
- να λύνουν προβλήματα αλγεβρικού προσδιορισμού του αποτελέσματος της πράξης δυο συναρτήσεων και των ιδιοτήτων αυτού με τη βοήθεια των εμπειριών από την οπτική διαπραγμάτευση αυτών.

Ακόμα, μπορούν να επεμβαίνουν και να επαναπροσδιορίζουν τις δυνατότητες των εργαλείων ή να επαναδιατυπώνουν τον τρόπο ορισμού των αντικειμένων και να μεταβάλλουν την εμφάνισή τους. Από αυτή την άποψη οι μικρόκοσμοι είναι επαναχρησιμοποιήσιμοι και δίνουν τη δυνατότητα στους χρήστες να διατυπώνουν και νέα ερωτήματα που αφορούν ιδιαίτερες γνωστικές πτυχές των μαθηματικών αντικειμένων.

ΠΟΡΕΙΑ ΤΗΣ ΕΦΑΡΜΟΓΗΣ ΤΟΥ ΣΕΝΑΡΙΟΥ

Το σενάριο αποτελείται από τέσσερις εργασίες. Στην πρώτη οι μαθητές διαπραγματεύονται το άθροισμα μεταξύ των δυο πολυωνυμικών συναρτήσεων $f(x)=k \cdot x + \lambda$ και $g(x)=a \cdot x^v + \beta$. Στη δεύτερη οι μαθητές διαπραγματεύονται το γινόμενο των ίδιων συναρτήσεων. Στην τρίτη σειρά έχει το πηλίκο αυτών και στην τέταρτη η σύνθεση των ίδιων συναρτήσεων.

Η εμπλοκή των μαθητών με κάθε μια δραστηριότητα αναμένεται να αναδείξει:

- Τον ρόλο της κάθε συνάρτησης στον προσδιορισμό του αποτελέσματος της αντίστοιχης πράξης.
- Τον ρόλο των συντελεστών της κάθε εξίσωσης στον καθορισμό του εκάστοτε αποτελέσματος.
- Ποιες από τις ιδιότητες των αρχικών συναρτήσεων επηρεάζουν και πώς τις ιδιότητες της συνάρτησης που είναι αποτέλεσμα των πράξεων.

Ο εκπαιδευτικός μπορεί να ζητά από τους μαθητές να επαληθεύουν αλγεβρικά τα συμπεράσματά τους σε κάθε περίπτωση.

ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

Εργασία	Περιγραφή	Τμήμα εφαρμογής	Περιεχόμενο
Εργασία 1	Άθροισμα συναρτήσεων	ΟΛΟΙ	Τι ιδιότητες αποκτά το άθροισμα ή η διαφορά δυο συναρτήσεων και πώς αυτές συνδέονται με τις ιδιότητες των επιμέρους συναρτήσεων;
Εργασία 2	Γινόμενο συναρτήσεων	ΟΛΟΙ	Τι ιδιότητες αποκτά το γινόμενο δυο συναρτήσεων και πώς αυτές συνδέονται με τις ιδιότητες των επιμέρους συναρτήσεων;
Εργασία 3	Πηλίκο συναρτήσεων	ΟΛΟΙ	Τι ιδιότητες αποκτά το πηλίκο δυο συναρτήσεων και πώς αυτές συνδέονται με τις ιδιότητες των επιμέρους συναρτήσεων;
Εργασία 4	Σύνθεση συναρτήσεων	ΟΛΟΙ	Τι ιδιότητες αποκτά το γινόμενο δυο συναρτήσεων και πώς αυτές συνδέονται με τις ιδιότητες των επιμέρους συναρτήσεων;

3.5.4 Θέμα 1: Άθροισμα συναρτήσεων

Στην επιφάνεια εργασίας του παρακάτω μικρόκοσμου έχουν σχεδιαστεί οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = \kappa \cdot x + \lambda$, $g(x) = \alpha \cdot x^2 + \beta$ και $h(x)$ που είναι το άθροισμα αυτών. Μπορείτε να ερευνήσετε για τις ιδιότητες της συνάρτησης άθροισμα $h(x)$ που οφείλονται στις ιδιότητες της των $f(x)$ και $g(x)$;

ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΕΙΣ

1. Επιλέξτε για το $\kappa=1$, $\lambda=0$ και για το $\alpha=1$.
 - Τι αλλάζει στην συνάρτηση $h(x)$ καθώς μεταβάλλετε τον συντελεστή β ;
 - Τι αλλάζει στην συνάρτηση $h(x)$ καθώς μεταβάλλετε τον συντελεστή ν ;
 - Ποιές από τις ιδιότητες της $g(x)$ διατηρεί η $h(x)$
2. Επιλέξτε για το $\kappa=1$, $\alpha=1$, $\beta=-2$ και $\nu=4$. Τι αλλάζει στην συνάρτηση $h(x)$ καθώς μεταβάλλετε τον συντελεστή λ ; Ποιές από τις ιδιότητες της $g(x)$ διατηρεί η $h(x)$;
3. Επιλέξτε για το $\lambda=0$, $\alpha=1$, $\beta=0$ και $\nu=-1$. Τι αλλάζει στην συνάρτηση $h(x)$ καθώς μεταβάλλετε τον συντελεστή κ ; Ποιές από τις ιδιότητες της $g(x)$ διατηρεί η $h(x)$;
4. Με την εντολή Μετονομασία επανακαθορίστε τον τύπο της συνάρτησης $f(x)$ στην $f(x) = \kappa \cdot x^2 + \lambda$; Στη συνέχεια επαναλάβετε τις προηγούμενες διερευνήσεις. Ποιές ιδιότητες της $f(x)$ επιδρούν στη συνάρτηση άθροισμα $h(x)$;

Ανακεφαλαίωση: Συζητήστε με τους μαθητές σας στην τάξη σας για τα αποτελέσματα των διερευνήσεων που κάνατε. Ζητήστε τους να περιγράψουν πώς μεταβάλλονται οι ιδιότητες της συνάρτησης $h(x)$ για τις διάφορες μεταβολές των συναρτήσεων $f(x)$ και $g(x)$ που επιλέξατε. Ζητήστε τους να δώσουν μια εξήγηση (αν είναι δυνατόν και αλγεβρική) για τον τρόπο που οι ιδιότητες της συνάρτησης $h(x)$ εξαρτώνται από τις ιδιότητες των συναρτήσεων $f(x)$ και $g(x)$ που προσθέσατε.

ΟΔΗΓΙΕΣ ΠΡΟΣ ΤΟΝ ΔΙΔΑΣΚΟΝΤΑ

Για τη διαχείριση των εργαλείων του μικρόκοσμου

Ζητήστε από τους μαθητές:

- Να κινούν τον κάθε μεταβολέα κατάλληλα ώστε να ορίσουν ακριβώς την εξίσωση της συνάρτησης.
- Να μετακινούν τους μεταβολείς ώστε να μεταβάλλουν τη μια ή την άλλη συνάρτηση.
- Να επαναπροσδιορίζουν τα χαρακτηριστικά (Ιδιότητες) των μεταβολέων για να μπορούν να επαναπροσδιορίσουν το πεδίο ορισμού.

Για τις διερευνήσεις

Ζητήστε από τους μαθητές να παρατηρούν, να προβλέπουν, να ελέγχουν και να εκφράζουν στην ομάδα τους και στην τάξη:

- Για το γράφημα:
 - ✓ Τη μορφή του γραφήματος που ορίζεται από τις τιμές των παραμέτρων κάθε συνάρτησης.

- ✓ Τι συμβαίνει στο γράφημα όταν επιλέγουν συγκεκριμένες τιμές σε μερικές παραμέτρους.
- ✓ Πώς ορίζεται σε κάθε περίπτωση το γράφημα της συνάρτησης άθροισμα.

Για τις απαντήσεις

Ζητήστε από τους μαθητές να εκφράσουν στην τάξη τις απαντήσεις τους. Είναι πιθανόν οι μαθητές να δώσουν απαντήσεις όπως οι παρακάτω:

Διερεύνηση 1

Αναμένεται να απαντήσουν ότι η συνάρτηση $h(x)$ έχει την παρόμοια μορφή με την $g(x)$ και μεταβάλλεται προς την ίδια κατεύθυνση με αυτήν.

Διερεύνηση 2

Αναμένεται να απαντήσουν ότι η συνάρτηση $h(x)$ μετακινείται κατακόρυφα ανάλογα με την μεταβολή των τιμών του συντελεστή λ και την παράλληλη μεταφορά της $f(x)$.

Διερεύνηση 3

Ο συντελεστής κ ορίζει τον συντελεστή διεύθυνσης της $f(x)$ και την μεταβάλλει ανάλογα με τον τρόπο που αυτός μεταβάλλεται. Η μεταβολή του κ μεταβάλλει ανάλογα και την συνάρτηση $h(x)$ με τέτοιο τρόπο ώστε οι κλάδοι της να παραμένουν πολύ κοντά στην $f(x)$ (η $f(x)$ είναι ασύμπτωτη της $h(x)$).

Διερεύνηση 4

Αναμένεται να απαντήσουν ότι ένας κλάδος της $h(x)$ έχει την ίδια μορφή με την $f(x)$ και στις αλλαγές συμπεριφέρεται ανάλογα. Στις μεταβολές του ν ισχύουν ανάλογα με την διερεύνηση 1 συμπεράσματα.

Οι επαληθεύσεις των παραπάνω αποτελεσμάτων δεν είναι εύκολο να γίνουν με τη βοήθεια της αλγεβρικής παράστασης της συνάρτησης. Ωστόσο κάποιες από τις οπτικές παρατηρήσεις μπορούν να συνδεθούν με την αλγεβρική εξίσωση των τριών συναρτήσεων είτε τώρα είτε στο μέλλον. Ακόμα ο εκπαιδευτικός μπορεί μαζί με τους μαθητές του να εξετάσει περισσότερο λεπτόκοκες μεταβολές στη συνάρτηση άθροισμα $h(x)$ που προκύπτουν από τις μεταβολές των δυο συναρτήσεων προσθετέων.

Τα παραπάνω ερωτήματα είναι ενδεικτικά και ανάλογα με το επίπεδο και τις ανάγκες των μαθητών ο εκπαιδευτικός μπορεί να θέσει δικά του απλούστερα ερωτήματα, εξετάζοντας για παράδειγμα το άθροισμα δυο γραμμικών ή δυο τετραγωνικών ή μιας γραμμικής και μιας τετραγωνικής συνάρτησης. Σε κάθε περίπτωση αυτό που ενδιαφέρει είναι η οπτική αναγνώριση ιδιοτήτων της μιας ή της άλλης συνάρτησης που εμφανίζονται και στη συνάρτηση άθροισμα.

3.5.5 Θέμα 2: Γινόμενο συναρτήσεων

Στην επιφάνεια εργασίας του παρακάτω μικρόκοσμου έχουν σχεδιαστεί οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = \kappa \cdot x + \lambda$, $g(x) = \alpha \cdot x^n + \beta$ και $h(x)$ που είναι το γινόμενο αυτών. Μπορείτε να ερευνήσετε για τις ιδιότητες της συνάρτησης γινόμενο $h(x)$ και πώς επηρεάζεται από τις ιδιότητες της των $f(x)$ και $g(x)$;

ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΕΙΣ

1. Επιλέξτε για το $\kappa=1$, $\lambda=0$ και για το $\alpha=1$. Τι αλλάζει στην συνάρτηση $h(x)$ καθώς μεταβάλλετε τον συντελεστή β ; Πώς επιδρούν οι αλλαγές της $g(x)$ στις ιδιότητες της $h(x)$;
2. Επιλέξτε για το $\kappa=1$, $\alpha=1$, $\beta=-2$ και $n=4$. Τι αλλάζει στην συνάρτηση $h(x)$ καθώς μεταβάλλετε τον συντελεστή λ ; Ποιές από τις ιδιότητες της $g(x)$ διατηρεί η $h(x)$;
3. Επιλέξτε για το $\lambda=0$, $\alpha=1$, $\beta=0$ και $n=-1$. Τι αλλάζει στην συνάρτηση $h(x)$ καθώς μεταβάλλετε τον συντελεστή κ ; Πώς εξηγούνται οι μεταβολές αυτές;
4. Με την εντολή «Μετονομασία» επανακαθορίστε τον τύπο της συνάρτησης $f(x)$ στην $f(x) = \kappa \cdot x^2 + \lambda$; Στη συνέχεια επαναλάβετε τις προηγούμενες διερευνήσεις. Πώς μεταβάλλεται το γράφημα της συνάρτησης γινόμενο $h(x)$, σε σχέση με τις μεταβολές στα γραφήματα των $f(x)$ και $g(x)$;

Ανακεφαλαίωση: Συζητήστε με τους μαθητές σας στην τάξη σας για τα αποτελέσματα των διερευνήσεων που κάνατε. Ζητήστε τους να περιγράψουν πώς μεταβάλλονται οι ιδιότητες της συνάρτησης $h(x)$ για τις διάφορες μεταβολές των συναρτήσεων $f(x)$ και $g(x)$ που επιλέξατε. Ζητήστε τους να δώσουν μια εξήγηση (αν είναι δυνατόν και αλγεβρική) για τον τρόπο που οι ιδιότητες της συνάρτησης $h(x)$ εξαρτώνται από τις ιδιότητες των συναρτήσεων $f(x)$ και $g(x)$ που προσθέσατε.

ΟΔΗΓΙΕΣ ΠΡΟΣ ΤΟΝ ΔΙΔΑΣΚΟΝΤΑ

Για τη διαχείριση των εργαλείων του μικρόκοσμου

Ζητήστε από τους μαθητές:

- Να κινούν τον κάθε μεταβολέα κατάλληλα ώστε να ορίσουν ακριβώς την εξίσωση της συνάρτησης.
- Να μετακινούν τους μεταβολείς ώστε να μεταβάλλουν τη μια ή την άλλη συνάρτηση.
- Να επαναπροσδιορίζουν τα χαρακτηριστικά (Ιδιότητες) των μεταβολέων για να μπορούν να επαναπροσδιορίζουν το πεδίο ορισμού.

Για τις διερευνήσεις

Ζητήστε από τους μαθητές να παρατηρούν, να προβλέπουν, να ελέγχουν και να εκφράζουν στην ομάδα τους και στην τάξη:

- Για το γράφημα:

- ✓ Τη μορφή του γραφήματος που ορίζεται από τις τιμές των παραμέτρων κάθε συνάρτησης.
- ✓ Τι συμβαίνει στο γράφημα όταν επιλέγουν συγκεκριμένες τιμές σε μερικές παραμέτρους.
- ✓ Πώς ορίζεται σε κάθε περίπτωση το γράφημα της συνάρτησης γινόμενο.

Για τις απαντήσεις

Ζητήστε από τους μαθητές να εκφράσουν στην τάξη τις απαντήσεις τους. Είναι πιθανόν οι μαθητές να δώσουν απαντήσεις όπως οι παρακάτω:

Διερεύνηση 1

Αναμένεται να εξετάσουν τη συνάρτηση γινόμενο για διάφορες τιμές της παραμέτρου n . Οι απαντήσεις τους για τη μορφή και τις ιδιότητες της γραφικής παράστασης της $h(x)$ που συνδέονται στενά με τις ιδιότητες και τη μορφή των επιμέρους συναρτήσεων αναμένεται να περιγράφουν στο πώς μεταβάλλεται το ακρότατο της σε σχέση με αυτό της $g(x)$ και μάλιστα ότι μεταβάλλεται προς την ίδια κατεύθυνση με αυτήν.

Διερεύνηση 2:

Αναμένεται να απαντήσουν ότι η μορφή της συνάρτησης $h(x)$ μεταβάλλεται σε σχέση με τις μεταβολές της συνάρτησης $f(x)$ και αφορούν κυρίως μεταβολές στο πόσο κλειστή ή ανοικτή είναι (καμπυλότητα) και πώς μεταβάλλονται τα δυο τοπικά ακρότατα.

Διερεύνηση 3

Σ' αυτή την περίπτωση η συνάρτηση γινόμενο είναι σταθερή και οι τιμές του συντελεστή k προσδιορίζουν και τη συνάρτηση γινόμενο.

Διερεύνηση 4

Αναμένεται να απαντήσουν η $h(x)$ είναι γραμμική και έχει συντελεστή θετικό ή αρνητικό ανάλογα με το πρόσημο της τιμής της παραμέτρου k .

Οι επαληθεύσεις των παραπάνω αποτελεσμάτων δεν είναι πάντοτε εύκολο να γίνουν με τη βοήθεια της αλγεβρικής παράστασης της συνάρτησης. Ωστόσο κάποιες από τις οπτικές παρατηρήσεις μπορούν να συνδεθούν με την αλγεβρική εξίσωση των τριών συναρτήσεων είτε τώρα είτε στο μέλλον.

Τα παραπάνω ερωτήματα είναι ενδεικτικά και ανάλογα με το επίπεδο και τις ανάγκες των μαθητών ο εκπαιδευτικός μπορεί να θέσει δικά του απλούστερα ερωτήματα, εξετάζοντας για παράδειγμα το άθροισμα δυο γραμμικών ή δυο τετραγωνικών ή μιας γραμμικής και μιας τετραγωνικής συνάρτησης. Σε κάθε περίπτωση αυτό που ενδιαφέρει είναι η οπτική αναγνώριση ιδιοτήτων της μιας ή της άλλης συνάρτησης που εμφανίζονται και στη συνάρτηση άθροισμα.

3.5.6 ΘΕΜΑ 3: Πηλίκο δυο συναρτήσεων

Στην επιφάνεια εργασίας του παρακάτω μικρόκοσμου έχουν σχεδιαστεί οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = \kappa \cdot x + \lambda$, $g(x) = a \cdot x^n + \beta$ και $h(x)$ που είναι το πηλίκο αυτών. Μπορείτε να ερευνήσετε για τις ιδιότητες της συνάρτησης πηλίκο $h(x)$ και πώς επηρεάζονται από τις ιδιότητες της των $f(x)$ και $g(x)$;

ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΕΙΣ

1. Επιλέξτε για το $\kappa=1$, $\lambda=0$ και για το $a=1$. Τι αλλάζει στην συνάρτηση $h(x)$ καθώς μεταβάλλετε τον συντελεστή β ; Πώς επιδρούν οι αλλαγές της $g(x)$ στις ιδιότητες της $h(x)$;
2. Επιλέξτε για το $\kappa=1$, $a=1$, $\beta=-1$ και $n=2$. Τι αλλάζει στην συνάρτηση $h(x)$ καθώς μεταβάλλετε τον συντελεστή λ ; Πώς επιδρούν οι αλλαγές της $f(x)$ στις ιδιότητες της $h(x)$;
3. Επιλέξτε για το $\lambda=0$, $a=1$, $\beta=0$ και $n=-1$. Τι αλλάζει στην συνάρτηση $h(x)$ καθώς μεταβάλλετε τον συντελεστή κ ; Πώς εξηγούνται οι μεταβολές αυτές;
4. Με την εντολή «Μετονομασία» επανακαθορίστε τον τύπο της συνάρτησης $f(x)$ στην $f(x) = \kappa \cdot x^2 + \lambda$; Στη συνέχεια επαναλάβετε τις προηγούμενες διερευνήσεις. Πώς μεταβάλλεται το γράφημα της συνάρτησης γινόμενο $h(x)$, σε σχέση με τις μεταβολές στα γραφήματα των $f(x)$ και $g(x)$;

Ανακεφαλαίωση: Συζητήστε στην τάξη σας για τα αποτελέσματα των διερευνήσεων που κάνατε. Περιγράψτε πώς μεταβάλλονται οι ιδιότητες της συνάρτησης $h(x)$ για τις διάφορες μεταβολές των συναρτήσεων $f(x)$ και $g(x)$ που επιλέξατε. Δώστε μια εξήγηση (αν είναι δυνατόν και αλγεβρική) για τον τρόπο που οι ιδιότητες της συνάρτησης $h(x)$ εξαρτώνται από τις ιδιότητες των συναρτήσεων $f(x)$ και $g(x)$ που πολλαπλασιάσατε.

ΟΔΗΓΙΕΣ ΠΡΟΣ ΤΟΝ ΔΙΔΑΣΚΟΝΤΑ

Για τη διαχείριση των εργαλείων του μικρόκοσμου

Ζητήστε από τους μαθητές:

- Να κινούν τον κάθε μεταβολέα κατάλληλα ώστε να ορίσουν ακριβώς την εξίσωση της συνάρτησης.
- Να μετακινούν τους μεταβολείς ώστε να μεταβάλλουν τη μια ή την άλλη συνάρτηση.
- Να επαναπροσδιορίζουν τα χαρακτηριστικά (Ιδιότητες) των μεταβολέων για να μπορούν να επαναπροσδιορίζουν το πεδίο ορισμού.

ΓΙΑ ΤΙΣ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΕΙΣ

Ζητήστε από τους μαθητές να παρατηρούν, να προβλέπουν, να ελέγχουν και να εκφράζουν στην ομάδα τους και στην τάξη:

- Για το γράφημα:
 - ✓ Τη μορφή του γραφήματος που ορίζεται από τις τιμές των παραμέτρων κάθε συνάρτησης.

- ✓ Τι συμβαίνει στο γράφημα όταν επιλέγουν συγκεκριμένες τιμές σε μερικές παραμέτρους.
- ✓ Πώς ορίζεται σε κάθε περίπτωση το γράφημα της συνάρτησης πηλίκου.

ΓΙΑ ΤΙΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

Ζητήστε από τους μαθητές να εκφράσουν στην τάξη τις απαντήσεις τους. Είναι πιθανόν οι μαθητές να δώσουν απαντήσεις όπως οι παρακάτω:

Διερεύνηση 1

Αναμένεται να εξετάσουν τη συνάρτηση πηλίκου για διάφορες τιμές της παραμέτρου v . Οι απαντήσεις τους για τη μορφή και τις ιδιότητες της γραφικής παράστασης της $h(x)$ που συνδέονται στενά με τις ιδιότητες και τη μορφή των επιμέρους συναρτήσεων αναμένεται να περιγράφουν τις αλλαγές στη μορφή της. Π.χ. για $v=2$ άλλη μορφή έχει όταν ο συντελεστής β έχει θετικές τιμές – ένας κλάδος – και άλλη όταν έχει αρνητικές τιμές – έχει δυο ή περισσότερους κλάδους. Ακόμα σε κάθε περίπτωση οι μαθητές αναμένεται να περιγράφουν το πώς μεταβάλλεται η μορφή της, η καμπυλότητά της, η μονοτονία της τα ακρότατά της σε σχέση με της μεταβολές της $g(x)$ και μάλιστα ότι μεταβάλλεται προς την ίδια κατεύθυνση με αυτήν.

Διερεύνηση 2

Αναμένεται να απαντήσουν ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $h(x)$ αποτελείται από τρεις κλάδους οι οποίοι απομακρύνονται μεταξύ τους και από την αρχή των αξόνων όταν μεταβάλλονται οι τιμές του συντελεστή λ της $f(x)$ προς αρνητικές ή προς θετικές τιμές.

Διερεύνηση 3

Σ' αυτή την περίπτωση η συνάρτηση πηλίκου είναι μια τετραγωνική συνάρτηση της μορφής kx^2 και υπακούει στις αλλαγές της καμπυλότητας και της μονοτονίας σε σχέση με τις αλλαγές του συντελεστή k .

Διερεύνηση 4

Οι απαντήσεις που θα δώσουν αναμένεται να είναι ανάλογες με των προηγούμενων. Μάλιστα, στην περίπτωση της επανάληψης της πρώτης διερεύνησης η συνάρτηση $h(x)$ αλλάζει μορφή κατά περίεργο τρόπο με την έννοια ότι ενώ στις μικρές τιμές του β εμφανίζονται δυο κλάδοι όταν οι τιμές της μεγαλώσουν η μορφή της εμφανίζεται ως παραβολή. Τέτοια φαινόμενα μπορούν να διερευνηθούν (1) κάνοντας μεγέθυνση σε μια περιοχή της καμπύλης ή (2) με τη βοήθεια της άλγεβρας.

Οι επαληθεύσεις των παραπάνω αποτελεσμάτων δεν είναι πάντοτε εύκολο να γίνουν με τη βοήθεια της αλγεβρικής παράστασης της συνάρτησης. Ωστόσο κάποιες από τις οπτικές παρατηρήσεις μπορούν να συνδεθούν με την αλγεβρική εξίσωση των τριών συναρτήσεων είτε τώρα είτε στο μέλλον με ενδιαφέροντες τρόπους.

Τα παραπάνω ερωτήματα είναι ενδεικτικά και ανάλογα με το επίπεδο και τις ανάγκες των μαθητών ο εκπαιδευτικός μπορεί να θέσει δικά του απλούστερα ερωτήματα, εξετάζοντας για παράδειγμα το άθροισμα δυο γραμμικών ή δυο τετραγωνικών ή μιας γραμμικής και μιας τετραγωνικής συνάρτησης. Σε κάθε περίπτωση αυτό που ενδιαφέρει είναι η οπτική αναγνώριση ιδιοτήτων της μιας ή της άλλης συνάρτησης που εμφανίζονται και στη συνάρτηση άθροισμα.

3.5.7 ΘΕΜΑ 4: Σύνθεση δυο συναρτήσεων

Στην επιφάνεια εργασίας του παρακάτω μικρόκοσμου έχουν σχεδιαστεί οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = \kappa \cdot x + \lambda$, $g(x) = a \cdot x^n + \beta$ και $h(x)$ που είναι η σύνθεση $f(g(x))$ αυτών. Μπορείτε να ερευνήσετε για τις ιδιότητες της συνάρτησης $h(x)$ και πώς επηρεάζονται από τις ιδιότητες της των $f(x)$ και $g(x)$;

ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΕΙΣ

1. Επιλέξτε για το $\kappa=1$, $\lambda=0$ και για το $a=1$. Τι αλλάζει στην συνάρτηση $h(x)$ καθώς μεταβάλλετε τον συντελεστή β ; Ποιές από τις ιδιότητες της $g(x)$ διατηρεί η $h(x)$;
2. Επιλέξτε για το $\kappa=1$, $a=1$, $\beta=-2$ και $n=4$. Τι αλλάζει στην συνάρτηση $h(x)$ καθώς μεταβάλλετε τον συντελεστή λ ; Ποιές από τις ιδιότητες της $g(x)$ διατηρεί η $h(x)$;
3. Επιλέξτε για το $\lambda=0$, $a=1$, $\beta=0$ και $n=-1$. Τι αλλάζει στην συνάρτηση $h(x)$ καθώς μεταβάλλετε τον συντελεστή κ ; Ποιές από τις ιδιότητες της $g(x)$ διατηρεί η $h(x)$;
4. Με την εντολή Μετονομασία επανακαθορίστε τον τύπο της συνάρτησης $f(x)$ στην $f(x) = \kappa \cdot x^2 + \lambda$; Στη συνέχεια επαναλάβετε τις προηγούμενες διερευνήσεις. Ποιές ιδιότητες της $f(x)$ επιδρούν στη συνάρτηση σύνθεση $h(x)=f(g(x))$;

Ανακεφαλαίωση: Συζητήστε στην τάξη σας για τα αποτελέσματα των διερευνήσεων που κάνατε. Περιγράψτε πώς μεταβάλλονται οι ιδιότητες της συνάρτησης $h(x)$ για τις διάφορες μεταβολές των συναρτήσεων $f(x)$ και $g(x)$ που επιλέξατε. Δώστε μια εξήγηση (αν είναι δυνατόν και αλγεβρική) για τον τρόπο που οι ιδιότητες της συνάρτησης $h(x)$ εξαρτώνται από τις ιδιότητες των συναρτήσεων $f(x)$ και $g(x)$ που πολλαπλασιάσατε.

ΟΔΗΓΙΕΣ ΠΡΟΣ ΤΟΝ ΔΙΔΑΣΚΟΝΤΑ

Για τη διαχείριση των εργαλείων του μικρόκοσμου

Ζητήστε από τους μαθητές:

- Να κινούν τον κάθε μεταβολέα κατάλληλα ώστε να ορίσουν ακριβώς την εξίσωση της συνάρτησης.
- Να μετακινούν τους μεταβολείς ώστε να μεταβάλλουν τη μια ή την άλλη συνάρτηση.
- Να επαναπροσδιορίζουν τα χαρακτηριστικά (Ιδιότητες) των μεταβολέων για να μπορούν να επαναπροσδιορίσουν το πεδίο ορισμού.

Για τις διερευνήσεις

Ζητήστε από τους μαθητές να παρατηρούν, να προβλέπουν, να ελέγχουν και να εκφράζουν στην ομάδα τους και στην τάξη:

- Για το γράφημα:
 - ✓ Τη μορφή του γραφήματος που ορίζεται από τις τιμές των παραμέτρων κάθε συνάρτησης.

- ✓ Τι συμβαίνει στο γράφημα όταν επιλέγουν συγκεκριμένες τιμές σε μερικές παραμέτρους.
- ✓ Πώς ορίζεται σε κάθε περίπτωση το γράφημα της συνάρτησης πηλίκου.

Για τις απαντήσεις

Ζητήστε από τους μαθητές να εκφράσουν στην τάξη τις απαντήσεις τους. Είναι πιθανόν οι μαθητές να δώσουν απαντήσεις όπως οι παρακάτω:

Διερεύνηση 1

Αναμένεται να απαντήσουν ότι η σύνθεση των δυο συναρτήσεων θα είναι η ίδια με τη συνάρτηση $g(x)$ καθώς η $f(x)$ είναι ίση με x και δε επηρεάζει την σύνθεση.

Διερεύνηση 2

Αναμένεται να απαντήσουν ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $h(x)$ μεταβάλλεται ανάλογα με τη μεταβολή της παραμέτρου λ της $f(x)$ αλλά σε κάθε περίπτωση έχει την ίδια μορφή.

Διερεύνηση 3

Σ' αυτή την περίπτωση η συνάρτηση $h(x)$ μεταβάλλεται ανάλογα με τις αλλαγές του συντελεστή k της συνάρτησης $f(x)$.

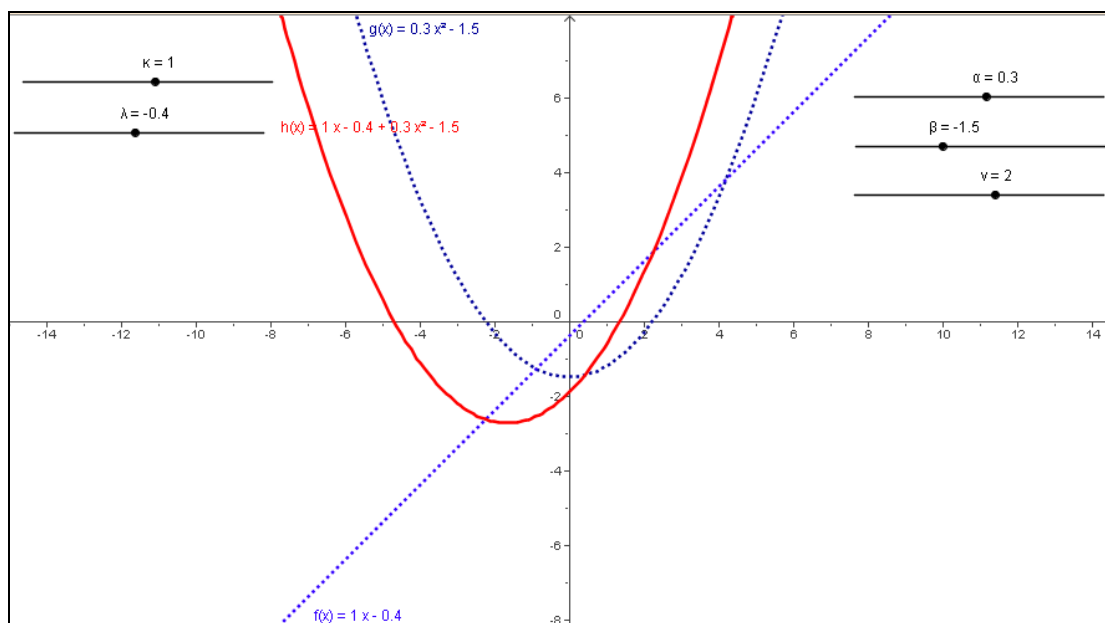
Διερεύνηση 4

Οι απαντήσεις που θα δώσουν αναμένεται να είναι ανάλογες με των προηγούμενων. Μάλιστα, στην περίπτωση της επανάληψης της πρώτης διερεύνησης η συνάρτηση $h(x)$ αλλάζει μορφή κατά τον εξής τρόπο: Οι δυο κλάδοι της εμφανίζουν συμμετρική μορφή όταν οι τιμές του β είναι αντίθετες.

Οι επαληθεύσεις των παραπάνω αποτελεσμάτων δεν είναι πάντοτε εύκολο να γίνουν με τη βοήθεια της αλγεβρικής παράστασης της συνάρτησης. Ωστόσο κάποιες από τις οπτικές παρατηρήσεις μπορούν να συνδεθούν με την αλγεβρική εξίσωση των τριών συναρτήσεων είτε τώρα είτε στο μέλλον με ενδιαφέροντες τρόπους.

Τα παραπάνω ερωτήματα είναι ενδεικτικά και ανάλογα με το επίπεδο και τις ανάγκες των μαθητών ο εκπαιδευτικός μπορεί να θέσει δικά του απλούστερα ερωτήματα, εξετάζοντας για παράδειγμα το άθροισμα δυο γραμμικών ή δυο τετραγωνικών ή μιας γραμμικής και μιας τετραγωνικής συνάρτησης. Σε κάθε περίπτωση αυτό που ενδιαφέρει είναι η οπτική αναγνώριση ιδιοτήτων της μιας ή της άλλης συνάρτησης που εμφανίζονται και στη συνάρτηση άθροισμα.

3.6 ΣΕΝΑΡΙΟ 6 : Ιδιότητες των συναρτήσεων



3.6.1 Η κεντρική ιδέα του σεναρίου

Στο σενάριο αυτό οι μαθητές καλούνται να διερευνήσουν και να μελετήσουν μερικές από τις βασικές ιδιότητες των συναρτήσεων, δηλαδή τη μονοτονία και τα ακρότατα των πολυωνυμικών και τριγωνομετρικών συναρτήσεων, την 1-1 συνάρτηση και την αντίστροφη συνάρτηση. Σε κάθε περίπτωση οι μαθητές καλούνται να διερευνήσουν τις συγκεκριμένες ιδιότητες σε συγκεκριμένες οικογένειες συναρτήσεων επιλέγοντας κάθε φορά συγκεκριμένες τιμές για τις παραμέτρους αυτών. Έτσι έχουν την ευκαιρία να καταλήγουν σε συμπεράσματα για τις ιδιότητες αυτές που αφορούν οικογένειες συναρτήσεων.

Πιο συγκεκριμένα, οι μαθητές, μπορούν να επιλέγουν συγκεκριμένες συναρτήσεις από μια οικογένεια με τη βοήθεια των μεταβολών που ορίζουν τιμές για τους συντελεστές τους και στη συνέχεια να διερευνούν για τη μονοτονία και τα ακρότατα αυτής ή για το αν είναι 1-1 ή αν έχει αντίστροφη και τι άλλες ιδιότητες προκύπτουν. Η αλγεβρική εξήγηση είναι το επόμενο βήμα αυτής της διερεύνησης με το οποίο ολοκληρώνεται η κάθε δραστηριότητα..

3.6.2 Στόχοι

- Να αποκτήσουν εμπειρίες σχετικές με τις συγκεκριμένες ιδιότητες των συναρτήσεων.
- Να αποκτήσουν εμπειρίες για το ρόλο των συντελεστών των συναρτήσεων στον καθορισμό των ιδιοτήτων της.
- Να εκφράζουν ποιοτικά χαρακτηριστικά της συνάρτησης σε σχέση με τις ιδιότητες αυτής.

3.6.3 Διδακτική πρόταση

ΟΡΓΑΝΩΣΗ ΤΗΣ ΤΑΞΗΣ

Οι δραστηριότητες αυτές ενδείκνυται να διδάσκονται στο εργαστήριο υπολογιστών και οι μαθητές να εργάζονται σε ομάδες 2-3 ατόμων με φύλλο εργασίας. Μπορούν όμως να διεξαχθούν και στην τάξη που έχει μόνο ένα υπολογιστή με βιντεοπροβολέα. Σ' αυτή την περίπτωση οι μαθητές συμπληρώνουν τα φύλλα εργασίας με βάση τις παρατηρήσεις που κάνουν κατά την διερεύνηση που γίνεται απ' όλη την τάξη και κατευθύνεται από τον εκπαιδευτικό ή κάποιον μαθητή. Στο πλαίσιο αυτό κάνουν παρεμβάσεις στην διερεύνηση με τις οποίες εκφράζουν την δική τους στρατηγική στη διερεύνηση. Καθώς τέτοιες παρεμβάσεις μπορούν να γίνονται στην τάξη απ' όλους τους μαθητές ο διδάσκων πρέπει να τις υποστηρίζει και να επιδιώκει να συζητούνται όλες οι πιθανές στρατηγικές της διερεύνησης.

Σε κάθε περίπτωση ο εκπαιδευτικός πρέπει να έχει από πριν προετοιμάσει τον τρόπο που θα χειριστεί τις διαφορετικές στρατηγικές που πιθανόν να διατυπωθούν καθώς και τις πιθανές εκβάσεις τους.

Έτσι πρέπει με τη στάση του να προκαλεί την εφαρμογή των διαφορετικών τρόπων διερεύνησης, να ενθαρρύνει κάθε μαθητή να δοκιμάζει τις ιδέες του, να εκφράζει τις εικασίες του και να διατυπώνει τα συμπεράσματά του ελεύθερα.

ΟΙ ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΕΣ ΔΥΝΑΤΟΤΗΤΕΣ ΤΟΥ ΣΕΝΑΡΙΟΥ

Οι προτεινόμενες στο σενάριο δραστηριότητες αφορούν φαινόμενα τα οποία προκαλούνται από την δράση των μαθητών σε προσχεδιασμένους υπολογιστικούς μικρόκοσμους με σκοπό την ανάδειξη μερικών ιδιοτήτων τους. Έτσι οι απαντήσεις στα ερωτήματα που τίθενται στο πλαίσιο αυτών των διερευνήσεων αλλά και αυτών που ο διδάσκων ή οι ίδιοι οι μαθητές μπορούν να θέσουν είναι δυνατόν να αποτελέσουν ένα περιβάλλον απόκτησης και έκφρασης εμπειριών σχετικών με τον προσδιορισμό των ιδιοτήτων μιας συνάρτησης καθώς και με τη σχέση που έχει αυτή με την μορφή της και τις τιμές των συντελεστών της. Τα εργαλεία που έχουν ενσωματωθεί στους μικρόκοσμους δίνουν την δυνατότητα στους μαθητές,

- να κάνουν πειράματα με τον προσδιορισμό των συναρτήσεων που προκύπτουν άμεσα από συγκεκριμένες οικογένειες προκειμένου να διερευνήσουν ή και να ορίσουν μια ιδιότητα αυτών,
- να παρατηρούν και να ερμηνεύουν τα αποτελέσματα των χειρισμών τους,
- να εκφράζουν εικασίες, να κάνουν γενικεύσεις, να διατυπώνουν υποθέσεις και θεωρήματα και να τα εκφράζουν με μαθηματικούς όρους.
- να λύνουν προβλήματα αλγεβρικού προσδιορισμού των ιδιοτήτων μιας συνάρτησης με τη βοήθεια των εμπειριών από την οπτική διαπραγμάτευση αυτών.

Ακόμα, μπορούν να επεμβαίνουν και να επαναπροσδιορίζουν τις δυνατότητες των εργαλείων ή να επαναδιατυπώνουν τον τρόπο ορισμού των αντικειμένων και να μεταβάλλουν την εμφάνισή τους. Από αυτή την άποψη οι μικρόκοσμοι είναι επαναχρησιμοποιήσιμοι και δίνουν τη δυνατότητα στους χρήστες να διατυπώνουν και νέα ερωτήματα που αφορούν ιδιαίτερες γνωστικές πτυχές των μαθηματικών αντικειμένων.

ΠΟΡΕΙΑ ΤΗΣ ΕΦΑΡΜΟΓΗΣ ΤΟΥ ΣΕΝΑΡΙΟΥ

Το σενάριο αποτελείται από τέσσερις εργασίες. Στην πρώτη, οι μαθητές διαπραγματεύονται την μονοτονία των πολυωνυμικών συναρτήσεων και $f(x)=a \cdot x^y + b$. Στη δεύτερη, οι μαθητές διαπραγματεύονται τη μονοτονία των τριγωνομετρικών συναρτήσεων $f(x)=a \cdot \sin(b \cdot x + \gamma) + \delta$. Στην τρίτη, διερευνάται η ιδιότητα 1-1 των πολυωνυμικών συναρτήσεων $f(x)=a \cdot x^y + b$ και στην τέταρτη, μελετάται η ύπαρξη, η μορφή και οι ιδιαίτερες ιδιότητες της αντίστροφης των πολυωνυμικών συναρτήσεων $f(x)=a \cdot x^y + b$.

Η εμπλοκή των μαθητών με κάθε μια δραστηριότητα αναμένεται να αναδείξει:

- Τον ρόλο της κάθε συνάρτησης στον προσδιορισμό της κάθε ιδιότητας.
- Τον ρόλο των συντελεστών της κάθε εξίσωσης στον καθορισμό των ιδιοτήτων της.

Ο εκπαιδευτικός μπορεί να ζητά από τους μαθητές να επαληθεύουν αλγεβρικά τα συμπεράσματά τους σε κάθε περίπτωση.

ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

Εργασία	Περιγραφή	Τμήμα εφαρμογής	Περιεχόμενο
Εργασία 1	Μονοτονία – ακρότατα πολυωνυμικών	ΟΛΟΙ	Διερευνήσεις για τον τρόπο μεταβολής των τιμών των πολυωνυμικών συναρτήσεων
Εργασία 2	Μονοτονία – ακρότατα τριγωνομετρικών συναρτήσεων	ΟΛΟΙ	Διερευνήσεις για τον τρόπο μεταβολής των τιμών των τριγωνομετρικών συναρτήσεων
Εργασία 3	1-1 συνάρτηση	ΟΛΟΙ	Διερευνήσεις για την ιδιότητα της 1-1 συνάρτησης
Εργασία 4	Αντίστροφη συνάρτηση	ΟΛΟΙ	Διερευνήσεις για τον ορισμό της αντίστροφης συνάρτησης

3.6.4 Θέμα 1: Η μονοτονία πολυωνυμικής συνάρτησης

Στην επιφάνεια εργασίας του παρακάτω μικρόκοσμου έχει σχεδιαστεί η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = a \cdot x^n + b$. Μπορείτε να ερευνήσετε για τον τρόπο που μεταβάλλονται οι τιμές της συνάρτησης;

ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΕΙΣ

1. Επιλέξτε ο δείκτης του μεταβολέα του n να δείχνει 2 και οι δείκτες των $a=1$ και $b=-2$. Μπορείτε να περιγράψετε πώς μεταβάλλονται οι τιμές της συνάρτησης όταν το σημείο A κινείται προς μεγαλύτερες τιμές; Ποια είναι η μικρότερη τιμή της συνάρτησης;
2. Επιλέξτε $a=1$, $b=-2$ και $n=3$. Πώς μεταβάλλονται οι τιμές της συνάρτησης όταν μεταβάλλονται οι τιμές της μεταβλητής x ; Υπάρχει ελάχιστη ή μέγιστη τιμή; Μπορείτε να αποδείξετε την ισχύ των παρατηρήσεών σας;
3. Επιλέξτε $a=1$, $b=0$ και $n=-1$. Πώς μεταβάλλονται οι τιμές της συνάρτησης όταν αυξάνονται οι τιμές της μεταβλητής x ; Υπάρχει ελάχιστη ή μέγιστη τιμή; Πώς μεταβάλλονται οι τιμές της συνάρτησης όταν οι τιμές της ανεξάρτητης μεταβλητής μειώνονται; Μπορείτε να αποδείξετε την ισχύ των παρατηρήσεών σας;
4. Επιλέξτε διάφορες τιμές για τους τρεις συντελεστές a , b και n της συνάρτησης. Μπορείτε να περιγράψετε σε ποιές περιπτώσεις η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα και σε ποιές περιπτώσεις είναι φθίνουσα σε όλο το πεδίο ορισμού του; Μπορείτε να περιγράψετε σε ποιές περιπτώσεις η συνάρτηση είναι κατά διαστήματα γνησίως αύξουσα και φθίνουσα; Μπορείτε να περιγράψετε σε ποιές περιπτώσεις η συνάρτηση έχει ελάχιστη και σε ποιές μέγιστη τιμή; Μπορείτε να αποδείξετε την ισχύ των παρατηρήσεών σας;

Ανακεφαλαίωση: Συζητήστε στην τάξη σας με τους μαθητές σας για τα αποτελέσματα των διερευνήσεων που έκαναν. Ζητήστε τους να περιγράψουν σε ποιές περιπτώσεις οι τιμές της συνάρτησης αυξάνουν και σε ποιές μειώνονται καθώς οι τιμές της μεταβλητής x αυξάνουν ή μειώνονται. Βοηθήστε τους να διατυπώσουν κανόνες για τη μονοτονία των διαφόρων τύπων πολυωνυμικών συναρτήσεων. Ζητήστε τους να περιγράψουν σε ποιές περιπτώσεις μια συνάρτηση έχει ελάχιστη τιμή, σε ποιές μέγιστη και σε ποιές ούτε ελάχιστη ούτε μέγιστη;

ΟΔΗΓΙΕΣ ΠΡΟΣ ΤΟΝ ΔΙΔΑΣΚΟΝΤΑ

ΓΙΑ ΤΗ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗ ΤΩΝ ΕΡΓΑΛΕΙΩΝ ΤΟΥ ΜΙΚΡΟΚΟΣΜΟΥ

Ζητήστε από τους μαθητές:

- Να κινούν τον κάθε μεταβολέα κατάλληλα ώστε να ορίσουν την εξίσωση της συνάρτησης σύμφωνα με την διερεύνηση.
- Να μετακινούν το σημείο A και προς τις δυο κατευθύνσεις και να παρακολουθούν πως μεταβάλλονται τα μήκη AB και BE.
- Να κινούν το σημείο A και να παρατηρούν τον τρόπο μεταβολής των τιμών της ανεξάρτητης μεταβλητής x και των αντίστοιχων τιμών της εξαρτημένης μεταβλητής $f(x)$.

- Να επαναπροσδιορίζουν τα χαρακτηριστικά (ιδιότητες) των μεταβολών για να μπορούν να επαναπροσδιορίζουν την συνάρτηση της οποίας μελετούν την μονοτονία.

ΓΙΑ ΤΙΣ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΕΙΣ

Ζητήστε από τους μαθητές να παρατηρούν, να προβλέπουν, να ελέγχουν και να εκφράζουν στην ομάδα τους και στην τάξη:

- Για το γράφημα:
 - ✓ Τη μορφή του γραφήματος που ορίζεται από τις τιμές των μεταβολών.
 - ✓ Πώς κινείται το σημείο B πάνω στο γράφημα και πώς μεταβάλλονται τα μήκη AB και BE καθώς μετακινούν το σημείο A.
- Για τις μεταβολές των τιμών της συνάρτησης:
 - ✓ Πώς μεταβάλλονται τα μήκη των BA και BE καθώς μετακινούν το σημείο A προς τις μεγαλύτερες τιμές της τετμημένης του x και όταν μετακινούν το A προς τις μικρότερες τιμές της τετμημένης του x.
 - ✓ Πώς μεταβάλλονται οι τιμές της συνάρτησης όταν μετακινούν το σημείο A προς τις μεγαλύτερες τιμές της τετμημένης του x και όταν μετακινούν το A προς τις μικρότερες τιμές της τετμημένης του x.
 - ✓ Τι αλλάζει στις παραπάνω μεταβολές όταν μεταβάλλονται οι συντελεστές της εξίσωσης.
 - ✓ Αν επαληθεύονται τα συμπεράσματά τους και αλγεβρικά.

ΓΙΑ ΤΙΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

Ζητήστε από τους μαθητές να εκφράσουν στην τάξη τις απαντήσεις τους. Είναι πιθανόν οι μαθητές να δώσουν απαντήσεις όπως οι παρακάτω:

Διερεύνηση 1

Αναμένεται να απαντήσουν ότι οι τιμές της συνάρτησης όσο το A είναι αριστερά από την αρχή των αξόνων μειώνονται και στη συνέχεια αυξάνουν. Αλγεβρικά, πρέπει να αποδειχθούν οι εξής σχέσεις: Αν $x_1 < x_2 < 0$ τότε $f(x_1) > f(x_2)$ και αν $0 < x_1 < x_2$ τότε $f(x_1) < f(x_2)$.

Διερεύνηση 2

Αναμένεται να απαντήσουν ότι οι τιμές της συνάρτησης αυξάνουν όσο το A κινείται προς μεγαλύτερες τιμές. Αλγεβρικά, πρέπει να αποδειχθούν οι εξής σχέσεις: Αν $x_1 < x_2$ τότε $f(x_1) < f(x_2)$.

Διερεύνηση 3

Αναμένεται να απαντήσουν ότι οι τιμές της συνάρτησης όσο το A είναι αριστερά από την αρχή των αξόνων μειώνονται και όταν το A περάσει σε τιμές μεγαλύτερες από το 0 μειώνονται επίσης. Μάλιστα μπορούν να σχολιάσουν ότι όταν το A πλησιάζει το 0 από αριστερά οι τιμές της συνάρτησης τείνουν στο $-\infty$. Μόλις περάσει δεξιά από το 0 οι τιμές δείχνουν να έρχονται από το $+\infty$ και να μειώνονται. Αλγεβρικά, πρέπει να αποδειχθούν οι εξής σχέσεις: Αν $x_1 < x_2 < 0$ τότε $f(x_1) > f(x_2)$ και αν $0 < x_1 < x_2$ τότε $f(x_1) > f(x_2)$ αλλά οι τιμές δεν μειώνονται συνεχώς αλλά γίνεται το «άλμα» από το $-\infty$ στο

$+\infty$ καθώς εύκολα μπορεί να βρεθεί ένα σημείο αριστερά του 0 που να έχει τιμή μικρότερη από ένα σημείο δεξιά του 0.

Διερεύνηση 4

Αναμένεται να απαντήσουν ότι για $n=1, 3, 5, 7, \dots$ η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το πεδίο ορισμού της όταν οι τιμές του a είναι θετικές και γνησίως φθίνουσα σε όλο το πεδίο ορισμού της όταν είναι αρνητικές. Στις περιπτώσεις που οι τιμές του n είναι $n=2, 4, 6, 8, \dots$ έχουν δυο διαστήματα με διαφορετική μονοτονία, στο ένα είναι γνησίως αύξουσα και στο άλλο γνησίως φθίνουσα. Σε ορισμένες περιπτώσεις οι μαθητές πρέπει να διερευνήσουν ένα ιδιαίτερο χαρακτηριστικό φαινόμενο όπου όσο ο χ παίρνει τιμές σε ένα συγκεκριμένο διάστημα – γύρω από το 0 – οι τιμές της φαίνεται να παραμένουν σταθερές (πιθανό μέγιστο ή ελάχιστο). Το ερώτημα της διερεύνησης είναι αν όντως ισχύει αυτό ή είναι μια αδυναμία του λογισμικού εξαιτίας των αριθμητικών προσεγγίσεων. Η διερεύνηση πρέπει να γίνει αλγεβρικά (με υπολογισμό των τιμών της συνάρτησης για δυο τέτοιες τιμές του χ). Για $n=0$ η συνάρτηση είναι σταθερή. Για αρνητικές τιμές του χ η συνάρτηση είναι (1) για $n=-1, -3, -5, \dots$ κατά διαστήματα γνησίως αύξουσα ή κατά διαστήματα γνησίως φθίνουσα ανάλογα με το πρόσημο του a και για $n=-2, -4, -6, \dots$ είναι στο ένα διάστημα $(-\infty, 0)$ γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα και στο άλλο διάστημα $(0, +\infty)$ είναι αντίστοιχα γνησίως φθίνουσα και γνησίως αύξουσα.

Οι αλγεβρικές επαληθεύσεις των παραπάνω αποτελεσμάτων μπορούν να γίνουν εύκολα σε κάθε περίπτωση, αν λυθεί μια σειρά ανισώσεων για την οποία πρέπει να υποτεθεί ότι $x_1 < x_2 < 0$ ή $0 < x_1 < x_2$ και να αποδειχθεί ότι ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$ ή $f(x_1) > f(x_2)$.

3.6.5 Θέμα 2: Η μονοτονία τριγωνομετρικής συνάρτησης

Στην επιφάνεια εργασίας του παρακάτω μικρόκοσμου έχει σχεδιαστεί η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = a \cdot \sin(\beta \cdot x + \gamma) + \delta$. Μπορείτε να ερευνήσετε για τον τρόπο που μεταβάλλονται οι τιμές της συνάρτησης;

ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΕΙΣ

1. Επιλέξτε ο δείκτης του μεταβολέα του a να δείχνει 1 και οι δείκτες των $\beta=1$, $\gamma=-2$ και $\delta=0$. Επιλέξτε ακόμα τα σημεία A και B να ορίζουν πεδίο ορισμού για τη συνάρτηση το διάστημα $[-\pi, \pi]$. Μπορείτε να περιγράψετε πώς μεταβάλλονται οι τιμές της συνάρτησης όταν το σημείο M κινείται προς μεγαλύτερες τιμές; Ποια είναι η μικρότερη και ποια η μεγαλύτερη τιμή της συνάρτησης; Μπορείτε να αποδείξετε τον τρόπο μεταβολής των τιμών της συνάρτησης;
2. Επιλέξτε ο δείκτης του μεταβολέα του a να δείχνει 1 και οι δείκτες των $\beta=1$, $\gamma=-2$ και $\delta=0$. Μπορείτε να καθορίσετε τη θέση των A και B ώστε στο διάστημα αυτό η συνάρτηση να είναι μόνο αύξουσα; Μπορείτε να καθορίσετε τη θέση των A και B ώστε στο διάστημα αυτό η συνάρτηση να έχει και ελάχιστη και μέγιστη τιμή (εξαιρουμένων των άκρων); Μπορείτε να αποδείξετε την ισχύ των παρατηρήσεών σας;
3. Επιλέξτε, ο δείκτης του μεταβολέα του a να δείχνει -1 και οι δείκτες των $\beta=1$, $\gamma=-2$ και $\delta=0$. Επανακαθορίστε τη θέση των A και B που βρήκατε στην προηγούμενη διερεύνηση και εξετάστε τι αλλάζει στη μονοτονία και στα ακρότατα της συνάρτησης. Μπορείτε να αποδείξετε την ισχύ των παρατηρήσεών σας;
4. Επιλέξτε διάφορες τιμές για τους συντελεστές a , β , γ και δ της συνάρτησης. Επιλέξτε διάφορες θέσεις των A και B και διερευνείστε για τη μονοτονία και τα ακρότατα της συνάρτησης. Μπορείτε σε κάθε περίπτωση να περιγράψετε την μονοτονία και τα ακρότατα της συνάρτησης; Μπορείτε να αποδείξετε την ισχύ των παρατηρήσεών σας;

Ανακεφαλαίωση: Συζητήστε στην τάξη σας με τους μαθητές σας για τα αποτελέσματα των διερευνήσεων που έκαναν. Ζητήστε τους να περιγράψουν σε ποιά διαστήματα οι τιμές της συνάρτησης αυξάνουν και σε ποιά μειώνονται καθώς οι τιμές της μεταβλητής x αυξάνουν ή μειώνονται. Βοηθήστε τους να διατυπώσουν κανόνες για τη μονοτονία της συνάρτησης.

ΟΔΗΓΙΕΣ ΠΡΟΣ ΤΟΝ ΔΙΔΑΣΚΟΝΤΑ

Για τη διαχείριση των εργαλείων του μικρόκοσμου

Ζητήστε από τους μαθητές:

- Να κινούν τον κάθε μεταβολέα κατάλληλα ώστε να ορίσουν ακριβώς την εξίσωση της συνάρτησης.
- Να μετακινούν τα σημεία A και B για να ορίσουν το πεδίο ορισμού.
- Να κινούν το σημείο M και να παρατηρούν τον τρόπο μεταβολής του σημείου K πάνω στην καμπύλη και του Λ πάνω στον άξονα $\psi\psi$.

- Να επαναπροσδιορίζουν τα χαρακτηριστικά (ιδιότητες) των μεταβολέων για να μπορούν να επαναπροσδιορίζουν το πεδίο ορισμού (π.χ. μπορούν να μεγαλώσουν το μέγεθός τους ή να ορίζουν τις τιμές που θέλουν στο άκρο των τιμών τους).

Για τις διερευνήσεις

Ζητήστε από τους μαθητές να παρατηρούν, να προβλέπουν, να ελέγχουν και να εκφράζουν στην ομάδα τους και στην τάξη:

- Για το γράφημα:
 - ✓ Τη μορφή του γραφήματος που ορίζεται από το πεδίο ορισμού.
 - ✓ Τι συμβαίνει στο γράφημα όταν επιλέγουν συγκεκριμένο πεδίο ορισμού.
 - ✓ Πώς ορίζεται το τμήμα του άξονα $\psi\psi$ που αναπαριστά το σύνολο τιμών της συνάρτησης.
- Για την μεταβολή των τιμών:
 - ✓ Πώς μεταβάλλονται οι τιμές της συνάρτησης όταν κινούν το σημείο M προς μεγαλύτερες τιμές στο πεδίο ορισμού της.
 - ✓ Πότε εμφανίζεται η μεγαλύτερη και πότε η μικρότερη τιμή της συνάρτησης στο διάστημα μεταβολής της ανεξάρτητης μεταβλητής x .
 - ✓ Αν επαληθεύεται το συμπέρασμά τους για την μεταβολή των τιμών και αλγεβρικά.

Για τις απαντήσεις

Ζητήστε από τους μαθητές να εκφράσουν στην τάξη τις απαντήσεις τους. Είναι πιθανόν οι μαθητές να δώσουν απαντήσεις όπως οι παρακάτω:

Διερεύνηση 1

Αναμένεται να απαντήσουν ότι στο διάστημα $[-\pi, 0,43]$ είναι γνησίως φθίνουσα και στο διάστημα $[0,43, \pi]$ είναι γνησίως αύξουσα. Μικρότερη τιμή είναι το -1 και μεγαλύτερη το 1 . Οι μαθητές μπορούν να κάνουν το εξής πείραμα για να επιβεβαιώσουν την απάντησή τους. Να επιλέξουν για το γ την τιμή 0 και έτσι να επαναλάβουν την διερεύνηση για τη συνάρτηση $f(x)=\eta\mu(\chi)$. Στην περίπτωση αυτή το ελάχιστο δημιουργείται στο σημείο $-\frac{\pi}{2} \approx -1,53$. Στη συνέχεια για να πάρουν την συνάρτηση $f(x) = \eta\mu(\chi-2)$ πρέπει να χρησιμοποιήσουν τον κατάλληλο μετασχηματισμό μεταφοράς προς τα δεξιά κατά 2 μονάδες. Άρα το σημείο με το ελάχιστο θα βρεθεί στη θέση $-1,53+2=0,43$.

Διερεύνηση 2

Μια από τις πολλές απαντήσεις που μπορούν να δώσουν οι μαθητές είναι το διάστημα $[0,43, \pi]$. Ο εκπαιδευτικός μπορεί να ζητήσει από τους μαθητές να βρουν περισσότερες από μια απαντήσεις.

Διερεύνηση 3

Στην περίπτωση αυτή οι μαθητές δεν θα δυσκολευτούν να απαντήσουν ότι στο σημείο που είχαμε ελάχιστο τώρα έχουμε μέγιστο και εκεί που έχουμε μέγιστο έχουμε ελάχιστο.

Διερεύνηση 4

Οι μαθητές αναμένεται να κάνουν διάφορες διερευνήσεις χρησιμοποιώντας τις γνώσεις τους αλλά και την εμπειρία που απέκτησαν από τις προηγούμενες διερευνήσεις.

Οι αλγεβρικές επαληθεύσεις των παραπάνω αποτελεσμάτων μπορούν να γίνουν εύκολα με τη βοήθεια των μετασχηματισμών και των τριγωνομετρικών ανισοτήτων. Στην δεύτερη περίπτωση η χρήση του τριγωνομετρικού κύκλου είναι επίσης χρήσιμη.

3.6.6 Θέμα 3: Η συνάρτηση $1 - 1$

Στην επιφάνεια εργασίας του παρακάτω μικρόκοσμου έχει σχεδιαστεί η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = a \cdot x^n + \beta$. Μπορείτε να ερευνήσετε σε ποιες περιπτώσεις η συνάρτηση έχει την ιδιότητα $1-1$;

ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΕΙΣ

1. Επιλέξτε ο δείκτης του μεταβολέα του n να δείχνει 2 και οι δείκτες των $a=1$ και $\beta=-2$. Μπορείτε να περιγράψετε πόσες τιμές του x αντιστοιχούν σε κάθε τιμή της συνάρτησης όταν κινείτε το σημείο A ; Είναι η συνάρτηση $1-1$; Μπορείτε να αποδείξετε τους ισχυρισμούς σας;
2. Επιλέξτε ο δείκτης του μεταβολέα του n να δείχνει 3 και οι δείκτες των $a=1$ και $\beta=-1$. Υπάρχει θέση του A που να τέμνει το γράφημα της συνάρτησης σε περισσότερα από ένα σημεία; Είναι η συνάρτηση $1-1$; Μπορείτε να αποδείξετε τους ισχυρισμούς σας;
3. Επιλέξτε ο δείκτης του μεταβολέα του n να δείχνει -1 και οι δείκτες των $a=1$ και $\beta=0$. Υπάρχει θέση του A που να τέμνει το γράφημα της συνάρτησης σε περισσότερα από ένα σημεία; Είναι η συνάρτηση $1-1$; Μπορείτε να αποδείξετε τους ισχυρισμούς σας;
4. Επιλέξτε $a=1$, $\beta=0$ και ο δείκτης του μεταβολέα του n να δείχνει διάφορες τιμές. Μπορείτε να περιγράψετε σε ποιές περιπτώσεις έχουμε συνάρτηση $1-1$ και σε ποιες όχι; Μπορείτε να αποδείξετε τους ισχυρισμούς σας;

Ανακεφαλαίωση: Συζητήστε στην τάξη σας με τους μαθητές σας για τα αποτελέσματα των διερευνήσεων που έκαναν. Ζητήστε τους να περιγράψουν σε ποιές περιπτώσεις οι πολυωνυμικές συναρτήσεις που μελέτησαν είναι $1-1$ και σε ποιές όχι. Ζητήστε τους να περιγράψουν κανόνες για το πώς μπορούν να εξετάσουν αλγεβρικά αν μια συνάρτηση είναι $1-1$.

ΟΔΗΓΙΕΣ ΠΡΟΣ ΤΟΝ ΔΙΔΑΣΚΟΝΤΑ

Για τη διαχείριση των εργαλείων του μικρόκοσμου

Ζητήστε από τους μαθητές:

- Να κινούν τον κάθε μεταβολέα κατάλληλα ώστε να ορίσουν ακριβώς την εξίσωση της συνάρτησης.
- Να μετακινούν το σημείο A για να ορίσουν την ευθεία $y=y(A)$.
- Να κινούν το σημείο A και να παρατηρούν τα σημεία τομής της ευθείας που διέρχεται από το A με το γράφημα της συνάρτησης $f(x)$.
- Να επαναπροσδιορίζουν τα χαρακτηριστικά (properties) των μεταβολέων για να μπορούν να επαναπροσδιορίζουν το πεδίο ορισμού.

Για τις διερευνήσεις

Ζητήστε από τους μαθητές να παρατηρούν, να προβλέπουν, να ελέγχουν και να εκφράζουν στην ομάδα τους και στην τάξη:

- Για τις τομές της ευθείας $y=y(A)$ με το γράφημα:

- ✓ Τη μορφή του γραφήματος που ορίζεται από το πεδίο ορισμού.
- ✓ Το πλήθος των σημείων τομής της $y=y(A)$ με το γράφημα της συνάρτησης.
- Για την αλγεβρική διαπραγμάτευση:
 - ✓ Τις κατάλληλες θέσεις του A ώστε να έχουν παραδείγματα κατάλληλη για την αλγεβρική επεξεργασία της απόδειξης ότι δεν ισχύει η ιδιότητα 1-1.
 - ✓ Να χρησιμοποιούν τις εμπειρίες τους από την οπτική διαπραγμάτευση για να επαληθεύσουν το συμπέρασμά τους αλγεβρικά.

Για τις απαντήσεις

Ζητήστε από τους μαθητές να εκφράσουν στην τάξη τις απαντήσεις τους. Είναι πιθανόν οι μαθητές να δώσουν απαντήσεις όπως οι παρακάτω:

Διερεύνηση 1

Αναμένεται να απαντήσουν ότι σε κάθε θέση του σημείου A η ευθεία που διέρχεται από αυτό τέμνει την καμπύλη σε δυο σημεία. Άρα δεν είναι 1-1. Για απόδειξη αρκεί ένα παράδειγμα. Όταν το A είναι στη θέση $(0,1)$ τα σημεία τομής μπορούν να βρεθούν από τη λύση του συστήματος $y=1$ και $y=x^2-2$. Το σύστημα έχει δυο λύσεις που σημαίνει ότι δυο διαφορετικές τιμές του $x = \pm\sqrt{3}$ έχουν το ίδιο $y=1$.

Διερεύνηση 2

Αναμένεται να απαντήσουν ότι δεν υπάρχει θέση του A όπου η ευθεία που διέρχεται από αυτό να τέμνει την γραφική παράσταση σε περισσότερα από ένα σημεία. Η λύση της εξίσωσης $f(x)=y$ έχει σε κάθε θέση του A μια μόνο λύση.

Διερεύνηση 3

Αναμένεται να απαντήσουν όπως και στην προηγούμενη περίπτωση. Η διαφορά εδώ αφορά το γεγονός ότι η γραφική παράσταση αποτελείται από δυο κλάδους και έτσι αλγεβρικά πρέπει να εξεταστεί κάθε κλάδος ξεχωριστά αλλά και συνολικά. Μ' άλλα λόγια οι μαθητές αναμένεται να διαπιστώσουν ότι η ευθεία που διέρχεται από το A (α) δεν τέμνει ποτέ τον ίδιο κλάδο σε περισσότερα από ένα σημεία και (2) δεν υπάρχει θέση στην οποία η ευθεία να τέμνει και τους δυο κλάδους ταυτόχρονα.

Διερεύνηση 4

Οι απαντήσεις που αναμένεται να δοθούν είναι όπως οι παρακάτω:

- (1) Για $v=0$ η ευθεία έχει άπειρα κοινά σημεία με την γραφική παράσταση και έτσι δεν είναι 1-1.
- (2) Για $v=1, 3, 5, 7, \dots$ και $v=-1, -3, -5, \dots$ η συνάρτηση είναι 1-1
- (3) Για $v=2, 4, 6, 8, \dots$ και $v=-2, -4, -6, \dots$ η συνάρτηση δεν είναι 1-1

Οι αλγεβρικές επαληθεύσεις των παραπάνω αποτελεσμάτων μπορούν να γίνουν εύκολα σε κάθε περίπτωση αν λυθεί η εξίσωση $f(x) = y$.

3.6.7 Θέμα 4: Η αντίστροφη συνάρτηση

Στην επιφάνεια εργασίας του παρακάτω μικρόκοσμου έχει σχεδιαστεί η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \alpha \cdot x^\nu + \beta$. Μπορείτε να ερευνήσετε σε ποιες περιπτώσεις η συνάρτηση έχει αντίστροφη;

ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΕΙΣ

1. Επιλέξτε οι δείκτες των τριών μεταβολέων να δείχνουν $\nu=2$, $\alpha=1$ και $\beta=1$. Μπορείτε να ορίσετε τη θέση των A και B ώστε το τμήμα της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x)$ που ορίζουν να είναι 1-1 συνάρτηση; Είναι το συμμετρικό του τμήματος αυτού ως προς την ευθεία $\psi=x$ συνάρτηση; Μπορείτε να αποδείξετε τους ισχυρισμούς σας;
2. Επιλέξτε οι δείκτες των τριών μεταβολέων να δείχνουν $\nu=3$, $\alpha=1$, $\beta=1$, το σημείο A να είναι στη θέση $(-4,0)$ και το B στη θέση $(4,0)$. Μετακινήστε το σημείο Γ από το A προς το B και αντιστρόφως. Μπορείτε να εξηγήσετε τον τρόπο με τον οποίο μεταβάλλονται τα σημεία K και Λ των δυο γραφημάτων; Σε ποια περίπτωση τα δυο αυτά σημεία ταυτίζονται; Μπορείτε να αποδείξετε τους ισχυρισμούς σας;
3. Επιλέξτε οι δείκτες των τριών μεταβολέων να δείχνουν $\nu=-1$, $\alpha=1$, $\beta=1$, το σημείο A να είναι στη θέση $(-4,0)$ και το B στη θέση $(4,0)$. Μετακινήστε το σημείο Γ από το A προς το B και αντιστρόφως. Μπορείτε να εξηγήσετε τον τρόπο με τον οποίο μεταβάλλονται τα σημεία K και Λ των δυο γραφημάτων; Σε ποια περίπτωση τα δυο αυτά σημεία ταυτίζονται; Θα εξακολουθούν να ισχύουν οι προηγούμενες παρατηρήσεις σας αν μεταβάλλετε τις θέσεις των A και B; Μπορείτε να αποδείξετε τους ισχυρισμούς σας;
4. Επιλέξτε οι δείκτες των τριών μεταβολέων να δείχνουν $\nu=5$, $\alpha=0.2$, $\beta=-0.2$, το σημείο A να είναι στη θέση $(-6,0)$ και το B στη θέση $(6,0)$. Μπορείτε να εξηγήσετε γιατί η καμπύλη (δ) είναι συνάρτηση; Μπορείτε να βρείτε τον τύπο της; Μπορείτε επίσης να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων τομής των δυο συναρτήσεων; Μπορείτε να εξηγήσετε πότε η συμμετρική καμπύλη μιας συνάρτησης ως προς τη ευθεία $\psi=x$ είναι συνάρτηση και πότε αυτές έχουν κοινά σημεία;

Ανακεφαλαίωση: Συζητήστε στην τάξη σας με τους μαθητές σας για τα αποτελέσματα των διερευνήσεων που έκαναν. Ζητήστε τους να περιγράψουν σε ποιές περιπτώσεις οι συναρτήσεις που μελετήσατε έχουν αντίστροφη συνάρτηση. Συζητήστε μαζί τους για το πώς συνδέεται η ιδιότητα του 1-1 με την ύπαρξη αντίστροφης συνάρτησης. Ζητήστε τους να εξηγήσουν αλγεβρικά την ύπαρξη αντίστροφης συνάρτησης και να βρείτε τον τύπο της.

ΟΔΗΓΙΕΣ ΠΡΟΣ ΤΟΝ ΔΙΔΑΣΚΟΝΤΑ

Για τη διαχείριση των εργαλείων του μικρόκοσμου

Ζητήστε από τους μαθητές:

- Να κινούν τον κάθε μεταβολέα κατάλληλα ώστε να ορίσουν ακριβώς την εξίσωση της συνάρτησης.
- Να μετακινούν τα σημεία A και B για να ορίσουν το πεδίο ορισμού.

- Να κινούν το σημείο Γ και να παρατηρούν τον τρόπο μεταβολής του σημείου K πάνω στην καμπύλη και του Λ πάνω στην συμμετρική καμπύλη.
- Να κινούν τα σημεία E και Δ για να διαπιστώσουν αν η συνάρτηση $f(x)$ είναι 1-1 και η συμμετρική της συνάρτηση.
- Να επαναπροσδιορίζουν τα χαρακτηριστικά (properties) των μεταβολών για να μπορούν να επαναπροσδιορίζουν το πεδίο ορισμού.

Για τις διερευνήσεις

Ζητήστε από τους μαθητές να παρατηρούν, να προβλέπουν, να ελέγχουν και να εκφράζουν στην ομάδα τους και στην τάξη:

- Για το γράφημα:
 - ✓ Τη μορφή του γραφήματος που ορίζεται από το πεδίο ορισμού.
 - ✓ Τι συμβαίνει στο γράφημα ως προς τις ιδιότητες που διερευνώνται όταν επιλέγουν συγκεκριμένο πεδίο ορισμού.
 - ✓ Πώς ορίζεται το τμήμα που αναπαριστά το συμμετρικό του μέρους της γραφικής παράστασης που ορίζεται από το πεδίο ορισμού της.
 - ✓ Το πλήθος των σημείων στα οποία οι ευθείες που διέρχονται από τα Δ και E τέμνουν τις δυο καμπύλες.
- Για το συμμετρικό της γραφικής παράστασης ως προς την ευθεία $\psi=x$:
 - ✓ Πώς μεταβάλλεται το συμμετρικό της συνάρτησης όταν μεταβάλλουν το πεδίο ορισμού της.
 - ✓ Πότε το συμμετρικό γράφημα είναι συνάρτηση.
 - ✓ Πότε τα δυο γραφήματα έχουν κοινά σημεία.
 - ✓ Αν επαληθεύεται το συμπέρασμά τους για το σύνολο τιμών και αλγεβρικά.

Για τις απαντήσεις

Ζητήστε από τους μαθητές να εκφράσουν στην τάξη τις απαντήσεις τους. Είναι πιθανόν οι μαθητές να δώσουν απαντήσεις όπως οι παρακάτω:

Διερεύνηση 1

Μια από τις πιθανές απαντήσεις είναι ότι το πεδίο ορισμού είναι το διάστημα $[0, 2]$. Στην περίπτωση αυτή η συμμετρική ως προς $y=x$ είναι συνάρτηση. Αλγεβρικά μπορεί να αποδειχθεί με την εύρεση της εξίσωσής της από την $y=f(x)$ εναλλάσσοντας τους ρόλους των x και y . Δηλαδή, αντικαθιστώντας στη θέση του x το y και αντιστρόφως.

Διερεύνηση 2

Και τα δυο σημεία κινούνται προς την ίδια κατεύθυνση, που σημαίνει ότι οι τιμές τους αυξάνονται. Ακόμα το τμήμα $K\Lambda$ μειώνεται μέχρι να μηδενιστεί και στη συνέχεια αυξάνει μετά μειώνεται και στη συνέχεια αυξάνει. Αυτό οφείλεται στη μορφή της $f(x)$ καθώς και στο συμμετρικό της ως προς την $y=x$. Τα δυο γραφήματα τέμνονται σε ένα σημείο πάνω στην ευθεία $y=x$.

Διερεύνηση 3

Και σ' αυτή την περίπτωση ισχύουν ανάλογες με την προηγούμενη παρατηρήσεις. Εδώ υπάρχουν δυο σημεία τομής που μπορούν να βρεθούν με τη λύση συστημάτων.

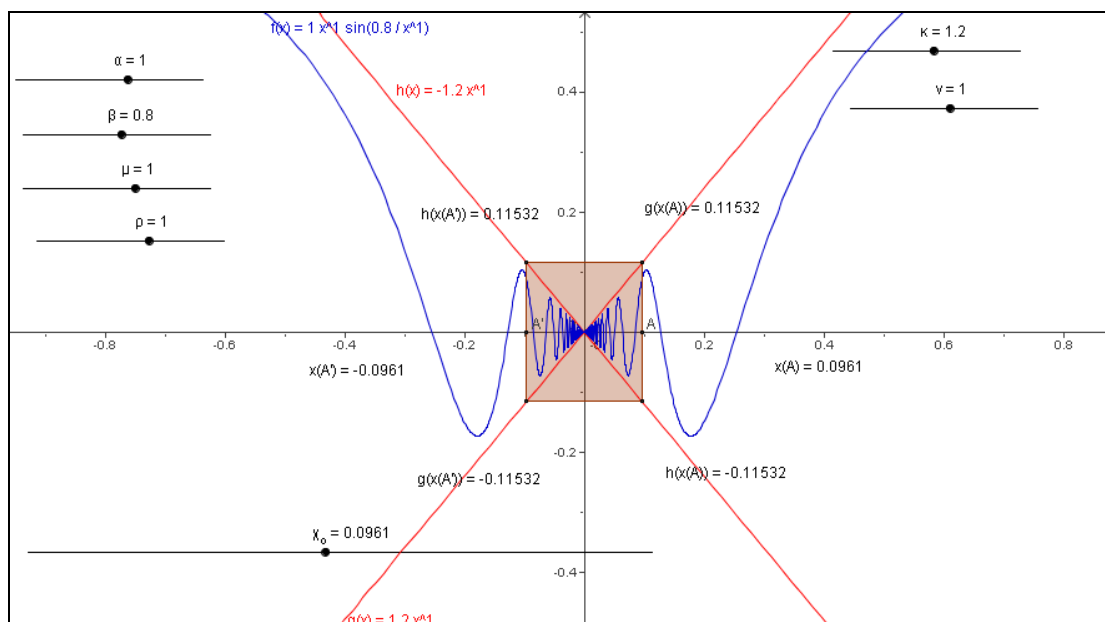
Διερεύνηση 4

Η ευθεία που διέρχεται από το Δ τέμνει την (δ) σε ένα σημείο. Επίσης η ευθεία που διέρχεται από το σημείο E τέμνει την $f(x)$ σε ένα σημείο (είναι 1-1). Τα σημεία τομής μπορούν να βρεθούν αλγεβρικά με τη λύση της εξίσωσης $x=f(x)$.

Οι αλγεβρικές επαληθεύσεις των παραπάνω αποτελεσμάτων μπορούν να γίνουν εύκολα σε κάθε περίπτωση αν λυθεί μια σειρά συστημάτων.

4 ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 – Όριο και συνέχεια

4.1 ΣΕΝΑΡΙΟ 7 : Όριο Συνάρτησης



4.1.1 Η κεντρική ιδέα του σεναρίου

Στο σενάριο αυτό οι μαθητές καλούνται να διερευνήσουν τι συμβαίνει πολύ κοντά σε ένα σημείο μιας συνάρτησης. Χρησιμοποιούν μερικά από τα διαθέσιμα από το λογισμικό εργαλεία για να διερευνήσουν τι συμβαίνει με τις τιμές της συνάρτησης όταν οι τιμές της ανεξάρτητης μεταβλητής πλησιάζουν συνεχώς την τιμή x_0 . Χρησιμοποιούν το ορθογώνιο και τη διαδικασία προσαρμογής του στην καμπύλη ή επιλέγουν μια τιμή για τη μια πλευρά του ορθογωνίου και αναζητούν την άλλη ώστε αυτό να προσαρμόζεται στη καμπύλη. Ταυτόχρονα οι μαθητές μπορούν να παρακολουθούν πώς μεταβάλλονται οι τιμές του δ καθώς μεταβάλλουν τις τιμές του ε . Τέλος καλούνται να κάνουν επαληθεύσεις με αλγεβρικά μέσα (λύση ανίσωσης). Οι διαδικασίες αυτές αναμένεται να βοηθήσουν τους μαθητές να συγκροτήσουν την έννοια του ορίου μιας συνάρτησης στο σημείο x_0 .

4.1.2 Στόχοι

- Να αποκτήσουν εμπειρίες σχετικές με την έννοια του ορισμού στο x_0 .
- Να αποκτήσουν εμπειρίες από μια διαδικασία προσέγγισης του ορίου με τη βοήθεια των ε και δ .
- Να εκφράζουν ποιοτικά τη διαδικασία ύπαρξης και εύρεσης του ορίου.
- Να εκφράσουν ποιοτικά και αλγεβρικά την ιδιότητα των ισοσυγκλινουσών συναρτήσεων.

4.1.3 Διδακτική πρόταση

ΟΡΓΑΝΩΣΗ ΤΗΣ ΤΑΞΗΣ

Οι δραστηριότητες αυτές ενδείκνυται να διδάσκονται στο εργαστήριο υπολογιστών και οι μαθητές να εργάζονται σε ομάδες 2-3 ατόμων με φύλλο εργασίας. Μπορούν όμως να διεξαχθούν και στη τάξη που έχει μόνο έναν υπολογιστή με βιντεοπροβολέα. Σ' αυτή την περίπτωση οι μαθητές συμπληρώνουν τα φύλλα εργασίας με βάση τις παρατηρήσεις που κάνουν κατά την διερεύνηση που γίνεται απ' όλη την τάξη και κατευθύνεται από τον εκπαιδευτικό ή κάποιον μαθητή. Στο πλαίσιο αυτό κάνουν παρεμβάσεις στην διερεύνηση με τις οποίες εκφράζουν τη δική τους στρατηγική στη διερεύνηση. Καθώς τέτοιες παρεμβάσεις μπορούν να γίνονται στην τάξη απ' όλους τους μαθητές ο διδάσκων πρέπει να τις υποστηρίζει και να επιδιώκει να συζητούνται όλες οι πιθανές στρατηγικές της διερεύνησης.

Σε κάθε περίπτωση ο εκπαιδευτικός πρέπει να έχει από πριν προετοιμάσει τον τρόπο που θα χειριστεί τις διαφορετικές στρατηγικές που πιθανόν να διατυπωθούν καθώς και τις πιθανές εκβάσεις τους.

Έτσι πρέπει με τη στάση του να προκαλεί την εφαρμογή των διαφορετικών τρόπων διερεύνησης, να ενθαρρύνει κάθε μαθητή να δοκιμάζει τις ιδέες του, να εκφράζει τις εικασίες του και να διατυπώνει τα συμπεράσματά του ελεύθερα.

ΟΙ ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΕΣ ΔΥΝΑΤΟΤΗΤΕΣ ΤΟΥ ΣΕΝΑΡΙΟΥ

Οι προτεινόμενες στο σενάριο δραστηριότητες αφορούν φαινόμενα τα οποία προκαλούνται από την δράση των μαθητών σε προσχεδιασμένους υπολογιστικούς μικρόκοσμους με σκοπό την ανάδειξη μερικών ιδιοτήτων τους. Έτσι οι απαντήσεις στα ερωτήματα που τίθενται στο πλαίσιο αυτών των διερευνήσεων αλλά και αυτών που ο διδάσκων ή οι ίδιοι οι μαθητές μπορούν να θέσουν είναι δυνατόν να αποτελέσουν ένα περιβάλλον απόκτησης και έκφρασης εμπειριών σχετικών με μια διαδικασία προσδιορισμού του ορίου μιας συνάρτησης στο σημείο χ_0 καθώς και με τη σχέση που έχει αυτή με την μορφή της συνάρτησης. Τα εργαλεία που έχουν ενσωματωθεί στους μικρόκοσμους δίνουν την δυνατότητα στους μαθητές,

- να κάνουν πειράματα με τον προσδιορισμό των συναρτήσεων που προκύπτουν άμεσα από συγκεκριμένες οικογένειες προκειμένου να διερευνήσουν το όριο σε ένα σημείο χ_0 ,
- να παρατηρούν και να ερμηνεύουν τα αποτελέσματα των χειρισμών τους,
- να εκφράζουν εικασίες, να κάνουν γενικεύσεις, να διατυπώνουν υποθέσεις και θεωρήματα και να τα εκφράζουν με μαθηματικούς όρους.
- να λύνουν προβλήματα αλγεβρικού προσδιορισμού των ορίων με τη βοήθεια των δ και ε καθώς και με τη βοήθεια των εμπειριών από την οπτική διαπραγμάτευση αυτών.

Ακόμα, μπορούν να επεμβαίνουν και να επαναπροσδιορίζουν τις δυνατότητες των εργαλείων ή να επαναδιατυπώνουν τον τρόπο ορισμού των αντικειμένων και να μεταβάλλουν την εμφάνισή τους. Από αυτή την άποψη οι μικρόκοσμοι είναι επαναχρησιμοποιήσιμοι και δίνουν τη δυνατότητα στους χρήστες να διατυπώνουν και νέα ερωτήματα που αφορούν ιδιαίτερες γνωστικές πτυχές των μαθηματικών αντικειμένων.

ΠΟΡΕΙΑ ΤΗΣ ΕΦΑΡΜΟΓΗΣ ΤΟΥ ΣΕΝΑΡΙΟΥ

Το σενάριο αποτελείται από τέσσερις εργασίες. Στην πρώτη, οι μαθητές διαπραγματεύονται τον προσδιορισμό των ιδιοτήτων μιας συνάρτησης $f(x) = \alpha \cdot x^v + \beta$ γύρω από ένα σημείο χ_0 , με τη βοήθεια ενός ορθογώνιου του οποίου οι διαστάσεις ορίζονται με τη βοήθεια των ε και δ μεταβολών και το οποίο πρέπει να προσαρμοστεί στη καμπύλη της συνάρτησης. Στη δεύτερη, οι μαθητές διαπραγματεύονται το ίδιο αντικείμενο αλλά τώρα καλούνται να προσδιορίσουν πρώτα το ε και στη συνέχεια να προσδιορίσουν το δ ώστε το ορθογώνιο να προσαρμόζεται στη καμπύλη. Στην τρίτη, διερευνάται το ίδιο θέμα αλλά για μια συνάρτηση διπλού τύπου και έτσι οι μαθητές έρχονται σε επαφή με την περίπτωση των πλευρικών ορίων και της μη ύπαρξης του ορίου. Στην τέταρτη, μελετάται η περίπτωση των ισοσυγκλινουσών συναρτήσεων.

Η εμπλοκή των μαθητών με κάθε μια δραστηριότητα αναμένεται να αναδείξει:

- Το ρόλο των ε και δ στον προσδιορισμό του ορίου μιας συνάρτησης σε ένα σημείο χ_0 .
- Το ρόλο των συντελεστών της κάθε εξίσωσης στον προσδιορισμό του ορίου της σε ένα σημείο.

Ο εκπαιδευτικός μπορεί να ζητά από τους μαθητές να επαληθεύουν αλγεβρικά τα συμπεράσματά τους σε κάθε περίπτωση.

ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

Εργασία	Περιγραφή	Τμήμα εφαρμογής	Περιεχόμενο
Εργασία 1	Ιδιότητες της συνάρτησης κοντά σ' ένα σημείο	ΟΛΟΙ	Διερευνήσεις για τον ορισμό ενός προσαρμοσμένου στη συνάρτηση ορθογώνιου όσο το δυνατόν πιο κοντά στο χ_0 .
Εργασία 2	Το ε και το δ του ορίου	ΟΛΟΙ	Διερευνήσεις για τον ορισμό του δ με δεδομένο το ε ώστε το ορθογώνιο με πλευρές 2δ και 2ε να προσαρμόζεται στο γράφημα της συνάρτησης.
Εργασία 3	Το όριο συνάρτησης διπλού τύπου στο χ_0	ΟΛΟΙ	Διερευνήσεις για το όριο της συνάρτησης $f(x) = \begin{cases} \alpha x + \beta, & x < \chi_0 \\ \kappa x + \lambda, & x > \chi_0 \end{cases}$ στο χ_0 .
Εργασία 4	Το θεώρημα των ισοσυγκλινουσών συναρτήσεων	ΟΛΟΙ	Διερευνήσεις για τη σχέση των ορίων ισοσυγκλινουσών συναρτήσεων

4.1.4 Θέμα 1: Ιδιότητες της συνάρτησης κοντά σ' ένα σημείο

Στην επιφάνεια εργασίας του παρακάτω μικρόκοσμου έχει σχεδιαστεί η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \kappa \cdot x^2 + \lambda \cdot x + \mu$ καθώς και ένα ορθογώνιο με κέντρο το σημείο K του οποίου όμως οι διαστάσεις μπορούν να μεταβάλλονται με τη βοήθεια των μεταβολών δ και ε . Μπορείτε να ερευνήσετε τι συμβαίνει γύρω από κάθε σημείο της καμπύλης;

ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΕΙΣ

1. Επιλέξτε οι δείκτες των μεταβολών να δείχνουν $\kappa=1$, $\lambda=-1$ και $\mu=-1$. Μπορείτε να ορίσετε, με τη βοήθεια του ορθογωνίου μια περιοχή όσο το δυνατόν πιο κοντά στο σημείο $(1, f(1))$; Μπορείτε να εκφράσετε αλγεβρικά την περιοχή αυτή;
2. Επιλέξτε οι δείκτες των μεταβολών να δείχνουν $\kappa=1$, $\lambda=-1$ και $\mu=-1$. Μπορείτε να ορίσετε, με τη βοήθεια του ορθογωνίου, μια περιοχή με ακόμα μικρότερες διαστάσεις από αυτές που ορίσατε στην προηγούμενη διερεύνηση και να περιέχει το σημείο $(1, f(1))$; Μπορείτε να εκφράσετε αλγεβρικά την περιοχή αυτή;
3. Επιλέξτε οι δείκτες των μεταβολών να δείχνουν $\kappa=1$, $\lambda=-2$ και $\mu=-1$. Μπορείτε να ορίσετε με τη βοήθεια του ορθογωνίου μια περιοχή με ακόμα μικρότερες διαστάσεις από αυτές που ορίσατε στην προηγούμενη διερεύνηση και να περιέχει το σημείο $(1, f(1))$; Μπορείτε να εκφράσετε αλγεβρικά την περιοχή αυτή;
4. Επιλέξτε διάφορες τιμές για τους τρεις συντελεστές κ , λ και μ της συνάρτησης. Μπορείτε να περιγράψετε μια διαδικασία με την οποία μπορείτε να ορίσετε ένα ορθογώνιο με όσο το δυνατόν μικρότερες διαστάσεις που να περιέχει ένα συγκεκριμένο σημείο της καμπύλης της συνάρτησης; Μπορείτε να προβλέψετε πώς πρέπει να ορίσετε τις τιμές των μεταβολών δ και ε ώστε να ορίσετε το εν λόγω ορθογώνιο;

Ανακεφαλαίωση: Συζητήστε στην τάξη σας με τους μαθητές σας για τον τρόπο με τον οποίο επέλεξαν τις τιμές των μεταβολών ε και δ για να ορίσουν μια όσο το δυνατόν μικρή ορθογώνια περιοχή γύρω από ένα σημείο της συνάρτησης. Ζητήστε τους να περιγράψουν στην τάξη με αλγεβρικό τρόπο τον τρόπο ορισμού μια οποιαδήποτε ορθογώνιας περιοχής γύρω από ένα σημείο. Βοηθήστε τους να χρησιμοποιήσουν την διπλή ανισότητα $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$ και $f(x_0) - \varepsilon < y < f(x_0) + \varepsilon$ για να εκφράσουν αλγεβρικά τον τρόπο ορισμού μιας ορθογώνιας περιοχής γύρω από το σημείο $(x_0, f(x_0))$.

ΟΔΗΓΙΕΣ ΠΡΟΣ ΤΟΝ ΔΙΔΑΣΚΟΝΤΑ

Για τη διαχείριση των εργαλείων του μικρόκοσμου

Ζητήστε από τους μαθητές:

- Να κινούν τον κάθε μεταβολέα κατάλληλα ώστε να ορίσουν την εξίσωση της συνάρτησης σύμφωνα με την διερεύνηση.
- Να μετακινούν το σημείο A για να ορίσουν το σημείο στο x_0 .
- Να κινούν το σημείο K μέχρι να το προσαρμόσουν στο σημείο x_0 .
- Να κινούν τους μεταβολείς ε και δ για να προσαρμόσουν το ορθογώνιο στην καμπύλη της συνάρτησης.

- Να επαναπροσδιορίζουν τα χαρακτηριστικά (Ιδιότητες) των μεταβολέων για να μπορούν να επαναπροσδιορίζουν την συνάρτηση της οποίας μελετούν το όριο στο x_0 .

Για τις διερευνήσεις

Ζητήστε από τους μαθητές να παρατηρούν, να προβλέπουν, να ελέγχουν και να εκφράζουν στην ομάδα τους και στην τάξη:

- Για το γράφημα:
 - ✓ Τη μορφή του γραφήματος που ορίζεται από τις τιμές των μεταβολέων.
 - ✓ Πώς πρέπει να κινούν τους μεταβολείς ε και δ για να προσαρμόσουν το ορθογώνιο πάνω στη καμπύλη.
 - ✓ Επιλέγουν την εντολή «Zoom» για να μεγεθύνουν κοντά στο $f(x_0)$.
- Για την αλγεβρική διαπραγμάτευση:
 - ✓ Καταγράφουν τις τιμές των ε και δ που ταιριάζουν ώστε το ορθογώνιο να έχει τις κορυφές μιας διαγωνίου του πάνω στη καμπύλη.
 - ✓ Καταγράφουν τις τιμές των $x_0-\delta$, $x_0+\delta$, $f(x_0)-\varepsilon$ και $f(x_0)+\varepsilon$ και υπολογίζουν τις συντεταγμένες των δυο σημείων του ορθογωνίου που ανήκουν στην καμπύλη.
 - ✓ Υπολογίζουν την ανισοτική σχέση που πληρούν οι τετμημένες και οι τεταγμένες της καμπύλης που ανήκουν στο εσωτερικό του ορθογωνίου.

Για τις απαντήσεις

Ζητήστε από τους μαθητές να εκφράσουν στην τάξη τις απαντήσεις τους. Είναι πιθανόν οι μαθητές να δώσουν απαντήσεις όπως οι παρακάτω:

Διερεύνηση 1

Αναμένεται να κάνουν τις εξής ενέργειες:

(1) Να μετακινήσουν το σημείο A στη θέση (1,0). (2) Να μετακινήσουν το σημείο K στη θέση B της καμπύλης (3) Να μετακινήσουν τους δείκτες ε και δ μέχρι τα άκρα της διαγωνίου του ορθογωνίου να ανήκουν στη καμπύλη. (4) Να καταγράψουν τις τιμές των ε και δ . Π.χ. αν $\varepsilon=0,121$ και $\delta=0,2209$ στο ορθογώνιο ανήκουν τα σημεία που έχουν τετμημένες x που ανήκουν στην περιοχή $x_0-0,2283 < x < x_0+0,2283$ και τεταγμένες που ανήκουν στην περιοχή $f(x_0)-0,3482 < f(x) < f(x_0)+0,3482$. (5) Επιλέγουν μεγέθυνση (Zoom) κοντά στο σημείο B και επαναλαμβάνουν τα προηγούμενα προκειμένου να ορίσουν ένα μικρότερο ορθογώνιο γύρω από το σημείο $(x_0, f(x_0))$ (Αναμένεται να βρουν $\varepsilon=0,0634$ και $\delta=0,0934$ ή $\varepsilon=0,0185$ και $\delta=0,0285$ ή $\varepsilon=0,011$ και $\delta=0,0185$). (6) Επιβεβαιώνουν την σχέση των δ και ε λύνοντας την σχετική ανίσωση τοποθετώντας στη θέση του $x_0=1$ και $f(x_0)=-1$. Έτσι λύνουν την ανίσωση $-1-0,3482 < x^2-2 < -1+0,3482$ που είναι ισοδύναμη με την $1-0,3482 < x^2 < 1+0,3482$ ή $0,6518 < x^2 < 1,3482$ ή $0,80734 < x < 1,16112$ το οποίο είναι κοντά στο διάστημα του x_0 που έχει προσδιοριστεί από το ε , και το οποίο είναι $0,7717 < x_0 < 1,2283$. Ο εκπαιδευτικός πρέπει να επιμένει στη διαδικασία επαλήθευσης και στην καλή προσέγγιση των δυο διαστημάτων.

Διερεύνηση 2

Αναμένεται να χρησιμοποιήσουν τις τιμές που αναφέρθηκαν παραπάνω καθώς και την ίδια διαδικασία. Ο εκπαιδευτικός μπορεί να ζητήσει από τους μαθητές να προβλέπουν τα δυο διαστήματα επιλέγοντας δικές τους τιμές στο δ και στο ε και στη συνέχεια να επαληθεύουν τις επιλογές τους με τη βοήθεια του λογισμικού.

Διερεύνηση 3

Οι μαθητές αναμένεται να επαναλάβουν την ίδια διαδικασία που χρησιμοποίησαν στις δυο προηγούμενες διερευνήσεις. Μια ενδεικτική τιμή για τα δ και ε είναι: $\varepsilon = 0,1259$ και $\delta = 0,1284$.

Διερεύνηση 4

Οι μαθητές αναμένεται να επιλέξουν για το $n=1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \dots$ ή $n=-1, -2, -3, \dots$ και σε κάθε περίπτωση διάφορες τιμές για τους συντελεστές κ και λ . Έτσι θα μπορούν να εφαρμόζουν την διαδικασία που αναπτύχθηκε παραπάνω σε διάφορες συναρτήσεις και σε διάφορα σημεία τους. Η προτεινόμενη διαδικασία της πρόβλεψης των τιμών δ και ε καθώς και των διαστημάτων γύρω από το x_0 και $f(x_0)$ που αυτές ορίζουν θα τους βοηθήσει να θεωρητικοποιήσουν μια διαδικασία που αφενός μπορεί να συνεχίζεται όσο θέλουμε και αφετέρου τα διαστήματα αυτά μπορούν να προσεγγίζουν τις τιμές των x_0 $f(x_0)$ όσο θέλουμε.

4.1.5 Θέμα 2: Το ε και το δ του ορίου

Στην επιφάνεια εργασίας του παρακάτω μικρόκοσμου έχει σχεδιαστεί η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \kappa \cdot x^\nu + \lambda$ καθώς και οι ευθείες $\psi = L$ και $x = \chi_0$. Ένα ορθογώνιο που δημιουργείται από τις ευθείες $\psi = L - \varepsilon$, $\psi = L + \varepsilon$, $x = \chi_0 - \delta$ και $x = \chi_0 + \delta$ μπορεί να κινείται ελεύθερα σύροντας το σημείο χ_0 αλλά και να μεταβάλλονται οι διαστάσεις του μέσω των μεταβολών των δ και ε . Μπορείτε για κάθε χ_0 να ερευνήσετε για το όριο της συνάρτησης στο σημείο αυτό;

Διερευνήσεις

1. Επιλέξτε οι δείκτες των μεταβολών να δείχνουν $\kappa=1$, $\lambda=-2$ και $\nu=1$. Επιλέξτε ακόμα το σημείο χ_0 να είναι στη θέση $(1,0)$ και ο δείκτης του μεταβολέα ε να δείχνει 0,3. Μπορείτε να ορίσετε με τη βοήθεια του μεταβολέα δ μια κατάλληλη τιμή ώστε το ορθογώνιο που θα ορίσετε να δίνει μια ικανοποιητική προσέγγιση στο όριο της συνάρτησης στο χ_0 ; Μπορείτε να επαναλάβετε τον ορισμό του δ όταν μικραίνειτε την τιμή του ε ;
2. Επιλέξτε οι δείκτες των μεταβολών να δείχνουν $\kappa=1$, $\lambda=-2$ και $\nu=1$. Μπορείτε να ερευνήσετε για τις τιμές του δ που ορίζουν μια καλή προσέγγιση του ορίου της συνάρτησης στα σημεία $\chi_0 = 2$, όταν το ε δείχνει 0,03; Μπορείτε να εξηγήσετε αλγεβρικά αυτή την προσέγγιση του ορίου;
3. Με την επιλογή Redefine επανακαθορίστε τον τύπο της συνάρτησης ως εξής: $f(x) = \kappa \cdot (x-1)^\nu + \lambda$. Στη συνέχεια επιλέξτε οι δείκτες των μεταβολών να δείχνουν $\kappa=2$, $\lambda=1$ και $\nu=0.5$. Μπορείτε να ερευνήσετε για το όριο της συνάρτησης στα διάφορα σημεία της καμπύλης; Τι συμβαίνει στο αριστερό άκρο της καμπύλης; Μπορείτε να εξηγήσετε αλγεβρικά την προσέγγιση του ορίου με το ορθογώνιο;
4. Μπορείτε να υπολογίσετε το όριο της συνάρτησης $f(x) = \frac{3x-5}{\sqrt{x^2-10x+25}}$ στο $\chi_0=5$;

Ανακεφαλαίωση: Συζητήστε στην τάξη σας με τους μαθητές σας για τον τρόπο με τον οποίο ερευνήσαν το όριο στο σημείο χ_0 των διαφόρων συναρτήσεων. Ζητήστε τους να περιγράψουν στην τάξη ένα αλγεβρικό τρόπο προσδιορισμού της τιμής του δ για κάθε επιλογή της τιμής ε στις διάφορες συναρτήσεις. Ζητήστε τους να περιγράψουν τους λόγους για τους οποίους δεν μπορούν να ορίσουν ένα ορθογώνιο γύρω από το $\chi_0 = 5$ στην περίπτωση της 4ης διερεύνησης.

ΟΔΗΓΙΕΣ ΠΡΟΣ ΤΟΝ ΔΙΔΑΣΚΟΝΤΑ

Για τη διαχείριση των εργαλείων του μικρόκοσμου

Ζητήστε από τους μαθητές:

- Να κινούν τον κάθε μεταβολέα κατάλληλα ώστε να ορίσουν την εξίσωση της συνάρτησης σύμφωνα με τη διερεύνηση.
- Να μετακινούν τα σημεία χ_0 και L ώστε να ορίσουν το κατάλληλο σημείο της συνάρτησης για να διερευνήσουν το όριο στο χ_0 .

- Να κινούν τους μεταβολείς ε και δ για να προσαρμόσουν το ορθογώνιο στην καμπύλη της συνάρτησης.
- Να επαναπροσδιορίζουν τα χαρακτηριστικά (Ιδιότητες) των μεταβολέων για να μπορούν να επαναπροσδιορίζουν την συνάρτηση της οποίας μελετούν το όριο στο x_0 .

Για τις διερευνήσεις

Ζητήστε από τους μαθητές να παρατηρούν, να προβλέπουν, να ελέγχουν και να εκφράζουν στην ομάδα τους και στην τάξη:

- Για το γράφημα:
 - ✓ Τη μορφή του γραφήματος που ορίζεται από τις τιμές των μεταβολέων.
 - ✓ Πώς πρέπει να κινούν τους μεταβολείς ε και δ για να προσαρμόσουν το ορθογώνιο πάνω στη καμπύλη.
 - ✓ Επιλέγουν την εντολή «Zoom» για να μεγεθύνουν κοντά στο $f(x_0)$.
- Για την αλγεβρική διαπραγμάτευση:
 - ✓ Καταγράφουν τις τιμές των $L-\varepsilon$, $L+\varepsilon$, $x_0-\varepsilon$ και $x_0+\varepsilon$ κάθε φορά που ταιριάζουν το ορθογώνιο στην καμπύλη.
 - ✓ Υπολογίζουν την ανισοτική σχέση που πληρούν οι τετμημένες και οι τεταγμένες της καμπύλης που ανήκουν στο εσωτερικό του ορθογωνίου.

Για τις απαντήσεις

Ζητήστε από τους μαθητές να εκφράσουν στην τάξη τις απαντήσεις τους. Είναι πιθανόν οι μαθητές να δώσουν απαντήσεις όπως οι παρακάτω:

Διερεύνηση 1

Οι μαθητές αξιοποιώντας την εμπειρία από την προηγούμενη εργασία 1 αναμένεται να κάνουν τις εξής ενέργειες:

(1) Να επιλέξουν κατάλληλα τις τιμές των δεικτών των κ και λ ώστε να ορίσουν τη ζητούμενη συνάρτηση. (2) Να μετακινήσουν το σημείο x_0 στη θέση (1,0). (3) Να μετακινήσουν το σημείο L στη κατάλληλη θέση της καμπύλης (4) Να μετακινήσουν τον δείκτη ε να δείχνει 0,3 και να αναζητήσουν την τιμή του δείκτη δ μέχρι τα άκρα της διαγωνίου του ορθογωνίου να ανήκουν στη καμπύλη. (5) Να καταγράψουν τις τιμές των ε και δ . Π.χ. αν $\varepsilon=0,3$ και $\delta=0,3$ στο ορθογώνιο ανήκουν τα σημεία της καμπύλης που έχουν τετμημένες x που ανήκουν στην περιοχή $x_0-0,3 < x < x_0+0,3$ και τεταγμένες που ανήκουν στην περιοχή $L-0,3 < f(x) < L+0,3$. (5) Επιλέγουν μεγέθυνση (Zoom) κοντά στο σημείο τομής των δυο ευθειών και επαναλαμβάνουν τα προηγούμενα προκειμένου να ορίσουν ένα μικρότερο ορθογώνιο γύρω από το σημείο (x_0, L) (Αναμένεται, για $\varepsilon=0,99$ να βρουν $\delta=0,99$, για $\varepsilon=0,03$ να βρουν $\delta=0,03$ κ.ο.κ. (6) Να καταγράφουν τις τιμές των $L-\varepsilon$, $L+\varepsilon$, $x_0-\delta$ και $x_0+\delta$. (7) Να επιβεβαιώνουν την σχέση των δ και ε λύνοντας την σχετική ανίσωση τοποθετώντας στη θέση του $x_0=1$ και $f(x_0)=-1$. Ο εκπαιδευτικός πρέπει να επιμένει στη διαδικασία επαλήθευσης και στην καλή προσέγγιση των δυο διαστημάτων. Οι μαθητές αναμένεται να παρατηρήσουν ότι οι τιμές των δ και ε που ορίζουν το ορθογώνιο είναι πάντοτε ίσες. Ο εκπαιδευτικός πρέπει να ζητήσει από τους μαθητές να το επαληθεύουν και αλγεβρικά.

Διερεύνηση 2

Οι μαθητές αξιοποιώντας την εμπειρία από την προηγούμενη διερεύνηση 1 αναμένεται (1) να μετακινήσουν την ευθεία L στη θέση (0,0) και (2) να προβλέψουν ότι για $\alpha\epsilon=0,03$ το $\delta=0,03$. Ο εκπαιδευτικός μπορεί να ζητήσει από τους μαθητές να επαναλάβουν τις προβλέψεις τους και για άλλες τιμές του ϵ και να επαληθεύσουν τις προβλέψεις τους οπτικά (κάνοντας μεγέθυνση κοντά στο σημείο τομής των δυο ευθειών) αλλά και αλγεβρικά αξιοποιώντας την εμπειρία που απέκτησαν από την εργασία 1.

Διερεύνηση 3

Οι μαθητές αναμένεται να επαναλάβουν την ίδια διαδικασία που χρησιμοποίησαν στις δυο προηγούμενες διερευνήσεις για να ερευνήσουν το όριο της συνάρτησης στα διάφορα σημεία της. Στο αριστερό άκρο της συνάρτησης, δηλαδή στο (1,1) πρέπει να οδηγήσουν το κέντρο του ορθογωνίου στο σημείο αυτό και να προσπαθήσουν να ορίσουν έτσι τα ϵ και δ ώστε να προσαρμοστεί στην καμπύλη μόνο η μία κορυφή της διαγωνίου. Για παράδειγμα αν επιλέξουν το $\epsilon=0.1933$ μια καλή προσέγγιση του δ ώστε το ορθογώνιο να προσαρμόζεται είναι $\delta=0,0135$. Ο εκπαιδευτικός στην περίπτωση αυτή μπορεί να μιλήσει στους μαθητές του για το πλευρικό όριο της $f(x)$ στο $x_0=1$.

Διερεύνηση 4

Οι μαθητές για να βρουν το όριο της συνάρτησης $f(x)=\frac{3x-5}{\sqrt{x^2-10x+25}}$ στο $x_0=5$

αναμένεται να κάνουν τις εξής ενέργειες. (1) Να χρησιμοποιήσουν την εντολή Redefine για να πληκτρολογήσουν την συνάρτηση. Μάλιστα αναμένεται να πληκτρολογήσουν τον τύπο $f(x)=(3*x-5)/\text{sqrt}(x^2-10*x+25)$. (2) Να οδηγήσουν το x_0 στο σημείο (5,0). (3) Να επιχειρήσουν να οδηγήσουν το σημείο L στη θέση που η ευθεία που διέρχεται από το L να τέμνει την καμπύλη. Αναμένεται να διαπιστώσουν ότι δεν μπορούν να ορίσουν ορθογώνιο προσαρμοσμένο στην καμπύλη που να περιέχει τμήμα της. Αυτό μπορεί να ερμηνευθεί ότι η συνάρτηση δεν έχει στο x_0 όριο πραγματικό αριθμό. Ο εκπαιδευτικός μπορεί να υποδείξει στους μαθητές να χρησιμοποιήσουν την εντολή «Zoom» για να κάνουν σμίκρυνση της επιφάνειας εργασίας ή να επιλέξουν με δεξί κλικ την επιφάνεια εργασίας και στη συνέχεια να επιλέξουν τον άξονα $\psi\psi'$ και να ορίσουν να παίρνει μεγάλες τιμές. Έτσι θα μπορούν να δουν ότι όσο μεγαλύτερες τιμές του ψ χρησιμοποιούν τόσο καλύτερα μπορούν να ορίσουν ένα ορθογώνιο που να περιέχει μέρος της καμπύλης. Αυτή η εμπειρία είναι χρήσιμη για να συζητηθεί στην τάξη η περίπτωση που το όριο της συνάρτησης στο x_0 είναι $+\infty$.

4.1.6 Θέμα 3: Το όριο συνάρτησης διπλού τύπου στο χ_0

Στην επιφάνεια εργασίας του παρακάτω μικρόκοσμου έχει σχεδιαστεί η γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$f(x) = \begin{cases} \alpha x + \beta, & x < \chi_0 \\ \kappa x + \lambda, & x > \chi_0 \end{cases}$$

Μπορείτε να ερευνήσετε για το όριο της συνάρτησης (1) στα διάφορα σημεία της καμπύλης και (2) στο σημείο χ_0 ;

ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΕΙΣ

1. Επιλέξτε οι δείκτες των μεταβολέων να δείχνουν $\alpha=1$, $\beta=0$, $\kappa=-0.4$, $\lambda=3$, $\mu=-1$ και $\nu=2$. Ακόμα επιλέξτε το σημείο A να είναι στη θέση (2,0) και το σημείο χ_0 να είναι στη θέση (1,0). Αν ο δείκτης του μεταβολέα ε να δείχνει 0,3 μπορείτε να ορίσετε με τη βοήθεια του μεταβολέα δ μια κατάλληλη τιμή ώστε το ορθογώνιο που θα ορίσετε να δίνει μια ικανοποιητική προσέγγιση στο όριο της συνάρτησης στο χ_0 ; Μπορείτε να επαναλάβετε τον ορισμό του δ όταν μικραίνετε την τιμή του ε ;
Μπορείτε να εκφράσετε αλγεβρικά την περιοχή αυτή;
2. Επιλέξτε οι δείκτες των μεταβολέων να δείχνουν $\alpha=1$, $\beta=0$, $\kappa=-0.4$, $\lambda=3$, $\mu=-1$ και $\nu=2$. Ακόμα επιλέξτε το σημείο A να είναι στη θέση (2,0) και το σημείο χ_0 να είναι στη θέση (3,0). Αν ο δείκτης του μεταβολέα ε δείχνει 0,1 μπορείτε να ορίσετε με τη βοήθεια του μεταβολέα δ μια κατάλληλη τιμή ώστε το ορθογώνιο που θα ορίσετε να δίνει μια ικανοποιητική προσέγγιση στο όριο της συνάρτησης στο χ_0 ; Μπορείτε να επαναλάβετε τον ορισμό του δ όταν μικραίνετε την τιμή του ε ;
Μπορείτε να εκφράσετε αλγεβρικά την περιοχή αυτή;
3. Επιλέξτε οι δείκτες των μεταβολέων να δείχνουν $\alpha=1$, $\beta=0$, $\kappa=-0.4$, $\lambda=3$, $\mu=-1$ και $\nu=2$. Ακόμα επιλέξτε το σημείο A να είναι στη θέση (2,0) και το σημείο χ_0 να είναι στη θέση (2,0). Μπορείτε με τους δείκτες των μεταβολέων ε και δ να ορίσετε ένα κατάλληλα προσαρμοσμένο ορθογώνιο που να δίνει μια προσέγγιση στο όριο της συνάρτησης στο χ_0 ; Μπορείτε να εξηγήσετε την κατάσταση αυτή αλγεβρικά;
4. Επιλέξτε οι δείκτες των μεταβολέων να δείχνουν $\alpha=1$, $\beta=0$, $\kappa=-0.4$, $\lambda=3$, $\mu=-1$ και $\nu=2$. Ακόμα επιλέξτε το σημείο A να είναι στη θέση (2,0) και το σημείο χ_0 να είναι στη θέση (2,0). Τι πρέπει να μεταβάλλετε στον ορισμό της συνάρτησης ώστε αυτή να έχει όριο στο σημείο χ_0 . Μπορείτε με τους δείκτες των μεταβολέων ε και δ να ορίσετε τώρα ένα κατάλληλα προσαρμοσμένο ορθογώνιο που να δίνει μια προσέγγιση στο όριο της συνάρτησης στο χ_0 ; Μπορείτε να εξηγήσετε την κατάσταση αυτή αλγεβρικά;

Ανακεφαλαίωση: Συζητήστε στην τάξη με τους μαθητές σας για τον τρόπο με τον οποίο ερευνήσαν το όριο στα διάφορα σημεία της διπλού τύπου συνάρτησης. Ζητήστε τους να περιγράψουν στην τάξη πώς μπορεί να υπολογιστεί το όριο μιας συνάρτησης διπλού τύπου στα διάφορα σημεία της.

ΟΔΗΓΙΕΣ ΠΡΟΣ ΤΟΝ ΔΙΔΑΣΚΟΝΤΑ

Για τη διαχείριση των εργαλείων του μικρόκοσμου

Ζητήστε από τους μαθητές:

- Να κινούν τον κάθε μεταβολέα κατάλληλα ώστε να ορίσουν την εξίσωση της συνάρτησης σύμφωνα με την διερεύνηση.
- Να μετακινούν τα σημείο x_0 και L ώστε να ορίσουν το κατάλληλο σημείο της συνάρτησης για να διερευνήσουν το όριο στο x_0 .
- Να κινούν τους μεταβολείς ε και δ για να προσαρμόσουν το ορθογώνιο στην καμπύλη της συνάρτησης.
- Να επαναπροσδιορίζουν τα χαρακτηριστικά (Ιδιότητες) των μεταβολέων για να μπορούν να επαναπροσδιορίζουν την συνάρτηση της οποίας μελετούν το όριο στο x_0 .

Για τις διερευνήσεις

Ζητήστε από τους μαθητές να παρατηρούν, να προβλέπουν, να ελέγχουν και να εκφράζουν στην ομάδα τους και στην τάξη:

- Για το γράφημα:
 - ✓ Τη μορφή του γραφήματος που ορίζεται από τις τιμές των μεταβολέων.
 - ✓ Πώς πρέπει να κινούν τους μεταβολείς ε και δ για να προσαρμόσουν το ορθογώνιο πάνω στη καμπύλη.
 - ✓ Επιλέγουν την εντολή «Zoom» για να μεγεθύνουν κοντά στο $f(x_0)$.
- Για την αλγεβρική διαπραγμάτευση:
 - ✓ Καταγράφουν τις τιμές των $L-\varepsilon$, $L+\varepsilon$, $x_0-\varepsilon$ και $x_0+\varepsilon$ κάθε φορά που ταιριάζουν το ορθογώνιο στην καμπύλη.
 - ✓ Υπολογίζουν την ανισοτική σχέση που πληρούν οι τετμημένες και οι τεταγμένες της καμπύλης που ανήκουν στο εσωτερικό του ορθογωνίου.

Για τις απαντήσεις

Ζητήστε από τους μαθητές να εκφράσουν στην τάξη τις απαντήσεις τους. Είναι πιθανόν οι μαθητές να δώσουν απαντήσεις όπως οι παρακάτω:

Διερεύνηση 1

Οι μαθητές αξιοποιώντας την εμπειρία από τις προηγούμενες εργασίες 1 και 2 αναμένεται να κάνουν τις εξής ενέργειες:

(1) Να επιλέξουν κατάλληλα τις τιμές των δεικτών των κ , λ , μ , ν , α και β ώστε να ορίσουν τις δυο συναρτήσεις. (2) Να μετακινήσουν το σημείο A στη θέση $(2,0)$ και το x_0 στη θέση $(1,0)$. (3) Να μετακινήσουν το σημείο L στη κατάλληλη θέση της καμπύλης (4) Να μετακινήσουν τον δείκτη ε να δείχνει 0,3 και να αναζητήσουν την τιμή του δείκτη δ μέχρι τα άκρα της διαγωνίου του ορθογωνίου να ανήκουν στη καμπύλη. (5) Να καταγράψουν τις τιμές των ε και δ . Π.χ. αν $\varepsilon=0,3$ και $\delta=0,3$ στο ορθογώνιο ανήκουν τα σημεία της καμπύλης που έχουν τετμημένες x που ανήκουν

στην περιοχή $\chi_0 - 0,3 < x < \chi_0 + 0,3$ και τεταγμένες που ανήκουν στην περιοχή $L - 0,3 < f(x) < L + 0,3$. (5) Επιλέγουν μεγέθυνση (Zoom) κοντά στο σημείο τομής των δυο ευθειών και επαναλαμβάνουν τα προηγούμενα προκειμένου να ορίσουν ένα μικρότερο ορθογώνιο γύρω από το σημείο (χ_0, L) (Αναμένεται, για $\varepsilon = 0,99$ να βρουν $\delta = 0,99$, για $\varepsilon = 0,03$ να βρουν $\delta = 0,03$ κ.ο.κ.) (6) Να καταγράφουν τις τιμές των $L - \varepsilon$, $L + \varepsilon$, $\chi_0 - \delta$ και $\chi_0 + \delta$. (7) Να επιβεβαιώνουν την σχέση των δ και ε λύνοντας την σχετική ανίσωση τοποθετώντας στη θέση του $x_0 = 1$ και $f(x_0) = -1$. Ο εκπαιδευτικός πρέπει να επιμείνει στη διαδικασία επαλήθευσης και στη καλή προσέγγιση των δυο διαστημάτων. Οι μαθητές αναμένεται να παρατηρήσουν ότι οι τιμές των δ και ε που ορίζουν το ορθογώνιο είναι πάντοτε ίσες. Ο εκπαιδευτικός πρέπει να ζητήσει από τους μαθητές να το επαληθεύουν και αλγεβρικά.

Διερεύνηση 2

Οι μαθητές αξιοποιώντας την εμπειρία από την προηγούμενη διερεύνηση 1 αναμένεται (1) να μετακινήσουν την ευθεία L στη κατάλληλη θέση $(0, 4,4)$ ώστε το κέντρο του ορθογωνίου να ανήκει πάνω στη καμπύλη της συνάρτησης και (2) να επιλέξουν για $\varepsilon = 0,01$ και να βρουν κατάλληλο δ ώστε το ορθογώνιο να προσαρμόζεται στη καμπύλη. Μια πιθανή τιμή του δ μπορεί να είναι η $\delta = 0,1621$. Ο εκπαιδευτικός μπορεί να ζητήσει από τους μαθητές να επαναλάβουν την ίδια διαδικασία και για άλλες τιμές του ε και να επαληθεύσουν τις προβλέψεις τους οπτικά (κάνοντας μεγέθυνση κοντά στο σημείο τομής των δυο ευθειών). Η περιοχή που ανήκει το χ είναι $3 - 0,1621 < \chi < 3 + 0,1621$ ενώ η περιοχή που ανήκουν οι αντίστοιχες τιμές της συνάρτησης είναι $4,4 - 0,1 < f(x) < 4,4 + 0,1$. Οι μαθητές αναμένεται να παρατηρήσουν πώς όσο μικραίνουν την τιμή του ε (δηλαδή όσο πιο κοντά στη τιμή $f(x_0)$ βρίσκονται) τόσο μικραίνει και η τιμή του δ (τόσο πιο κοντά στο x_0 παίρνουν τιμές για το χ)

Διερεύνηση 3

Οι μαθητές αναμένεται να παρατηρήσουν ότι δεν μπορούν να προσαρμόσουν ένα ορθογώνιο πάνω στην καμπύλη και ταυτόχρονα ενώ μικραίνουν τις τιμές του ε μπορούν να επιλέγουν κατάλληλο δ ώστε το ορθογώνιο να προσαρμόζεται. Η αλγεβρική εξήγηση μπορεί να δοθεί επιλέγοντας μια τυχαία τιμή για το ε και λύνοντας την ανίσωση $L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$ όπου L μια κατάλληλη τιμή που προσδιορίζει τη θέση του κέντρου του ορθογωνίου. Όταν το L είναι στη θέση $(0,2)$ τότε ο αριστερός κλάδος της συνάρτησης (δηλαδή η $f(x) = ax + \beta$) μπορεί να προσαρμοστεί στο σχετικό ορθογώνιο μόνο από αριστερά. Όταν το L είναι στη θέση $(0,3,4)$ τότε ο δεξιός κλάδος της συνάρτησης (δηλαδή η $g(x) = kx^2 + \lambda x + \mu$) μπορεί να προσαρμοστεί στο σχετικό ορθογώνιο μόνο από δεξιά. Η προσαρμογή και στα δυο άκρα ταυτόχρονα δεν μπορεί να γίνει καθώς μεταξύ των κλάδων υπάρχει κενό.

Διερεύνηση 4

Οι μαθητές μπορούν να μετακινήσουν τον δείκτη ώστε να καλυφθεί το κενό μεταξύ των τιμών των δυο συναρτήσεων. Η κατάλληλη τιμή είναι $\mu = 2,4$. Στην περίπτωση αυτή μπορεί να προσαρμοστεί το ορθογώνιο κατάλληλα αρκεί το L να μετακινηθεί στη θέση $(0,2)$. Δηλαδή μπορούν να γίνουν οι προσαρμογές ταυτόχρονα. Ο εκπαιδευτικός μπορεί να ζητήσει από τους μαθητές να επιλέξουν για ε μια τιμή, π.χ. $0,3$ και να αναζητήσουν την κατάλληλη τιμή για το δ . Επειδή οι δυο καμπύλες έχουν διαφορετική μορφή οι μαθητές δεν θα μπορούν να προσαρμόσουν και τις δυο κορυφές του ορθογωνίου ταυτόχρονα. Δηλαδή θα πρέπει να υπολογίσουν δυο τιμές για να προσαρμόσουν το ορθογώνιο. Για να προσαρμόσουν το ορθογώνιο στην $f(x)$

πρέπει να επιλέξουν ως τιμή του δ το 0,2971. Για να προσαρμόσουν την μια κορυφή της διαγωνίου του ορθογωνίου στη $g(x)$ πρέπει να επιλέξουν για δ την τιμή 0,2051. Ο εκπαιδευτικός μπορεί να κατευθύνει τους μαθητές να επιλέξουν την μικρότερη τιμή του δ και για τις δυο περιπτώσεις οπότε έτσι εξασφαλίζεται, ότι για όλες οι τιμές του x που βρίσκονται μεταξύ του $x_0 - \delta_\mu$ και $x_0 + \delta_\mu$ οι αντίστοιχες τιμές της συνάρτησης ανήκουν στο διάστημα $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$.

4.1.7 Θέμα 4: Το θεώρημα των ισοσυγκλινουσών συναρτήσεων

Στην επιφάνεια εργασίας του παρακάτω μικρόκοσμου έχει σχεδιαστεί η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=a \cdot x^{\rho} \cdot \sin(\beta/x^{\mu})$ καθώς και των συναρτήσεων $g(x)=\kappa \cdot x^{\nu}$ και $h(x) = -\kappa \cdot x^{\nu}$. Μπορείτε να ερευνήσετε σε ποιες περιπτώσεις η συνάρτηση $f(x)$ είναι για κάθε x ανάμεσα στις $g(x)$ και $h(x)$;

ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΕΙΣ

1. Επιλέξτε οι δείκτες των μεταβολών να δείχνουν $a=1$, $\beta=1$, $\mu=1$, $\rho=1$ και $\nu=1$. Ποιά είναι η ελάχιστη τιμή του κ ώστε η συνάρτηση $f(x)$ να βρίσκεται πάντοτε ανάμεσα στις συναρτήσεις $g(x)$ και $h(x)$. Τι συμβαίνει στο γράφημα όταν μεταβάλλετε τον δείκτη του μεταβολέα β ; Μπορείτε να εκφράσετε αλγεβρικά την περιοχή αυτή;
2. Επιλέξτε οι δείκτες των μεταβολών να δείχνουν $a=1$, $\beta=2$, $\mu=1$ και $\rho=2$. Ποιά είναι η ελάχιστη τιμή του κ και του ν ώστε η συνάρτηση $f(x)$ να βρίσκεται πάντοτε ανάμεσα στις συναρτήσεις $g(x)$ και $h(x)$. Τι συμβαίνει στο γράφημα όταν μεταβάλλετε τους δείκτες των μεταβολών β και μ ; Μπορείτε να εκφράσετε αλγεβρικά την περιοχή αυτή;
3. Επιλέξτε οι δείκτες των μεταβολών να δείχνουν $a=-0.3$, $\beta=1$, $\rho=0.5$ και $\mu=2$. Ποιά είναι η ελάχιστη τιμή του κ και του ν ώστε η συνάρτηση $f(x)$ να βρίσκεται πάντοτε ανάμεσα στις συναρτήσεις $g(x)$ και $h(x)$. Τι συμβαίνει στο γράφημα όταν μεταβάλλετε τους δείκτες των μεταβολών β και μ ; Μπορείτε να εξηγήσετε την κατάσταση αυτή αλγεβρικά;
4. Επιλέξτε οι δείκτες των μεταβολών να δείχνουν $a=0.5$, $\mu=1$ και $\rho=1$. Ποιά είναι η ελάχιστη τιμή του κ και του ν ώστε η συνάρτηση $f(x)$ να βρίσκεται πάντοτε ανάμεσα στις συναρτήσεις $g(x)$ και $h(x)$. Τι συμβαίνει στο γράφημα όταν μεταβάλλετε τους δείκτες των μεταβολών β και μ ; Μπορείτε να εξηγήσετε την κατάσταση αυτή αλγεβρικά;

Ανακεφαλαίωση: Συζητήστε στη τάξη με τους μαθητές σας για το θεώρημα των ισοσυγκλινουσών συναρτήσεων. Ζητήστε τους να εκφράσουν ένα γενικό συμπέρασμα για το όριο στο 0 των ισοσυγκλινουσών συναρτήσεων που μελετήσατε. Ζητήστε τους να δώσουν μια εξήγηση σε κάθε περίπτωση που ερεύνησαν αλγεβρικά.

ΟΔΗΓΙΕΣ ΠΡΟΣ ΤΟΝ ΔΙΔΑΣΚΟΝΤΑ

Για τη διαχείριση των εργαλείων του μικρόκοσμου

Ζητήστε από τους μαθητές:

- Να κινούν τον κάθε μεταβολέα κατάλληλα ώστε να ορίσουν τις εξισώσεις των συναρτήσεων σύμφωνα με την διερεύνηση.
- Να κινούν τον μεταβολέα του χ_0 ώστε να ορίζουν το τετράγωνο στο οποίο παρατηρούν τις συναρτήσεις
- Να επαναπροσδιορίζουν τα χαρακτηριστικά (Ιδιότητες) των μεταβολών για να μπορούν να επαναπροσδιορίζουν την συνάρτηση της οποίας μελετούν το όριο στο χ_0 .

Για τις διερευνήσεις

Ζητήστε από τους μαθητές να παρατηρούν, να προβλέπουν, να ελέγχουν και να εκφράζουν στην ομάδα τους και στην τάξη:

- Για το γράφημα:
 - ✓ Τη μορφή του γραφήματος της συνάρτησης $f(x)$ που ορίζεται από τις τιμές των μεταβολών των συντελεστών της.
 - ✓ Τη μορφή του γραφήματος των συναρτήσεων $g(x)$ και $h(x)$ που ορίζεται από τις των μεταβολών των συντελεστών της.
 - ✓ Επιλέγουν την εντολή «Zoom» για να μεγεθύνουν κοντά στο 0.
- Για την αλγεβρική διαπραγμάτευση:
 - ✓ Καταγράφουν τις ανισοτικές σχέσεις μεταξύ των τιμών των συναρτήσεων που βρίσκονται στο εσωτερικό του τετραγώνου.
 - ✓ Υπολογίζουν την ανισοτική σχέση που πληρούν οι τετμημένες και οι τεταγμένες των σημείων που ανήκουν στο εσωτερικό του τετραγώνου.

Για τις απαντήσεις

Ζητήστε από τους μαθητές να εκφράσουν στην τάξη τις απαντήσεις τους. Είναι πιθανόν οι μαθητές να δώσουν απαντήσεις όπως οι παρακάτω:

Διερεύνηση 1

Οι μαθητές αναμένεται να βρουν ότι πρέπει να επιλέξουν για το κ την τιμή 1. Οι μαθητές αναμένεται να παρατηρήσουν ότι οι τιμές της συνάρτησης $f(x)$ είναι πάντοτε ανάμεσα στις συναρτήσεις $g(x)$ και $h(x)$. Δηλαδή ότι ισχύει $g(x) < f(x) < h(x)$. Ο εκπαιδευτικός πρέπει να ζητήσει από τους μαθητές να επαληθεύουν και αλγεβρικά την διπλή ανισότητα.

Διερεύνηση 2

Οι μαθητές αναμένεται να βρουν ότι πρέπει να επιλέξουν για το κ την τιμή 1 και για την τιμή του ν το 2. Οι μαθητές αναμένεται να παρατηρήσουν ότι οι τιμές της συνάρτησης $f(x)$ είναι πάντοτε ανάμεσα στις συναρτήσεις $g(x)$ και $h(x)$. Δηλαδή ότι ισχύει $g(x) < f(x) < h(x)$. Ο εκπαιδευτικός πρέπει να ζητήσει από τους μαθητές να επαληθεύουν και αλγεβρικά την διπλή ανισότητα.

Διερεύνηση 3

Οι μαθητές αναμένεται να επαναλάβουν την ίδια διαδικασία που χρησιμοποίησαν στις δυο προηγούμενες διερευνήσεις και να βρουν ότι πρέπει να επιλέξουν $\kappa = -0,3$ και $\nu = 0,5$ για να κάνουν σάντουιτς την $f(x)$ με τις $g(x)$ και $h(x)$. Σε κάθε αλλαγή των δεικτών των β και μ το γράφημα της συνάρτησης εξακολουθεί να παραμένει ανάμεσα στις $g(x)$ και $h(x)$.

Διερεύνηση 4

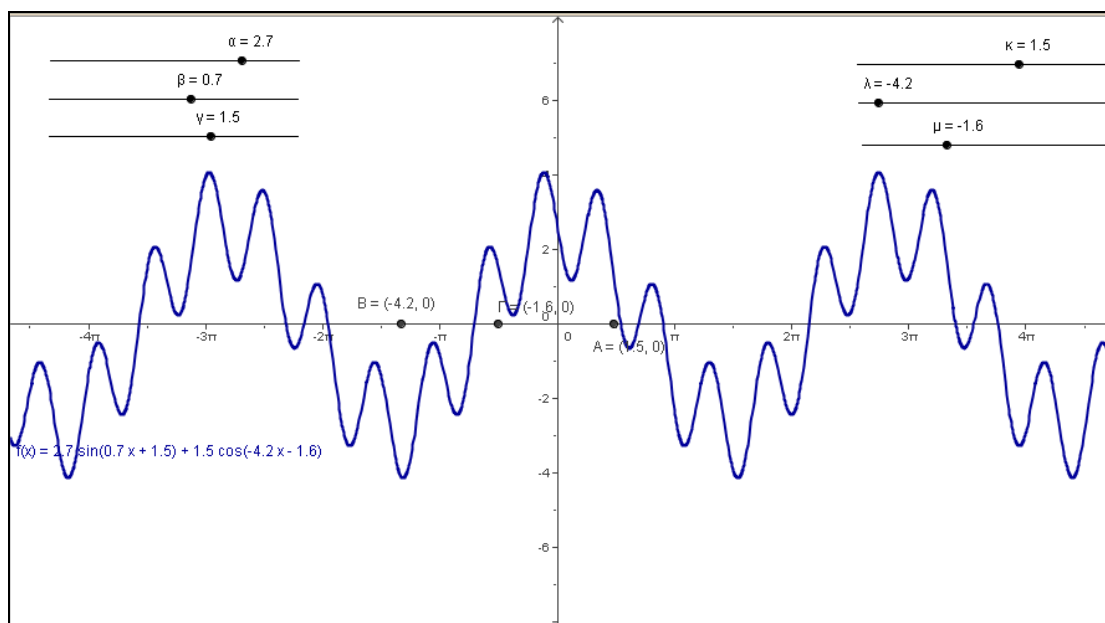
Οι μαθητές αναμένεται να επαναλάβουν την ίδια διαδικασία και να βρουν ότι πρέπει να επιλέξουν $\kappa = 0.5$ και $\nu = 1$ για να κάνουν σάντουιτς την $f(x)$ με τις $g(x)$ και $h(x)$. Σε κάθε αλλαγή των δεικτών των β και μ το γράφημα της συνάρτησης εξακολουθεί να παραμένει ανάμεσα στις $g(x)$ και $h(x)$.

Η αλγεβρική εξήγηση μπορεί να δοθεί αν ληφθεί υπόψη η εξίσωση της $f(x) = a \cdot x^p \cdot \sin(\beta/x^\mu)$ όπου ισχύουν τα εξής:

$$-1 \leq \sin(\beta/x^\mu) \leq 1. \text{ Άρα } -a \cdot x^p \leq f(x) \leq a \cdot x^p.$$

Έτσι οι μεταβολές των β και μ μεταβάλλουν μόνο την συνάρτηση $f(x)$ στο εσωτερικό των $g(x)$ και $h(x)$.

4.2 ΣΕΝΑΡΙΟ 8 : Συνέχεια Συνάρτησης και εφαρμογές



4.2.1 Η κεντρική ιδέα του σεναρίου

Στο σενάριο αυτό οι μαθητές καλούνται να διερευνήσουν για τη συνέχεια της συνάρτησης σε ένα σημείο του πεδίου ορισμού της καθώς και να εφαρμόσουν μερικά από τα πιο σημαντικά θεωρήματα που συνδέονται με τη συνέχεια, όπως το θεώρημα Bolzano και το θεώρημα των ενδιάμεσων τιμών.

Οι μαθητές χρησιμοποιούν τους μεταβολείς για να ορίσουν τις εξισώσεις των συναρτήσεων και το πεδίο ορισμού τους και μέσω αυτών να κάνουν επαληθεύσεις των συμπερασμάτων τους με αλγεβρικά μέσα (λύση ανίσωσης). Οι διαδικασίες αυτές αναμένεται να βοηθήσουν τους μαθητές να συγκροτήσουν την έννοια της συνέχειας και να την συνδέσουν με τα θεωρήματα ύπαρξης των ριζών και των ενδιάμεσων τιμών.

4.2.2 Στόχοι

- Να αποκτήσουν εμπειρίες σχετικές με την έννοια της συνέχειας συνάρτησης σε σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της.
- Να αποκτήσουν εμπειρίες σχετικές με την ύπαρξη και προσέγγιση των ριζών συνάρτησης.
- Να εκφράζουν ποιοτικά την διαδικασία εύρεσης των ριζών και του προσήμου συνάρτησης σε ένα πεδίο ορισμού της.
- Να μελετούν και να εκφράσουν ποιοτικά και αλγεβρικά ιδιότητες για το πλήθος των ριζών μιας συνάρτησης σε ένα διάστημα του πεδίου ορισμού της.

4.2.3 Διδακτική πρόταση

ΟΡΓΑΝΩΣΗ ΤΗΣ ΤΑΞΗΣ

Οι δραστηριότητες αυτές ενδείκνυται να διδάσκονται στο εργαστήριο υπολογιστών και οι μαθητές να εργάζονται σε ομάδες 2-3 ατόμων με φύλλο εργασίας. Μπορούν όμως να διεξαχθούν και στη τάξη που έχει μόνο έναν υπολογιστή με βιντεοπροβολέα. Σ' αυτή την περίπτωση οι μαθητές συμπληρώνουν τα φύλλα εργασίας με βάση τις παρατηρήσεις που κάνουν κατά την διερεύνηση που γίνεται απ' όλη την τάξη και κατευθύνεται από τον εκπαιδευτικό ή κάποιον μαθητή. Στο πλαίσιο αυτό κάνουν παρεμβάσεις στην διερεύνηση με τις οποίες εκφράζουν την δική τους στρατηγική στη διερεύνηση. Καθώς τέτοιες παρεμβάσεις μπορούν να γίνονται στην τάξη απ' όλους τους μαθητές ο διδάσκων πρέπει να τις υποστηρίζει και να επιδιώκει να συζητούνται όλες οι πιθανές στρατηγικές της διερεύνησης.

Σε κάθε περίπτωση ο εκπαιδευτικός πρέπει να έχει από πριν προετοιμάσει τον τρόπο που θα χειριστεί τις διαφορετικές στρατηγικές που πιθανόν να διατυπωθούν καθώς και τις πιθανές εκβάσεις τους.

Ακόμα πρέπει με τη στάση του να προκαλεί την εφαρμογή των διαφορετικών τρόπων διερεύνησης, να ενθαρρύνει κάθε μαθητή να δοκιμάζει τις ιδέες του, να εκφράζει τις εικασίες του και να διατυπώνει τα συμπεράσματά του ελεύθερα. Ακόμα πρέπει να ενθαρρύνει τους μαθητές να προσπαθούν να επαληθεύουν αλγεβρικά τα αποτελέσματα των διερευνήσεών τους.

ΟΙ ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΕΣ ΔΥΝΑΤΟΤΗΤΕΣ ΤΟΥ ΣΕΝΑΡΙΟΥ

Οι προτεινόμενες στο σενάριο δραστηριότητες αφορούν φαινόμενα τα οποία προκαλούνται από τη δράση των μαθητών σε προσχεδιασμένους υπολογιστικούς μικρόκοσμους με σκοπό την ανάδειξη των διερευνούμενων ιδιοτήτων τους. Έτσι οι απαντήσεις στα ερωτήματα που τίθενται στο πλαίσιο αυτών των διερευνήσεων αλλά και αυτών που ο διδάσκων ή οι ίδιοι οι μαθητές μπορούν να θέσουν είναι δυνατόν να αποτελέσουν ένα περιβάλλον απόκτησης και έκφρασης εμπειριών σχετικών με την έννοια της συνέχειας της συνάρτησης και με μια διαδικασία προσδιορισμού των ριζών της συνάρτησης σε ένα διάστημα του πεδίου ορισμού της. Τα εργαλεία που έχουν ενσωματωθεί στους μικρόκοσμους δίνουν τη δυνατότητα στους μαθητές,

- να κάνουν πειράματα με τον προσδιορισμό συγκεκριμένων συναρτήσεων προκειμένου να διερευνήσουν τη συνέχειά τους σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της.
- να παρατηρούν και να ερμηνεύουν τα αποτελέσματα των χειρισμών τους,
- να εκφράζουν εικασίες, να κάνουν γενικεύσεις, να διατυπώνουν υποθέσεις και θεωρήματα και να τα εκφράζουν με μαθηματικούς όρους.
- να λύνουν προβλήματα αλγεβρικού προσδιορισμού της συνέχειας συνάρτησης σε ένα σημείο του πεδίου ορισμού της
- να χρησιμοποιούν την έννοια της συνέχειας ως προϋπόθεση για την ύπαρξη ρίζας της συνάρτησης σε ένα σημείο του πεδίου ορισμού της.

Ακόμα, μπορούν να επεμβαίνουν και να επαναπροσδιορίζουν τις δυνατότητες των εργαλείων ή να επαναδιατυπώνουν τον τρόπο ορισμού των αντικειμένων και να μεταβάλλουν την εμφάνισή τους. Από αυτή την άποψη οι μικρόκοσμοι είναι

επαναχρησιμοποιήσιμοι και δίνουν τη δυνατότητα στους χρήστες να διατυπώνουν και νέα ερωτήματα που αφορούν ιδιαίτερες γνωστικές πτυχές των μαθηματικών αντικειμένων.

ΠΟΡΕΙΑ ΤΗΣ ΕΦΑΡΜΟΓΗΣ ΤΟΥ ΣΕΝΑΡΙΟΥ

Το σενάριο αποτελείται από τέσσερις εργασίες. Στην πρώτη, οι μαθητές διαπραγματεύονται τον προσδιορισμό των ριζών της συνάρτησης $f(x)=ax+\beta\cos(\gamma x)+\delta$. Στη δεύτερη, οι μαθητές διαπραγματεύονται το ίδιο αντικείμενο αλλά τώρα καλούνται να προσδιορίσουν το χ_0 ώστε σε ένα διάστημα του πεδίου ορισμού της στο οποίο περιέχεται και το χ_0 να έχει μια τουλάχιστον ρίζα. Στην τρίτη, διερευνάται το σύνολο τιμών μιας συνάρτησης με διπλό τύπο και αν η συνάρτηση παίρνει όλες τις τιμές που ανήκουν στο διάστημα μεταξύ των δυο άκρων του συνόλου τιμών. Στην τέταρτη, μελετάται η ύπαρξη ριζών σε ένα διάστημα του πεδίου ορισμού συνάρτησης καθώς και το πρόσημο αυτής στα διάφορα διαστήματα.

Η εμπλοκή των μαθητών με κάθε μια δραστηριότητα αναμένεται να αναδείξει:

- Τον ρόλο της συνέχειας μιας συνάρτησης σε ένα σημείο χ_0 ως προς την ύπαρξη των ριζών της συνάρτησης.
- Τον ρόλο των συντελεστών της κάθε εξίσωσης στον προσδιορισμό του πλήθους των ριζών σε ένα διάστημα.

Ο εκπαιδευτικός μπορεί να ζητά από τους μαθητές να επαληθεύουν αλγεβρικά τα συμπεράσματά τους σε κάθε περίπτωση.

ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

Εργασία	Περιγραφή	Τμήμα εφαρμογής	Περιεχόμενο
Εργασία 1	Προσέγγιση ριζών συνάρτησης	ΟΛΟΙ	Διερευνήσεις για τον προσδιορισμό των ριζών μιας συνάρτησης.
Εργασία 2	Συνέχεια και ρίζες συνάρτησης	ΟΛΟΙ	Διερευνήσεις για την συνέχεια της συνάρτησης και την ύπαρξη ριζών.
Εργασία 3	Το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών	ΟΛΟΙ	Το θεώρημα των ενδιάμεσων τιμών για τον προσδιορισμό του συνόλου τιμών συνάρτησης.
Εργασία 4	Εφαρμογές των θεωρημάτων	ΟΛΟΙ	Διερευνήσεις για τις ρίζες και το πρόσημο των τιμών συνάρτησης.

4.2.4 Θέμα 1: Προσέγγιση των ριζών συνάρτησης

Στην επιφάνεια εργασίας του παρακάτω μικρόκοσμου έχει σχεδιαστεί η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\alpha \cdot x+\beta \cdot \cos(\gamma \cdot x)+\delta$. Μπορείτε να διερευνήσετε αν έχει ρίζες και να τις προσδιορίσετε;

ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΕΙΣ

1. Επιλέξτε οι δείκτες των μεταβολών να δείχνουν $\alpha=1$, $\beta=1$, $\gamma=1$ και $\delta=-4$. Μπορείτε να προσδιορίσετε ένα διάστημα στο οποίο να ανήκει μια ρίζα της συνάρτησης; Μπορείτε να εκφράσετε και να εξηγήσετε αλγεβρικά την ύπαρξη της ρίζας καθώς και τη διαδικασία προσέγγισης αυτής;.
2. Μπορείτε να προσδιορίσετε τους συντελεστές της συνάρτησης ώστε αυτή να έχει ακριβώς δυο ρίζες στο διάστημα $[\pi, 2\pi]$;
3. Μπορείτε να ορίσετε τις τιμές των συντελεστών της συνάρτησης ώστε αυτή στο διάστημα $[\pi, 2\pi]$ να περιέχει ακριβώς πέντε ρίζες; Μπορείτε να τις προσδιορίσετε με μια ικανοποιητική προσέγγιση; Μπορείτε να εξηγήσετε ποιός συντελεστής της εξίσωσης ευθύνεται για το πλήθος των ριζών σε ένα διάστημα;
4. Επιλέξτε $\delta=0$ και $\beta=5$. Μπορείτε να ορίσετε τις τιμές των άλλων συντελεστών της συνάρτησης ώστε αυτή στο διάστημα $[-\pi, \pi]$ να περιέχει ακριβώς δέκα ρίζες; Μπορείτε να τις προσδιορίσετε με μια ικανοποιητική προσέγγιση; Μπορείτε να εξηγήσετε γιατί οι δυο συντελεστές α και γ της συνάρτησης ευθύνονται για το πλήθος των ριζών της σε ένα διάστημα;

ΟΔΗΓΙΕΣ ΠΡΟΣ ΤΟΝ ΔΙΔΑΣΚΟΝΤΑ

Για τη διαχείριση των εργαλείων του μικρόκοσμου

Ζητήστε από τους μαθητές:

- Να κινούν τον κάθε μεταβολέα κατάλληλα ώστε να ορίσουν την εξίσωση της συνάρτησης σύμφωνα με την διερεύνηση.
- Μετακινούν τα σημεία Α και Γ ώστε να ορίσουν το ζητούμενο διάστημα
- Να επιλέγουν την εντολή ««Μεγέθυνση-Σμίκρυνση»» για να προσδιορίζουν την περιοχή στην οποία ανήκει η ζητούμενη ρίζα.
- Να επαναπροσδιορίζουν τα χαρακτηριστικά (properties) των μεταβολέων για να μπορούν να επαναπροσδιορίζουν την συνάρτηση της οποίας μελετούν το όριο στο χ_0 .

Για τις διερευνήσεις

Ζητήστε από τους μαθητές να παρατηρούν, να προβλέπουν, να ελέγχουν και να εκφράζουν στην ομάδα τους και στην τάξη:

- Για το γράφημα:
 - ✓ Τη μορφή του γραφήματος που ορίζεται από τις τιμές των μεταβολέων.
 - ✓ Επιλέγουν τις περιοχές του γραφήματος στις οποίες ανήκουν οι ρίζες της συνάρτησης.
- Για την αλγεβρική διαπραγμάτευση:

- ✓ Καταγράφουν τα διαστήματα στα οποία ανήκουν οι ρίζες της συνάρτησης.
- ✓ Υπολογίζουν τα διαστήματα στα οποία ανήκουν οι ρίζες της συνάρτησης και ελέγχουν τις τιμές της συνάρτησης στα άκρα του διαστήματος για να ελέγξουν το θεώρημα Bolzano.

Για τις απαντήσεις

Ζητήστε από τους μαθητές να εκφράσουν στην τάξη τις απαντήσεις τους. Είναι πιθανόν οι μαθητές να δώσουν απαντήσεις όπως οι παρακάτω:

Διερεύνηση 1

Αναμένεται να κάνουν τις εξής ενέργειες:

(1) Να μετακινήσουν τα σημεία Α και Γ σε θέσεις εκατέρωθεν του σημείου τομής της γραφικής παράστασης της $f(x)$ με τον άξονα $x'x$. (2) Να επιλέξουν την εντολή «Μεγέθυνση-Σμίκρυνση» και να κάνουν μεγέθυνση της περιοχής στο σημείο τομής (3) Να μετακινήσουν τα σημεία Α και Γ ακόμα πιο κοντά στο σημείο τομής και να επαναλάβουν την ίδια διαδικασία και άλλες φορές. (4) Να καταγράψουν τις τιμές των $x(A)$ και $x(\Gamma)$ και να ορίσουν το διάστημα στο οποίο ανήκει η ζητούμενη ρίζα της συνάρτησης. Ο εκπαιδευτικός πρέπει να σημειώσει ότι οι τιμές της συνάρτησης στα άκρα του διαστήματος πρέπει να είναι ετερόσημες ώστε να υπάρχει στο διάστημα αυτό μια ρίζα της συνάρτησης. Μ' άλλα λόγια να επαληθεύεται το θεώρημα Bolzano.

Διερεύνηση 2

Αναμένεται να μετακινήσουν τους δείκτες β και γ ώστε η γραφική παράσταση να τέμνει τον άξονα στο διάστημα $[\pi, 2\pi]$ σε δυο σημεία. Μπορούν να βρουν διάφορες τιμές για τα β και γ. Μια ενδεικτική είναι $\beta=2$ και $\gamma=2,3$.

Διερεύνηση 3

Αναμένεται να μετακινήσουν τους δείκτες β, γ και δ ώστε η γραφική παράσταση να τέμνει τον άξονα στο διάστημα $[\pi, 2\pi]$ σε πέντε σημεία. Μπορούν να βρουν διάφορες τιμές για τα β, γ και δ. Μια ενδεικτική είναι $\beta=3.2$, $\gamma=4.8$ και $\delta = -4$. Προφανώς και οι τέσσερις συντελεστές α, β, γ, δ ευθύνονται για το πλήθος των ριζών σε ένα διάστημα αλλά κυρίως ο συντελεστής που ευθύνεται για την περίοδο της συνάρτησης. Και αυτός είναι ο συντελεστής γ.

Διερεύνηση 4

Μια περίπτωση είναι να επιλεγούν $\alpha=0,5$ και $\gamma = 5$. Μια εξήγηση που αναμένεται να δοθεί για τον ρόλο των συντελεστών α και γ προέρχεται από την παρατήρηση ότι η συνάρτηση είναι άθροισμα μιας περιοδικής και μιας γραμμικής συνάρτησης. Ζητήστε από τους μαθητές να «παίξουν» με τις τιμές των δυο συντελεστών και να παρατηρήσουν τι μεταβάλλει στο γράφημα της συνάρτησης κάθε ένα από αυτούς. Έτσι θα διαπιστώσουν ότι ο μεν συντελεστής α αλλάζει την κατεύθυνση της καμπύλης ενώ ο συντελεστής γ την περίοδο. Άρα ο μεν ένας φέρνει ποιο πολλά τμήματα περιόδων εντός ενός διαστήματος και ο άλλος ορίζει πολλά επαναλαμβανόμενα τμήματα σε ένα διάστημα.

4.2.5 Θέμα 2: Συνέχεια και ρίζες συνάρτησης

Στην επιφάνεια εργασίας του παρακάτω μικρόκοσμου έχει σχεδιαστεί η γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$h(x) = \begin{cases} \alpha x^\gamma + \beta, & x \leq x_0 \\ \kappa x^\nu, & x > x_0 \end{cases}$$

Μπορείτε να ερευνήσετε την συνέχεια της συνάρτησης σε ένα διάστημα που περιέχει το x_0 και τότε στο διάστημα αυτό περιέχει μια τουλάχιστον ρίζα;

ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΕΙΣ

1. Επιλέξτε οι δείκτες των μεταβολών να δείχνουν $\alpha=1$, $\beta=1$, $\gamma=1$, $\nu=2$, $\kappa=1$ και $\mu=2$. Μπορείτε να ορίσετε ένα διάστημα του πεδίου ορισμού της στο οποίο να περιέχεται το σημείο x_0 και να είναι συνεχής σ' αυτό; Μπορείτε να εξηγήσετε αλγεβρικά την απάντησή σας;
2. Επιλέξτε οι δείκτες των μεταβολών να δείχνουν $\alpha=1$, $\beta=1$, $\gamma=1$, $\nu=2$ και $\kappa=2$. Μπορείτε να ορίσετε την τιμή του μ και ένα διάστημα του πεδίου ορισμού της συνάρτησης στο οποίο να περιέχεται το σημείο x_0 και να είναι συνεχής σ' αυτό; Μπορείτε να εξηγήσετε αλγεβρικά την απάντησή σας;
3. Επιλέξτε οι δείκτες των μεταβολών να δείχνουν $\alpha=-1$, $\beta=3$, $\nu=2$, $\kappa=2$ και $\mu=-2$. Μπορείτε να εξετάσετε αν υπάρχει ένα διάστημα του πεδίου ορισμού της στο οποίο η συνάρτηση είναι συνεχής, περιέχει το σημείο x_0 , και έχει μια τουλάχιστον ρίζα σ' αυτό; Μπορείτε να εξηγήσετε αλγεβρικά την απάντησή σας;
4. Επιλέξτε οι δείκτες των μεταβολών να δείχνουν $\alpha=-3$ και $\nu=-0.5$. Μπορείτε να ορίσετε τιμές για τους υπόλοιπους συντελεστές και ένα διάστημα στο οποίο να περιέχεται το σημείο x_0 και η συνάρτηση να έχει τουλάχιστον μια ρίζα σ' αυτό; Μπορείτε να εξηγήσετε αλγεβρικά την απάντησή σας;

ΟΔΗΓΙΕΣ ΠΡΟΣ ΤΟΝ ΔΙΔΑΣΚΟΝΤΑ

Για τη διαχείριση των εργαλείων του μικρόκοσμου

Ζητήστε από τους μαθητές:

- Να κινούν τον κάθε μεταβολέα κατάλληλα ώστε να ορίσουν την εξίσωση της συνάρτησης σύμφωνα με την διερεύνηση.
- Να μετακινούν το σημείο A για να ορίσουν το σημείο στο x_0 .
- Να κινούν το σημείο K μέχρι να το προσαρμόσουν στο σημείο x_0 .
- Να κινούν τους μεταβολείς ϵ και δ για να προσαρμόσουν το ορθογώνιο στην καμπύλη της συνάρτησης.
- Να επαναπροσδιορίζουν τα χαρακτηριστικά (properties) των μεταβολών για να μπορούν να επαναπροσδιορίζουν την συνάρτηση της οποίας μελετούν το όριο στο x_0 .

Για τις διερευνήσεις

Ζητήστε από τους μαθητές να παρατηρούν, να προβλέπουν, να ελέγχουν και να εκφράζουν στην ομάδα τους και στην τάξη:

- Για το γράφημα:
 - ✓ Τη μορφή του γραφήματος που ορίζεται από τις τιμές των μεταβολέων.
 - ✓ Πώς πρέπει να κινούν τους μεταβολείς ε και δ για να προσαρμόσουν το ορθογώνιο πάνω στη καμπύλη.
 - ✓ Επιλέγουν την εντολή «Μεγέθυνση-Σμίκρυνση» για να μεγεθύνουν κοντά στο $f(x_0)$.
- Για την αλγεβρική διαπραγμάτευση:
 - ✓ Καταγράφουν τις τιμές των ε και δ που ταιριάζουν ώστε το ορθογώνιο να έχει τις κορυφές μιας διαγωνίου του πάνω στη καμπύλη.
 - ✓ Καταγράφουν τις τιμές των $x_0-\delta$, $x_0+\delta$, $f(x_0)-\varepsilon$ και $f(x_0)+\varepsilon$ και υπολογίζουν τις συντεταγμένες των δυο σημείων του ορθογωνίου που ανήκουν στην καμπύλη.
 - ✓ Υπολογίζουν την ανισοτική σχέση που πληρούν οι τετμημένες και οι τεταγμένες της καμπύλης που ανήκουν στο εσωτερικό του ορθογωνίου.

Για τις απαντήσεις

Ζητήστε από τους μαθητές να εκφράσουν στην τάξη τις απαντήσεις τους. Είναι πιθανόν οι μαθητές να δώσουν απαντήσεις όπως οι παρακάτω:

Διερεύνηση 1

Αναμένεται να κάνουν τις εξής ενέργειες:

(1) Να ορίσουν με τους δείκτες των μεταβολέων τις δυο συναρτήσεις $f(x)=x^2+1$ και $g(x)=x^2$. (2) Να μετακινήσουν το σημείο A σε διάφορες θέσεις για να διαπιστώσουν ότι δεν υπάρχει θέση στην οποία οι δυο κλάδοι της καμπύλης συμπίπτουν. (3) Να εξηγήσουν ότι αυτό ισχύει διότι x^2+1 είναι πάντοτε διάφορο του x^2 .

Διερεύνηση 2

Αναμένεται να βρουν διάφορες τιμές για το μ . Μια από αυτές είναι η $\mu=-1$. Στην περίπτωση αυτή η τιμή $x_0=1$ μας κάνει τη διπλού τύπου συνάρτηση συνεχή στο x_0 . Ο εκπαιδευτικός μπορεί να ζητήσει από τους μαθητές να αναζητήσουν και άλλες τιμές για το μ και το x_0 . Σε κάθε περίπτωση ελέγχουν το όριο της συνάρτησης στο σημείο A προσαρμόζοντας το ορθογώνιο των δ και ε και εξηγώντας περαιτέρω αλγεβρικά τη ισότητα των ορίων από αριστερά και δεξιά στο x_A .

Διερεύνηση 3

Οι μαθητές αναμένεται να επαναλάβουν την ίδια διαδικασία που χρησιμοποίησαν στις δυο προηγούμενες διερευνήσεις. Ενώ μπορούν να βρουν δυο σημεία συνέχειας, στο 1 και στο -1, στο -1 ικανοποιούνται οι απαιτήσεις της διερεύνησης. Οι μαθητές μπορούν γύρω από το -1 να ορίσουν διάστημα στο οποίο να ισχύει το θεώρημα Bolzano ενώ αντίθετα δεν είναι εύκολο κοντά στο 1 να ορίσουν ανάλογο διάστημα.

Διερεύνηση 4

Οι μαθητές αναμένεται να επιλέξουν $\beta=4$, $\kappa=1$ και $\mu=3$. Στο σημείο $x_0=1$ είναι συνεχής και έτσι οι μαθητές μπορούν να ορίσουν διάστημα γύρω από αυτό, στο οποίο ισχύει το θεώρημα Bolzano.

4.2.6 Θέμα 3: Το θεώρημα των ενδιάμεσων τιμών συνάρτησης

Στην επιφάνεια εργασίας του παρακάτω μικρόκοσμου έχει σχεδιαστεί η γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$f(x) = \begin{cases} ax^v + \beta, & x < x_A \\ \psi_A, & x = x_A \\ \frac{kx + \lambda}{\sqrt{x} + \mu}, & x > x_A \end{cases}$$

Μπορείτε να ερευνήσετε για τα διαστήματα τιμών της συνάρτησης ως προς το πεδίο ορισμού της;

ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΕΙΣ

1. Επιλέξτε οι δείκτες των μεταβολέων να δείχνουν $a=0.4$, $\beta=0$, $v=2$, $k=1$, $\lambda=-2$ και $\mu=1$. Μπορείτε να ορίσετε θέσεις των A, B και Γ καθώς και μια τιμή του y_A ώστε η συνάρτηση να είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού (x_B, x_G) που ορίζουν τα σημεία B και Γ; Μπορείτε να εξηγήσετε αλγεβρικά την απάντησή σας;
2. Επιλέξτε οι δείκτες των μεταβολέων να δείχνουν $a=0.4$, $\beta=0$, $v=2$, $k=1$, $\lambda=-2$ και $\mu=1$. Μπορείτε να ορίσετε θέσεις των A, B και Γ καθώς και μια τιμή του ψ_A , ώστε η συνάρτηση να είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού (x_B, x_G) και το σύνολο τιμών της που αντιστοιχεί σ' αυτό να είναι ένα διάστημα και όχι ένωση διαστημάτων; Μπορείτε να εξηγήσετε αλγεβρικά την απάντησή σας;
3. Πώς πρέπει να επιλεγούν οι τιμές των παραμέτρων της συνάρτησης καθώς και το πεδίο ορισμού της (x_B, x_G) , ώστε κάθε σημείο του συνόλου τιμών της να είναι εικόνα ενός σημείου του πεδίου ορισμού της; Μπορείτε να εξηγήσετε αλγεβρικά την απάντησή σας;
4. Επαναλάβετε την προηγούμενη δραστηριότητα και για άλλες τιμές των παραμέτρων της συνάρτησης και διατυπώστε το θεώρημα των ενδιάμεσων τιμών για κάθε περίπτωση. Ισχύει το θεώρημα στην περίπτωση που το σημείο $(0, \psi_A)$ δεν ανήκει στο σύνολο τιμών της συνάρτησης; Μπορείτε να εξηγήσετε αλγεβρικά την απάντησή σας;

ΟΔΗΓΙΕΣ ΠΡΟΣ ΤΟΝ ΔΙΔΑΣΚΟΝΤΑ

Για τη διαχείριση των εργαλείων του μικρόκοσμου

Ζητήστε από τους μαθητές:

- Να κινούν τον κάθε μεταβολέα κατάλληλα ώστε να ορίσουν την εξίσωση της συνάρτησης σύμφωνα με την διερεύνηση.
- Να κινούν τα σημεία B και Γ ώστε να ορίσουν το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.
- Να μετακινούν το σημείο A για να ορίσουν το σημείο στο x_0 .
- Να κινούν τον μεταβολέα ψ_A για να ορίσουν την τιμή της συνάρτησης στο σημείο $x=x_A$.

- Να επαναπροσδιορίζουν τα χαρακτηριστικά (properties) των μεταβολέων για να μπορούν να επαναπροσδιορίζουν την συνάρτηση της οποίας μελετούν το όριο στο x_0 .

Για τις διερευνήσεις

Ζητήστε από τους μαθητές να παρατηρούν, να προβλέπουν, να ελέγχουν και να εκφράζουν στην ομάδα τους και στην τάξη:

- Για το γράφημα:
 - ✓ Τη μορφή του γραφήματος που ορίζεται για κάθε συνάρτηση από τις τιμές των μεταβολέων.
 - ✓ Πώς πρέπει να κινούν το σημείο A και τον μεταβολέα ψ_A για να τους μεταβολείς ε και δ για να προσαρμόσουν το ορθογώνιο πάνω στην καμπύλη.
 - ✓ Επιλέγουν την εντολή «Μεγέθυνση-Σμίκρυνση» για να μεγεθύνουν κοντά στο $f(x_0)$.
- Για την αλγεβρική διαπραγμάτευση:
 - ✓ Καταγράφουν τις τιμές των x_B, x_Γ και x_A σε κάθε περίπτωση.
 - ✓ Καταγράφουν τις εξισώσεις των δυο συναρτήσεων και υπολογίζουν τα όρια αυτών στο x_A .

Για τις απαντήσεις

Ζητήστε από τους μαθητές να εκφράσουν στην τάξη τις απαντήσεις τους. Είναι πιθανόν οι μαθητές να δώσουν απαντήσεις όπως οι παρακάτω:

Διερεύνηση 1

Αναμένεται να κάνουν τις εξής ενέργειες:

(1) Να επιλέξουν στους μεταβολείς τις κατάλληλες τιμές ώστε να ορίσουν τους δυο κλάδους της συνάρτησης. (2) Να μετακινήσουν τα σημεία B και Γ ώστε να ορίσουν το πεδίο ορισμό της συνάρτησης (3) Να μετακινήσουν το σημείο A ώστε να ορίσουν την τιμή του x_A . (4) Να μετακινήσουν τον δείκτη του μεταβολέα ψ_A ώστε να βρουν την κατάλληλη θέση του σημείου K. (5) Να καταγράψουν τις τιμές των x_B, x_Γ, x_A και ψ_A . (6) Να επαληθεύσουν αλγεβρικά τα αποτελέσματα των ερευνών τους. Ο εκπαιδευτικός πρέπει να επιμένει στη διαδικασία επαλήθευσης με αλγεβρικό τρόπο. Οι μαθητές αναμένεται να βρουν διάφορες περιπτώσεις για τις θέσεις των B, Γ και A. Για παράδειγμα, μπορούν να βρουν $x_B=(2,0)$, $x_\Gamma=(6,0)$ και $x_A=(3,9,0)$.

Διερεύνηση 2

Αναμένεται να χρησιμοποιήσουν τις εμπειρίες που απέκτησαν από την προηγούμενη διερεύνηση και να επιλέξουν το σημείο A να ταυτίζεται με το Γ_2 . Ο εκπαιδευτικός πρέπει να επιμένει και στην αλγεβρική επαλήθευση.

Διερεύνηση 3

Οι εμπειρίες και οι συζητήσεις στην τάξη κατά τις δυο προηγούμενες διερευνήσεις μπορούν να βοηθήσουν τους μαθητές να επιλέξουν διάφορες τιμές για τους μεταβολείς καθώς και για τις θέσεις των σημείων A, B και Γ. Οπτικά καθοδηγούνται από τα δυο σύνολα τιμών των συναρτήσεων και νοητικά από την αλγεβρική

διαδικασία της συνέχειας στο σημείο χ_A . Τελικά για να έχουν ένα συνεχές σύνολο τιμών και όχι ένωση δυο διαφορετικών διαστημάτων η συνάρτηση πρέπει να είναι συνεχής στο σημείο χ_A . Τότε, σε κάθε θέση του δείκτη ψ_A αντιστοιχεί και θέση του σημείου Λ που είναι μια τιμή του συνόλου τιμών. Και επειδή η συνάρτηση είναι συνεχής στο διάστημα που ορίζουν τα B και Γ η τιμή ψ_A είναι τιμή της συνάρτησης. Μ' άλλα λόγια ισχύει το θεώρημα των ενδιάμεσων τιμών.

Διερεύνηση 4

Οι μαθητές αναμένεται να επιλέξουν διάφορες τιμές για τις μεταβλητές του μικρόκοσμου και να εστιάσουν καλύτερα και θεωρητικότερα στο θεώρημα των ενδιάμεσων τιμών.

4.2.7 Θέμα 4: Εφαρμογές των θεωρημάτων

Στην επιφάνεια εργασίας του παρακάτω μικρόκοσμου έχει σχεδιαστεί η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\alpha*(x-\kappa)*(x-\lambda)+\beta*(x-\lambda)*(x-\mu)+\gamma*(x-\mu)*(x-\kappa)$. Μπορείτε (1) να ερευνήσετε για τις ρίζες της συνάρτησης καθώς και για το πρόσημο των τιμών της στα διαστήματα του πεδίου ορισμού της και (2) να επαναλάβετε την έρευνα και για άλλους τύπους συναρτήσεων;

ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΕΙΣ

1. Στην επιφάνεια εργασίας του παρακάτω μικρόκοσμου έχει σχεδιαστεί η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\alpha*(x-\kappa)*(x-\lambda)+\beta*(x-\lambda)*(x-\mu)+\gamma*(x-\mu)*(x-\kappa)$. Μπορείτε να ερευνήσετε: (1) Σε ποιες περιπτώσεις η συνάρτηση έχει δυο ρίζες και σε ποια διαστήματα. (2) Ποιό είναι το πρόσημο των τιμών της στα αντίστοιχα διαστήματα του πεδίου ορισμού της.
2. Επιλέξτε την εντολή Redefine και πληκτρολογήστε τη συνάρτηση $f(x) = \alpha*\sin(\beta*x+\gamma)+\kappa*x+\lambda$. Επιλέξτε οι δείκτες των παραμέτρων να δείχνουν $\alpha=1$, $\beta=1$, $\gamma=0$, $\kappa=1$ και $\lambda=-1$. Πόσες ρίζες έχει η συνάρτηση στη διάστημα $(0,\pi)$; Μπορείτε να αποδείξετε αλγεβρικά τον ισχυρισμό σας; Ερευνήστε για την ύπαρξη ριζών στο διάστημα $(0,\pi)$ και για άλλες τιμές των παραμέτρων και αποδείξτε τον ισχυρισμό σας.
3. Επιλέξτε την εντολή Redefine και πληκτρολογήστε τη συνάρτηση $f(x) = \alpha*\tan(\beta*x+\gamma)+\kappa*\sqrt{x}+\lambda$. Μπορείτε να ερευνήσετε για το πλήθος των ριζών της στο διάστημα $(0,\pi)$ για τις διάφορες τιμές των παραμέτρων της; Μπορείτε να εξηγήσετε και αλγεβρικά τα συμπεράσματά σας;
4. Επιλέξτε την εντολή Redefine και πληκτρολογήστε τη συνάρτηση $f(x) = \alpha*\sin(\beta*x+\gamma)+\kappa*\cos(\lambda*x+\mu)$. Μπορείτε να ερευνήσετε για το πλήθος των ριζών της στο διάστημα $(0,\pi)$ για τις διάφορες τιμές των παραμέτρων της; Μπορείτε να εξηγήσετε και αλγεβρικά τα συμπεράσματά σας;

ΟΔΗΓΙΕΣ ΠΡΟΣ ΤΟΝ ΔΙΔΑΣΚΟΝΤΑ

Για τη διαχείριση των εργαλείων του μικρόκοσμου

Ζητήστε από τους μαθητές:

- Να κινούν τους μεταβολείς α , β και γ ώστε να ορίσουν την εξίσωση της συνάρτησης σύμφωνα με τη διερεύνηση.
- Να κινούν τους μεταβολείς κ , λ και μ ώστε να ορίσουν την συνάρτηση σε σχέση με τα σημεία A, B και Γ.
- Να επαναπροσδιορίζουν τα χαρακτηριστικά (properties) των μεταβολέων για να μπορούν να επαναπροσδιορίζουν την συνάρτηση της οποίας μελετούν το όριο στο χ_0 .

Για τις διερευνήσεις

Ζητήστε από τους μαθητές να παρατηρούν, να προβλέπουν, να ελέγχουν και να εκφράζουν στην ομάδα τους και στην τάξη:

- Για το γράφημα:
 - ✓ Τη μορφή του γραφήματος που ορίζεται από τις τιμές των μεταβολών α , β , γ , κ , λ και μ .
 - ✓ Επιλέγουν την εντολή «Μεγέθυνση-Σμίκρυνση» για να μεγεθύνουν κοντά στα σημεία τομής της συνάρτησης με τον άξονα $\chi'\chi$.
- Για την αλγεβρική διαπραγμάτευση:
 - ✓ Καταγράφουν τις τιμές των μεταβολών και τη θέση των σημείων A, B και Γ.
 - ✓ Υπολογίζουν τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση είναι πάνω ή κάτω από τον άξονα $\chi'\chi$ και στη συνέχεια χρησιμοποιούν το θεώρημα Bolzano για να αιτιολογήσουν τα συμπεράσματά τους.

Για τις απαντήσεις

Ζητήστε από τους μαθητές να εκφράσουν στην τάξη τις απαντήσεις τους. Είναι πιθανόν οι μαθητές να δώσουν απαντήσεις όπως οι παρακάτω:

Διερεύνηση 1

Αναμένεται να κάνουν τις εξής ενέργειες:

(1) Να επιλέξουν στους μεταβολείς τις κατάλληλες τιμές ώστε να ορίσουν τη συνάρτηση. (2) Να μετακινήσουν τα σημεία A, B και Γ ώστε να ορίσουν τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση έχει δυο ρίζες (3) Να επαληθεύσουν αλγεβρικά τα αποτελέσματα των ερευνών τους. Ο εκπαιδευτικός πρέπει να επιμένει στη διαδικασία επαλήθευσης με αλγεβρικό τρόπο. Οι μαθητές αναμένεται να βρουν διάφορες περιπτώσεις για τις θέσεις των B, Γ και A. Για παράδειγμα, μπορούν να βρουν $B=(0,0)$, $\Gamma=(2,0)$ και $x_A=(3, 0)$.

Διερεύνηση 2

Αναμένεται να επιλέξουν ο άξονας $\chi\chi'$ να έχει ως μονάδα το π και μετά να απαντήσουν ότι έχει μια ρίζα στο διάστημα $(0,\pi)$. Μπορούν να μεταβάλουν τις τιμές των μεταβολών α , β και γ ώστε να έχουν περισσότερες από μια ρίζες στο διάστημα $(0,\pi)$. Όπως για παράδειγμα αν επιλέξουν $\alpha=5$, $\beta=2$ και $\gamma=0$. Ο εκπαιδευτικός μπορεί να ζητήσει από τους μαθητές να περιγράψουν το πρόσημο των τιμών της συνάρτησης στα διαστήματα .

Διερεύνηση 3

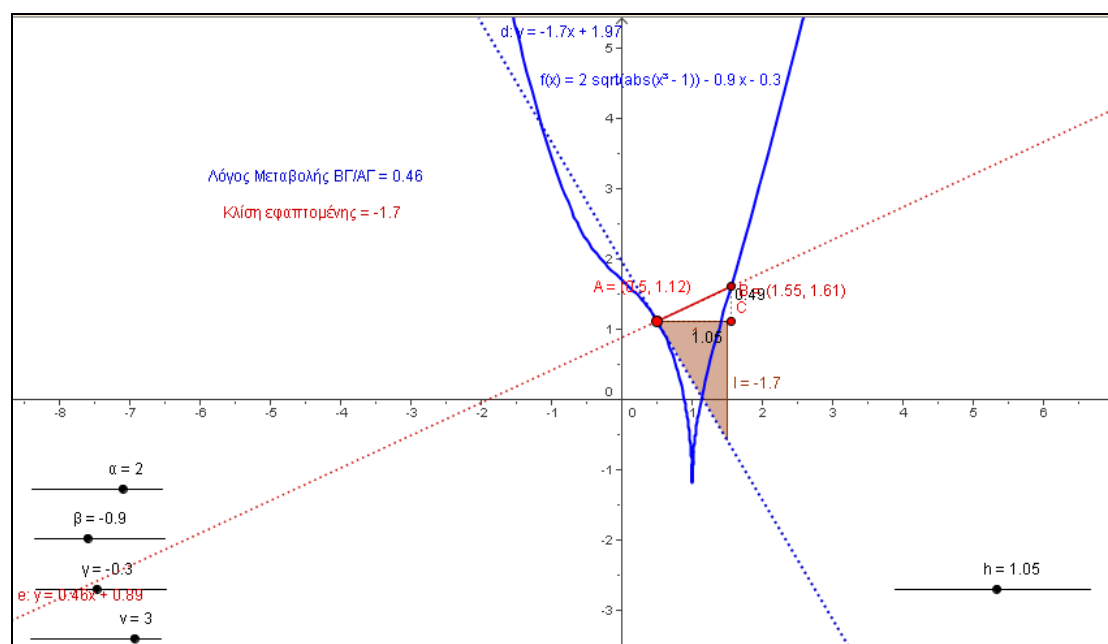
Οι μαθητές αναμένεται να επαναλάβουν την ίδια διαδικασία που χρησιμοποίησαν στην προηγούμενη δραστηριότητα και να απαντήσουν για το πλήθος των ριζών της συνάρτησης στο διάστημα $(0,\pi)$ για τις διάφορες τιμές των α , β , γ , κ και λ . Ακόμα θα πρέπει να προσπαθήσουν να επαληθεύσουν αλγεβρικά τα συμπεράσματά τους.

Διερεύνηση 4

Οι μαθητές αναμένεται να επαναλάβουν τις προηγούμενες διερευνήσεις και να προσπαθήσουν να επαληθεύσουν αλγεβρικά τα συμπεράσματά τους .

5 ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 - Παράγωγος

5.1 ΣΕΝΑΡΙΟ 9 : Η έννοια της Παραγώγου



5.1.1 Η κεντρική ιδέα του σεναρίου

Στο σενάριο αυτό οι μαθητές καλούνται να διερευνήσουν την έννοια της παραγωγού σε σημείο καμπύλης. Συγκεκριμένα εμπλέκονται σε διερευνήσεις ύπαρξης και διατύπωσης συνθηκών ύπαρξης εφαπτομένης καμπύλης σε ένα σημείο της.

Οι μαθητές χρησιμοποιούν τους μεταβολείς για να ορίσουν τις εξισώσεις των συναρτήσεων και στη συνέχεια μετακινούν ένα σημείο της καμπύλης ώστε να συμπίπτει με ένα άλλο και παρακολουθούν πώς μεταβάλλεται η θέση και η κλίση της ευθείας που αυτά ορίζουν. Οι διαδικασίες αυτές αναμένεται να βοηθήσουν τους μαθητές να συγκροτήσουν την έννοια της παραγώγου σε ένα σημείο A της καμπύλης και να τη συνδέσουν με την έννοια του ορίου του λόγου μεταβολής των τιμών της συνάρτησης στο σημείο αυτό ως προς ένα άλλο σημείο B που τείνει στο A .

5.1.2 Στόχοι

- Να αποκτήσουν εμπειρίες σχετικές με την έννοια της εφαπτομένης καμπύλης σε σημείο της.

- Να αποκτήσουν εμπειρίες σχετικές με την ύπαρξη της εφαπτομένης και να την συνδέσουν με την έννοια του ορίου του λόγου μεταβολής $\lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{f(x_A + h) - f(x_A)}{h} \right]$.
- Να εκφράζουν ποιοτικά την ύπαρξη και τη διαδικασία εύρεσης της εφαπτομένης σε σημείο της καμπύλης.
- Να μελετούν και να εκφράζουν ποιοτικά και αλγεβρικά την ύπαρξη και τη εύρεση της παραγώγου σε σημείο της καμπύλης της συνάρτησης.

5.1.3 Διδακτική πρόταση

ΟΡΓΑΝΩΣΗ ΤΗΣ ΤΑΞΗΣ

Οι δραστηριότητες αυτές ενδείκνυται να διδάσκονται στο εργαστήριο υπολογιστών και οι μαθητές να εργάζονται σε ομάδες 2-3 ατόμων με φύλλο εργασίας. Μπορούν όμως να διεξαχθούν και στη τάξη που διαθέτει μόνο έναν υπολογιστή με βιντεοπροβολέα. Σ' αυτή την περίπτωση οι μαθητές συμπληρώνουν τα φύλλα εργασίας με βάση τις παρατηρήσεις που κάνουν κατά την διερεύνηση που γίνεται απ' όλη την τάξη και κατευθύνεται από τον εκπαιδευτικό ή κάποιον μαθητή. Στο πλαίσιο αυτό κάνουν παρεμβάσεις στην διερεύνηση με τις οποίες εκφράζουν την δική τους στρατηγική στη διερεύνηση. Καθώς τέτοιες παρεμβάσεις μπορούν να γίνονται στην τάξη απ' όλους τους μαθητές ο διδάσκων πρέπει να τις υποστηρίζει και να επιδιώκει να συζητούνται όλες οι πιθανές στρατηγικές της διερεύνησης.

Σε κάθε περίπτωση ο εκπαιδευτικός πρέπει να έχει από πριν προετοιμάσει τον τρόπο που θα χειριστεί τις διαφορετικές στρατηγικές που πιθανόν να διατυπωθούν καθώς και τις πιθανές εκβάσεις τους.

Ακόμα πρέπει με τη στάση του να προκαλεί την εφαρμογή των διαφορετικών τρόπων διερεύνησης, να ενθαρρύνει κάθε μαθητή να δοκιμάζει τις ιδέες του, να εκφράζει τις εικασίες του και να διατυπώνει τα συμπεράσματά του ελεύθερα. Ακόμα πρέπει να ενθαρρύνει τους μαθητές να προσπαθούν να επαληθεύουν αλγεβρικά τα αποτελέσματα των διερευνήσεών τους.

ΟΙ ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΕΣ ΔΥΝΑΤΟΤΗΤΕΣ ΤΟΥ ΣΕΝΑΡΙΟΥ

Οι προτεινόμενες στο σενάριο δραστηριότητες αφορούν φαινόμενα τα οποία προκαλούνται από την δράση των μαθητών σε προσχεδιασμένους υπολογιστικούς μικρόκοσμους με σκοπό την ανάδειξη των διερευνούμενων ιδιοτήτων τους. Έτσι οι απαντήσεις στα ερωτήματα που τίθενται στο πλαίσιο αυτών των διερευνήσεων αλλά και αυτών που ο διδάσκων ή οι ίδιοι οι μαθητές μπορούν να θέσουν είναι δυνατόν να αποτελέσουν ένα περιβάλλον απόκτησης και έκφρασης εμπειριών σχετικών με την έννοια της εφαπτομένης της καμπύλης της συνάρτησης σε ένα σημείο αυτής και με μια διαδικασία σύνδεσης της εφαπτομένης σε σημείο της καμπύλης με την ύπαρξη του ορίου του λόγου μεταβολής $\lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{f(x_A + h) - f(x_A)}{h} \right]$ στο σημείο αυτό. Τα εργαλεία που έχουν ενσωματωθεί στους μικρόκοσμους δίνουν την δυνατότητα στους μαθητές,

- να κάνουν πειράματα με τον προσδιορισμό συγκεκριμένων συναρτήσεων προκειμένου να διερευνήσουν την εφαπτομένη και την παράγωγο σε ένα σημείο A του πεδίου ορισμού της,
- να παρατηρούν και να ερμηνεύουν τα αποτελέσματα των χειρισμών τους,
- να εκφράζουν εικασίες, να κάνουν γενικεύσεις, να διατυπώνουν υποθέσεις και θεωρήματα και να τα εκφράζουν με μαθηματικούς όρους,
- να λύνουν προβλήματα αλγεβρικού προσδιορισμού της παραγώγου της συνάρτησης σε ένα σημείο του πεδίου ορισμού της

Ακόμα, μπορούν να επεμβαίνουν και να επαναπροσδιορίζουν τις δυνατότητες των εργαλείων ή να επαναδιατυπώνουν τον τρόπο ορισμού των αντικειμένων και να μεταβάλλουν την εμφάνισή τους. Από αυτή την άποψη οι μικρόκοσμοι είναι επαναχρησιμοποιήσιμοι και δίνουν τη δυνατότητα στους χρήστες να διατυπώνουν και νέα ερωτήματα που αφορούν ιδιαίτερες γνωστικές πτυχές των μαθηματικών αντικειμένων.

ΠΟΡΕΙΑ ΤΗΣ ΕΦΑΡΜΟΓΗΣ ΤΟΥ ΣΕΝΑΡΙΟΥ

Το σενάριο αποτελείται από τέσσερις εργασίες. Στην πρώτη, οι μαθητές διαπραγματεύονται την έννοια της εφαπτομένης της καμπύλης $f(x)=ax^v+bx+\gamma$ σε ένα σημείο A αυτής μετακινώντας ένα σημείο B ώστε να τείνει στο A . Στη δεύτερη, οι μαθητές διαπραγματεύονται το ίδιο αντικείμενο αλλά τώρα καλούνται να συνδέσουν την μεταβολή του σημείου B με το λόγο μεταβολής των συντεταγμένων των A και B καθώς το B πλησιάζει το A καθώς και με την κλίση της ευθείας AB . Στην τρίτη, διερευνάται η έννοια της παραγώγου σε σημείο της καμπύλης συνδέοντας τον λόγο μεταβολής με την κλίση της AB και την κλίση της εφαπτομένης της καμπύλης, εκμεταλλευόμενοι την σχετική εντολή της καμπύλης. Στην τέταρτη, μελετάται η ύπαρξη εφαπτομένης σε χαρακτηριστικά σημεία της καμπύλης

$$f(x) = a\sqrt{x^v - 1} + bx + \gamma \quad (f(x) = a\sqrt{\text{abs}(x^v - 1)} + bx + \gamma).$$

Η εμπλοκή των μαθητών με κάθε μια δραστηριότητα αναμένεται να αναδείξει:

- Τον ρόλο του ορίου του λόγου μεταβολής μιας συνάρτησης σε ένα σημείο A ως προς την ύπαρξη της εφαπτομένης στο σημείο αυτό.
- Τον ρόλο της ύπαρξης του ορίου του λόγου μεταβολής μιας συνάρτησης σε σχέση με την ύπαρξη της εφαπτομένης σε σημείο της.

Ο εκπαιδευτικός μπορεί να ζητά από τους μαθητές να επαληθεύουν αλγεβρικά τα συμπεράσματά τους σε κάθε περίπτωση. Ακόμα μπορεί να αναδείξει και άλλα ζητήματα σχετικά με την εφαπτομένη της καμπύλης σε σημείο της όπως για παράδειγμα τα σημεία στα οποία η παράγωγος είναι 0.

ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

Ενότητα	Περιγραφή	Τμήμα εφαρμογής	Περιεχόμενο
Εργασία 1	Η έννοια της εφαπτομένης καμπύλης	ΟΛΟΙ	Διερευνήσεις για την εφαπτομένη καμπύλης σε σημείο αυτής.
Εργασία 2	Ο λόγος μεταβολής $[f(x_A+h)-f(x_A)]/h$	ΟΛΟΙ	Διερευνήσεις για τον λόγο μεταβολής των τιμών της συνάρτησης γύρω από σημείο αυτής και σύνδεσή του με την έννοια της εφαπτομένης της καμπύλης στο x_A .
Εργασία 3	Ο ορισμός της εφαπτομένης καμπύλης σε σημείο της	ΟΛΟΙ	Διερευνήσεις σχετικές με την έννοια της παραγώγου σε σημείο συνάρτησης.
Εργασία 4	Η εφαπτομένη σε ειδικά σημεία	ΟΛΟΙ	Διερευνήσεις για τον ορισμό της εφαπτομένης σε ιδιαίτερα σημεία της συνάρτησης.

5.1.4 Θέμα 1: Η έννοια της εφαπτομένης καμπύλης

Στην επιφάνεια εργασίας του παρακάτω μικρόκοσμου έχει σχεδιαστεί η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=a*x^n+\beta*x+\gamma$, δυο σημεία της A και B καθώς και η ευθεία AB. Μπορείτε να ερευνήσετε για τη θέση της ευθείας AB ως προς την γραφική παράσταση της συνάρτησης όταν το A παραμένει σταθερό στη θέση με τετμημένη 1 και το B πλησιάζει το A;

ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΕΙΣ

1. Επιλέξτε οι δείκτες των μεταβολέων να δείχνουν $a=0.2$, $\beta=0$, $\gamma=0$ και $n=2$ και το A να είναι στη θέση με τετμημένη 1. Μπορείτε να περιγράψετε τον τρόπο μεταβολής της ευθείας AB όταν το σημείο B πλησιάζει το σημείο A; Μπορείτε να εκφράσετε αλγεβρικά την μεταβολή αυτή;
2. Επιλέξτε οι δείκτες των μεταβολέων να δείχνουν $a=0.2$, $\beta=1$, $\gamma=0$ και $n=1$. Μπορείτε να περιγράψετε τον τρόπο μεταβολής της ευθείας AB όταν το σημείο B πλησιάζει το σημείο A; Μπορείτε να εκφράσετε αλγεβρικά την μεταβολή αυτή;
3. Επιλέξτε οι δείκτες των μεταβολέων να δείχνουν $a=0.2$, $\beta=-1$, $\gamma=0$ και $n=3$. Μπορείτε να περιγράψετε τον τρόπο μεταβολής της ευθείας AB όταν το σημείο B πλησιάζει το σημείο A; Μπορείτε να εκφράσετε αλγεβρικά την μεταβολή αυτή;
4. Επιλέξτε οι δείκτες των μεταβολέων να δείχνουν $a=1$, $\beta=1$, $\gamma=0$ και $n=-2$. Μπορείτε να περιγράψετε τον τρόπο μεταβολής της ευθείας AB όταν το σημείο B πλησιάζει το σημείο A; Μπορείτε να εκφράσετε αλγεβρικά την μεταβολή αυτή;

ΟΔΗΓΙΕΣ ΠΡΟΣ ΤΟΝ ΔΙΔΑΣΚΟΝΤΑ

Για τη διαχείριση των εργαλείων του μικρόκοσμου

Ζητήστε από τους μαθητές:

- Να κινούν τον κάθε μεταβολέα κατάλληλα ώστε να ορίσουν την εξίσωση της συνάρτησης σύμφωνα με την διερεύνηση.
- Μετακινούν τα σημεία A και B ώστε να ορίσουν την ευθεία ως εφαπτομένη της καμπύλης στο σημείο A.
- Να επιλέγουν την εντολή ««Μεγέθυνση-Σμίκρυνση»» για να προσδιορίζουν την περιοχή στην οποία ανήκει το σημείο A.

Για τις διερευνήσεις

Ζητήστε από τους μαθητές να παρατηρούν, να προβλέπουν, να ελέγχουν και να εκφράζουν στην ομάδα τους και στην τάξη:

- Για το γράφημα:
 - ✓ Τη μορφή του γραφήματος που ορίζεται από τις τιμές των μεταβολέων.
 - ✓ Τη θέση της ευθείας AB ως προς το γράφημα της συνάρτησης καθώς το B πλησιάζει το A.
- Για την αλγεβρική διαπραγμάτευση:
 - ✓ Καταγράφουν τις συντεταγμένες των A και B και διαπραγματεύονται την κλίση της ευθείας AB σε σχέση με τις σχετικές θέσεις των A και B.

Για τις απαντήσεις

Ζητήστε από τους μαθητές να εκφράσουν στην τάξη τις απαντήσεις τους. Είναι πιθανόν οι μαθητές να δώσουν απαντήσεις όπως οι παρακάτω:

Διερεύνηση 1

Αναμένεται να κάνουν τις εξής ενέργειες:

(1) Να μετακινήσουν το σημείο B πολύ κοντά στο A και να παρατηρούν την κλίση της ευθείας AB. (2) Να παρατηρήσουν ότι η ευθεία υπάρχει όταν τα δυο σημεία βρίσκονται πολύ κοντά το ένα με το άλλο και δεν υπάρχει όταν ταυτίζονται. (3) Να χρησιμοποιούν την εντολή «Μεγέθυνση-Σμίκρυνση» για να παρατηρούν κοντά στο σημείο A. (4) Αναμένεται, καθώς θα μετακινούν το B προς το A να περιγράψουν την μεταβολή της κλίσης της ευθείας AB. Ο εκπαιδευτικός πρέπει να εξηγήσει στους μαθητές ότι στην περίπτωση που τα σημεία ταυτίζονται η ευθεία «χάνεται» διότι δεν υπάρχει ευθεία καθώς αυτή ορίστηκε εκ κατασκευής από δυο σημεία. Συνεπώς για να βρεθεί η θέση που η ευθεία υπάρχει αλλά και ταυτόχρονα εφάπτεται πρέπει το B να τείνει στο A και να μην ταυτίζεται με αυτό. Η διαδικασία αυτή είναι μια προσέγγιση στη σύνδεση του ορίου με την εφαπτομένη.

Διερεύνηση 2

Αναμένεται να παρατηρήσουν ότι η ευθεία AB ταυτίζεται με την καμπύλη της συνάρτησης και επομένως έχουν την ίδια κλίση. Δηλαδή, καθώς το σημείο B πλησιάζει στο A η κλίση της ευθείας AB παραμένει σταθερή και ίση με αυτή της $f(x)$.

Διερεύνηση 3

Αναμένεται να μετακινήσουν το σημείο B αργά προς το A και να παρακολουθούν την μεταβολή της κλίσης της AB. Προφανώς θα διαπιστώσουν ότι είτε το B βρίσκεται αριστερά του A είτε δεξιά η κλίση της ευθείας πλησιάζει στον ίδιο αριθμό (Ισχύει και εδώ η παρατήρηση στην διερεύνηση 1 ότι τα δυο σημεία δεν πρέπει να ταυτιστούν αλλά το B να πλησιάζει το A όσο το δυνατόν πιο κοντά. Ο εκπαιδευτικός μπορεί να χρησιμοποιήσει την εμπειρία των μαθητών από τις προηγούμενες διερευνήσεις και να τους ζητήσει να σχολιάσουν το γεγονός ότι στην περίπτωση αυτή η ευθεία AB τέμνει την καμπύλη και σε άλλο σημείο εκτός από τα A και B πράγμα που δεν ισχύει στις συναρτήσεις των δυο προηγούμενων διερευνήσεων.

Διερεύνηση 4

Και στην περίπτωση αυτής της διερεύνησης οι μαθητές αναμένεται να περιγράψουν όσα παρατήρησαν και στις προηγούμενες διερευνήσεις. Εδώ αναμένεται ακόμα να παρατηρήσουν ότι η συνάρτηση έχει δυο κλάδους και ότι τα σημεία A και B έχουν τετμημένη διαφορετική από το 0 που δεν ανήκει στο πεδίο ορισμού της.

Ανακεφαλαίωση

Ζητήστε από τους μαθητές να ανακοινώσουν στη τάξη τα ευρήματά τους από τις διερευνήσεις που έκαναν. Ενθαρρύνετέ τους να εκφράσουν κάθε πτυχή των συμπερασμάτων τους και να τα δικαιολογήσουν. Προσπαθήστε να ανακεφαλαιώσετε σε ένα γενικό συμπέρασμα σχετικό με τον τρόπο μεταβολής της κλίσης της ευθείας AB καθώς το B πλησιάζει το A.

5.1.5 Θέμα 2: Ο λόγος μεταβολής $[f(x_A+h)-f(x_A)]/h$

Στην επιφάνεια εργασίας του παρακάτω μικρόκοσμου έχει σχεδιαστεί η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\alpha \cdot x^\nu + \beta \cdot x + \gamma$, δυο σημεία της A και B καθώς και η ευθεία AB. Το σημείο B έχει οριστεί να έχει συντεταγμένες $(x_A+h, f(x_A+h))$. Μπορείτε να ερευνήσετε για τον τρόπο μεταβολής του λόγου $[f(x_A+h)-f(x_A)]/h$ καθώς το h πλησιάζει το 0 ενώ το A παραμένει σταθερό στη θέση με τετμημένη 1;

ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΕΙΣ

1. Επιλέξτε οι δείκτες των μεταβολέων να δείχνουν $\alpha=0.2$, $\beta=1$, $\gamma=0$ και $\nu=2$. Μπορείτε να περιγράψετε πώς μεταβάλλεται ο λόγος μεταβολής $[f(x_A+h)-f(x_A)]/h$ καθώς το h πλησιάζει το 0; Μπορείτε να εκφράσετε αλγεβρικά την μεταβολή

αυτή και να βρείτε το όριο $\lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{f(x_A + h) - f(x_A)}{h} \right];$

2. Επιλέξτε οι δείκτες των μεταβολέων να δείχνουν $\alpha=0.2$, $\beta=1$, $\gamma=0$ και $\nu=1$. Μπορείτε να περιγράψετε πώς μεταβάλλεται ο ο λόγος μεταβολής $[f(x_A+h)-f(x_A)]/h$ καθώς το h πλησιάζει το 0; Μπορείτε να εκφράσετε αλγεβρικά την μεταβολή αυτή και να βρείτε το όριο του λόγου μεταβολής

$\lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{f(x_A + h) - f(x_A)}{h} \right];$

Πώς συνδέεται με την κλίση της καμπύλης;

3. Επιλέξτε οι δείκτες των μεταβολέων να δείχνουν $\alpha=0.2$, $\beta=-1$, $\gamma=2$ και $\nu=3$. Μπορείτε να περιγράψετε πώς μεταβάλλεται ο λόγος μεταβολής $[f(x_A+h)-f(x_A)]/h$ καθώς το h πλησιάζει το 0;

Μπορείτε να εκφράσετε αλγεβρικά την μεταβολή αυτή και να βρείτε το όριο του λόγου μεταβολής $\lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{f(x_A + h) - f(x_A)}{h} \right];$

4. Επιλέξτε οι δείκτες των μεταβολέων να δείχνουν $\alpha=1$, $\beta=1$, $\gamma=0$ και $\nu=-2$. Μπορείτε να περιγράψετε πώς μεταβάλλεται ο λόγος μεταβολής $[f(x_A+h)-f(x_A)]/h$ καθώς το h πλησιάζει το 0;

Μπορείτε να εκφράσετε αλγεβρικά την μεταβολή αυτή και να βρείτε το όριο του λόγου μεταβολής $\lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{f(x_A + h) - f(x_A)}{h} \right];$

ΟΔΗΓΙΕΣ ΠΡΟΣ ΤΟΝ ΔΙΔΑΣΚΟΝΤΑ

Για τη διαχείριση των εργαλείων του μικρόκοσμου

Ζητήστε από τους μαθητές:

- Να κινούν τον κάθε μεταβολέα κατάλληλα ώστε να ορίσουν την εξίσωση της συνάρτησης σύμφωνα με τη διερεύνηση.
- Μετακινούν το σημείο A ώστε να ορίσουν τη θέση στην οποία θα διερευνήσουν τον λόγο μεταβολής των τιμών της συνάρτησης γύρω από αυτό το σημείο.
- Μετακινούν τον μεταβολέα h ώστε το σημείο B να πλησιάσει το σημείο A.
- Να επιλέγουν την εντολή «Μεγέθυνση-Σμίκρυνση» για να πλησιάσουν ακόμα περισσότερο στο A.
- Να επαναπροσδιορίζουν τα χαρακτηριστικά (ιδιότητες) του μεταβολέα για να μπορούν να επαναπροσδιορίζουν τη μεταβολή του B ως προς το A.

Για τις διερευνήσεις

Ζητήστε από τους μαθητές να παρατηρούν, να προβλέπουν, να ελέγχουν και να εκφράζουν στην ομάδα τους και στην τάξη:

- Για το γράφημα:
 - ✓ Τη μορφή του γραφήματος που ορίζεται από τις τιμές των μεταβολέων.
 - ✓ Τον τρόπο σύγκλισης του σημείου B προς το σημείο A σε σχέση με την μεταβολή του κέρσορα h .
- Για την αλγεβρική διαπραγμάτευση:
 - ✓ Καταγράφουν τις τιμές των λόγων μεταβολής καθώς το h συγκλίνει στο 0.

Για τις απαντήσεις

Ζητήστε από τους μαθητές να εκφράσουν στην τάξη τις απαντήσεις τους. Είναι πιθανόν οι μαθητές να δώσουν απαντήσεις όπως οι παρακάτω:

Διερεύνηση 1

Αναμένεται να κάνουν τις εξής ενέργειες:

(1) Να κινούν τον δείκτη του μεταβολέα h προς το 0. (2) Να παρατηρούν τον τρόπο μεταβολής του λόγου μεταβολής (3) Να επιλέξουν την εντολή «Μεγέθυνση-Σμίκρυνση» και να κάνουν μεγέθυνση της περιοχής γύρω από το σημείο A. (4) Να καταγράψουν την κλίση της ευθείας AB σε κάθε θέση του σημείου B και να τη συσχετίζουν με τον λόγο μεταβολής. Ο εκπαιδευτικός πρέπει να επισημάνει στους μαθητές την ανάγκη της αλγεβρικής επαλήθευσης του τρόπου μεταβολής του λόγου μεταβολής και της εύρεσης του ορίου της μεταβολής αυτής όταν το h τείνει στο 0.

Διερεύνηση 2

Αναμένεται να παρατηρήσουν ότι ο λόγος μεταβολής παραμένει σταθερός και ίσος με την κλίση της ευθείας AB καθώς το h τείνει στο 0. Η εξίσωση της συνάρτησης $f(x)=1,2x$ αναμένεται να χρησιμοποιηθεί από τους μαθητές για να υπολογιστεί το

όριο του λόγου μεταβολής της συνάρτησης. Έτσι θα διαπιστώσουν ότι ο σταθερός λόγος και το όριο του λόγου μεταβολής είναι 1,2

Διερεύνηση 3

Οι μαθητές αναμένεται να χρησιμοποιήσουν τις εμπειρίες τους από τις προηγούμενες διερευνήσεις και να περιγράψουν με περισσότερη λεπτομέρεια τον τρόπο μεταβολής του λόγου μεταβολής. Ακόμα μπορούν να υπολογίσουν τον λόγο μεταβολής και να περιγράψουν αλγεβρικά την μεταβολή του.

Διερεύνηση 4

Και στη διερεύνηση αυτή οι μαθητές αναμένεται να κάνουν ανάλογες παρατηρήσεις για τον τρόπο μεταβολής του λόγου μεταβολής.

Σε όλες τις διερευνήσεις οι μαθητές αναμένεται να διαπιστώσουν ότι ο λόγος μεταβολής ταυτίζεται με την κλίση της ευθείας AB και ότι ο τρόπος μεταβολής του είναι ίδιος με τον τρόπο μεταβολής της κλίσης της ευθείας. Ο εκπαιδευτικός πρέπει να επισημάνει στους μαθητές ότι η περιγραφή της μεταβολής του λόγου πρέπει να αναφέρεται στα αν αυτή μειώνεται, αν μειώνεται γρηγορότερα ή όχι σε σχέση με την μεταβολή σε ένα άλλο σημείο κ.ο.κ.

Ανακεφαλαίωση: Ζητήστε από τους μαθητές να ανακοινώσουν στη τάξη τα ευρήματά τους από τις διερευνήσεις που έκαναν. Ενθαρρύνετέ τους να εκφράσουν κάθε πτυχή των συμπερασμάτων τους και να τα δικαιολογήσουν. Προσπαθήστε να ανακεφαλαιώσετε σε ένα γενικό συμπέρασμα σχετικό με τον τρόπο μεταβολής της κλίσης της ευθείας AB καθώς το B πλησιάζει το A. Συνδέστε τη μεταβολή της κλίσης με το όριο αυτής της μεταβολής.

5.1.6 Θέμα 3: Ο ορισμός της εφαπτομένης καμπύλης σε σημείο της

Στην επιφάνεια εργασίας του παρακάτω μικρόκοσμου έχει σχεδιαστεί η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\alpha \cdot x^{\nu}+\beta \cdot x+\gamma$, δυο σημεία της A και B, η εφαπτομένη της καμπύλης στο A καθώς και η ευθεία AB. Το σημείο B έχει οριστεί να έχει συντεταγμένες $(x_A+h, f(x_A+h))$. Μπορείτε να ερευνήσετε για τον τρόπο μεταβολής του λόγου $[f(x_A+h)-f(x_A)]/h$ καθώς το h πλησιάζει το 0 και να τον συσχετίσετε με την κλίση της εφαπτομένης της καμπύλης στο σημείο A, όταν το A είναι σταθερό στη θέση με τετμημένη 1;

ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΕΙΣ

1. Επιλέξτε οι δείκτες των μεταβολέων να δείχνουν $\alpha=0.2$, $\beta=1$, $\gamma=0$ και $\nu=2$. Μπορείτε να περιγράψετε πώς μεταβάλλεται ο λόγος μεταβολής $[f(x_A+h)-f(x_A)]/h$ καθώς το h πλησιάζει το 0;
 2. Μπορείτε να εκφράσετε αλγεβρικά την μεταβολή αυτή και να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο A;
 3. Επιλέξτε οι δείκτες των μεταβολέων να δείχνουν $\alpha=0.2$, $\beta=1$, $\gamma=0$ και $\nu=1$. Μπορείτε να περιγράψετε πώς μεταβάλλεται ο λόγος μεταβολής $[f(x_A+h)-f(x_A)]/h$ καθώς το h πλησιάζει το 0;
 4. Μπορείτε να εκφράσετε αλγεβρικά την μεταβολή αυτή και να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο A;
 5. Επιλέξτε οι δείκτες των μεταβολέων να δείχνουν $\alpha=0.2$, $\beta=-1$, $\gamma=2$ και $\nu=3$. Μπορείτε να περιγράψετε πώς μεταβάλλεται ο λόγος μεταβολής $[f(x_A+h)-f(x_A)]/h$ καθώς το h πλησιάζει το 0;
 6. Μπορείτε να εκφράσετε αλγεβρικά την μεταβολή αυτή και να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο A;
 7. Επιλέξτε οι δείκτες των μεταβολέων να δείχνουν $\alpha=1$, $\beta=1$, $\gamma=0$ και $\nu=-2$. Μπορείτε να περιγράψετε πώς μεταβάλλεται ο λόγος μεταβολής $[f(x_A+h)-f(x_A)]/h$ καθώς το h πλησιάζει το 0;
- Μπορείτε να εκφράσετε αλγεβρικά την μεταβολή αυτή και να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο A;

ΟΔΗΓΙΕΣ ΠΡΟΣ ΤΟΝ ΔΙΔΑΣΚΟΝΤΑ

Για τη διαχείριση των εργαλείων του μικρόκοσμου

Ζητήστε από τους μαθητές:

- Να κινούν τον κάθε μεταβολέα κατάλληλα ώστε να ορίσουν την εξίσωση της συνάρτησης σύμφωνα με τη διερεύνηση.
- Μετακινούν το σημείο A ώστε να ορίσουν τη θέση στην οποία θα διερευνήσουν τον λόγο μεταβολής των τιμών της συνάρτησης γύρω από αυτό το σημείο.
- Μετακινούν τον μεταβολέα h ώστε το σημείο B να πλησιάσει το σημείο A.
- Να επιλέγουν την εντολή «Μεγέθυνση-Σμίκρυνση» για να πλησιάσουν ακόμα περισσότερο στο A.

- Να επαναπροσδιορίζουν τα χαρακτηριστικά (ιδιότητες) των μεταβολέων για να μπορούν να επαναπροσδιορίζουν την συνάρτηση της οποίας μελετούν το όριο στο x_0 .

Για τις διερευνήσεις

Ζητήστε από τους μαθητές να παρατηρούν, να προβλέπουν, να ελέγχουν και να εκφράζουν στην ομάδα τους και στην τάξη:

- Για το γράφημα:
 - ✓ Τη μορφή του γραφήματος που ορίζεται από τις τιμές των μεταβολέων.
 - ✓ Τον τρόπο σύγκλισης του σημείου B προς το σημείο A σε σχέση με την μεταβολή του κέρσορα h.
- Για την αλγεβρική διαπραγμάτευση:
 - ✓ Καταγράφουν τις τιμές των λόγων μεταβολής καθώς το h συγκλίνει στο 0.

Για τις απαντήσεις

Ζητήστε από τους μαθητές να εκφράσουν στην τάξη τις απαντήσεις τους. Είναι πιθανόν οι μαθητές να δώσουν απαντήσεις όπως οι παρακάτω:

Διερεύνηση 1

Αναμένεται να κάνουν τις εξής ενέργειες:

(1) Να κινούν τον δείκτη του μεταβολέα h προς το 0. (2) Να παρατηρούν την μεταβολή της ευθείας AB καθώς και τον τρόπο μεταβολής του λόγου μεταβολής (3) Να επιλέξουν την εντολή «Μεγέθυνση-Σμίκρυνση» και να κάνουν μεγέθυνση της περιοχής γύρω από το σημείο A. (4) Να καταγράψουν την κλίση της ευθείας AB σε κάθε θέση του σημείου B και να τη συσχετίζουν με τον λόγο μεταβολής. (5) Να υπολογίσουν την κλίση που πρέπει να έχει η εφαπτομένη στο σημείο A όταν η AB συμπίπτει με την εφαπτομένη. Ο εκπαιδευτικός πρέπει να επισημάνει στους μαθητές τον τρόπο υπολογισμού του ορίου καθώς και για την αναγκαιότητα του υπολογισμού του ορίου για την εύρεση της εξίσωσης της εφαπτομένης.

Διερεύνηση 2

Αναμένεται να παρατηρήσουν ότι ο λόγος μεταβολής παραμένει σταθερός και ίσος με την κλίση της ευθείας AB καθώς το h τείνει στο 0. Η εξίσωση της συνάρτησης $f(x)=1,2x$ και η εφαπτομένη της στο σημείο A ταυτίζονται. Ακόμα αναμένεται οι μαθητές να υπολογίσουν το όριο του λόγου μεταβολής της συνάρτησης και να το χρησιμοποιήσουν για την επαλήθευση της εξίσωσης της εφαπτομένης στο A.

Διερεύνηση 3

Οι μαθητές αναμένεται να χρησιμοποιήσουν τις εμπειρίες τους από τις προηγούμενες διερευνήσεις και να περιγράψουν με περισσότερη λεπτομέρεια τον τρόπο μεταβολής του λόγου μεταβολής σε σχέση με την κλίση της εφαπτομένης καθώς και τον υπολογισμό της εξίσωσης της εφαπτομένης στο σημείο A.

Διερεύνηση 4

Και στη διερεύνηση αυτή οι μαθητές αναμένεται να κάνουν ανάλογες παρατηρήσεις για τον τρόπο μεταβολής του λόγου μεταβολής και της κλίσης της εφαπτομένης.

5.1.7 Θέμα 4: Η εφαπτομένη σε ειδικά σημεία

Στην επιφάνεια εργασίας του παρακάτω μικρόκοσμου έχει σχεδιαστεί η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=a*\sqrt{\text{abs}(x)}+\beta*x+\gamma$, δυο σημεία της A και B, η εφαπτομένη της καμπύλης στο A καθώς και η ευθεία AB. Το σημείο B έχει οριστεί να έχει συντεταγμένες $(x_A+h, f(x_A+h))$. Μπορείτε να ερευνήσετε για τον τρόπο μεταβολής του λόγου $[f(x_A+h)-f(x_A)]/h$ καθώς το h πλησιάζει το 0 και να τον συσχετίσετε με την κλίση της εφαπτομένης της καμπύλης στο σημείο A; Τι συμβαίνει στις κορυφές της καμπύλης;

ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΕΙΣ:

1. Επιλέξτε οι δείκτες των μεταβολών να δείχνουν $\alpha=2$, $\beta=0$, $\gamma=-1$ και $\nu=3$. Μπορείτε να περιγράψετε πώς μεταβάλλεται ο λόγος μεταβολής $[f(x_A+h)-f(x_A)]/h$, καθώς το h πλησιάζει στο 0, όταν το σημείο A είναι στη θέση (1,-1);
2. Μπορείτε να εκφράσετε αλγεβρικά την μεταβολή αυτή και να προσδιορίσετε την εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο A; Μπορείτε να εξηγήσετε γιατί δεν υπάρχει εφαπτομένη της καμπύλης στο σημείο A(1,-1);
3. Επιλέξτε οι δείκτες των μεταβολών να δείχνουν $\alpha=2$, $\beta=2$, $\gamma=-1$ και $\nu=4$. Μπορείτε να περιγράψετε πώς μεταβάλλεται ο λόγος μεταβολής $[f(x_A+h)-f(x_A)]/h$ καθώς το h πλησιάζει στο σημείο A; Μπορείτε να εκφράσετε αλγεβρικά την μεταβολή αυτή και να προσδιορίσετε την εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο A; Μπορείτε να εξηγήσετε γιατί δεν υπάρχει εφαπτομένη της καμπύλης στις κορυφές (1,1) και (-1,-3);
4. Επιλέξτε οι δείκτες των μεταβολών να δείχνουν $\alpha=2$, $\beta=0$, $\gamma=-1$ και $\nu=-1$. Μπορείτε να περιγράψετε πώς μεταβάλλεται ο λόγος μεταβολής $[f(x_A+h)-f(x_A)]/h$ καθώς το h πλησιάζει στο σημείο A; Μπορείτε να εκφράσετε αλγεβρικά την μεταβολή αυτή και να προσδιορίσετε την εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο A; Μπορείτε να περιγράψετε και να εξηγήσετε τι συμβαίνει με την εφαπτομένη της καμπύλης στο σημείο A όταν η τετμημένη του πλησιάζει στο 0;
5. Επαναλάβετε τις προηγούμενες διερευνήσεις και για άλλες τιμές των παραμέτρων. Μπορείτε να περιγράψετε πώς μεταβάλλεται ο λόγος μεταβολής $[f(x_A+h)-f(x_A)]/h$ καθώς το h πλησιάζει το 0 όταν το σημείο βρίσκεται σε μια τυχαία θέση;

ΟΔΗΓΙΕΣ ΠΡΟΣ ΤΟΝ ΔΙΔΑΣΚΟΝΤΑ

Για τη διαχείριση των εργαλείων του μικρόκοσμου

Ζητήστε από τους μαθητές:

- Να κινούν τον κάθε μεταβολέα κατάλληλα ώστε να ορίσουν την εξίσωση της συνάρτησης σύμφωνα με τη διερεύνηση.
- Μετακινούν το σημείο A ώστε να ορίσουν τη θέση στην οποία θα διερευνήσουν την εφαπτομένη σ' αυτό.
- Μετακινούν τον μεταβολέα h ώστε το σημείο B να πλησιάσει το σημείο A.
- Να επιλέγουν την εντολή «Μεγέθυνση-Σμίκρυνση» για να πλησιάσουν ακόμα περισσότερο στο A.

- Να επαναπροσδιορίζουν τα χαρακτηριστικά (ιδιότητες) των μεταβολέων για να μπορούν να επαναπροσδιορίζουν την συνάρτηση της οποίας μελετούν το όριο στο χ_0 .

Για τις διερευνήσεις

Ζητήστε από τους μαθητές να παρατηρούν, να προβλέπουν, να ελέγχουν και να εκφράζουν στην ομάδα τους και στην τάξη:

- Για το γράφημα:
 - ✓ Τη μορφή του γραφήματος που ορίζεται από τις τιμές των μεταβολέων.
 - ✓ Τον τρόπο σύγκλισης του σημείου B προς το σημείο A σε σχέση με την μεταβολή του κέρσορα h.
 - ✓ Τον τρόπο μεταβολής της κλίσης της εφαπτομένης στο B.
 - ✓ Την σχετική θέση των ευθειών AB και εφαπτομένη στο B.
- Για την αλγεβρική διαπραγμάτευση:
 - ✓ Καταγράφουν τις τιμές των λόγων μεταβολής καθώς το h συγκλίνει στο 0.
 - ✓ Καταγράφουν την κλίση της εφαπτομένης στο B
 - ✓ Επαληθεύουν τις τιμές του λόγου μεταβολής και της κλίσης.

Για τις απαντήσεις

Ζητήστε από τους μαθητές να εκφράσουν στην τάξη τις απαντήσεις τους. Είναι πιθανόν οι μαθητές να δώσουν απαντήσεις όπως οι παρακάτω:

Διερεύνηση 1

Αναμένεται να κάνουν τις εξής ενέργειες:

(1) Να ορίσουν με τους μεταβολείς τον τύπο της συνάρτησης (2) Να μετακινήσουν το σημείο A στη θέση (1,-1). (3) Να κινούν τον δείκτη του μεταβολέα h προς το 0. (4) Να παρατηρούν την μεταβολή της ευθείας AB, την μεταβολή της εφαπτομένης στο B, την μεταβολή της κλίσης της εφαπτομένης στο B καθώς και τον τρόπο μεταβολής του λόγου μεταβολής (5) Να καταγράφουν την κλίση της ευθείας AB σε κάθε θέση του σημείου B και να τη συσχετίζουν με τον λόγο μεταβολής. (6) Να καταγράφουν την κλίση της εφαπτομένης στο B και να την συσχετίζουν με τον λόγο μεταβολής καθώς το B πλησιάζει στο A από αριστερά και από δεξιά. (7) Να επιλέξουν την εντολή «Μεγέθυνση-Σμίκρυνση» και να κάνουν μεγέθυνση της περιοχής γύρω από το σημείο A. Ο εκπαιδευτικός πρέπει να επισημάνει στους μαθητές την ανάγκη υπολογισμού του ορίου του λόγου μεταβολής καθώς το $h \rightarrow 0^-$ ή $h \rightarrow 0^+$ καθώς και για την αναγκαιότητα της ισότητας των δυο ορίων με ένα πραγματικό αριθμό ή το ίδιο άπειρο για την ύπαρξη της εξίσωσης της εφαπτομένης.

Διερεύνηση 2

Αναμένεται να παρατηρήσουν ότι σε κάθε θέση του A η εφαπτομένη στο σημείο A και η εφαπτομένη στο σημείο B τείνουν να ταυτίζονται καθώς το B τείνει να πλησιάσει το A. Ακόμα αναμένεται να παρατηρήσουν και να σχολιάσουν ότι ο λόγος μεταβολής είναι ίσος με την κλίση της εφαπτομένης στο B και τείνει να γίνει ίσος με την κλίση στο A καθώς το h τείνει στο 0. Η εφαπτομένη στο A όταν το A είναι στη

θέση (1,1) ή στη θέση (-1,-3) δεν υπάρχει καθώς το όριο του λόγου μεταβολής όταν $h \rightarrow 0^-$ είναι το $-\infty$ και ενώ όταν $h \rightarrow 0^+$ είναι $+\infty$.

Διερεύνηση 3

Οι μαθητές αναμένεται να κάνουν τις ίδιες παρατηρήσεις που έκαναν στη προηγούμενη διερεύνηση και να διαπιστώσουν ότι όταν το A είναι στη θέση (1,-1) δεν υπάρχει εφαπτομένη για τους ίδιους λόγους.

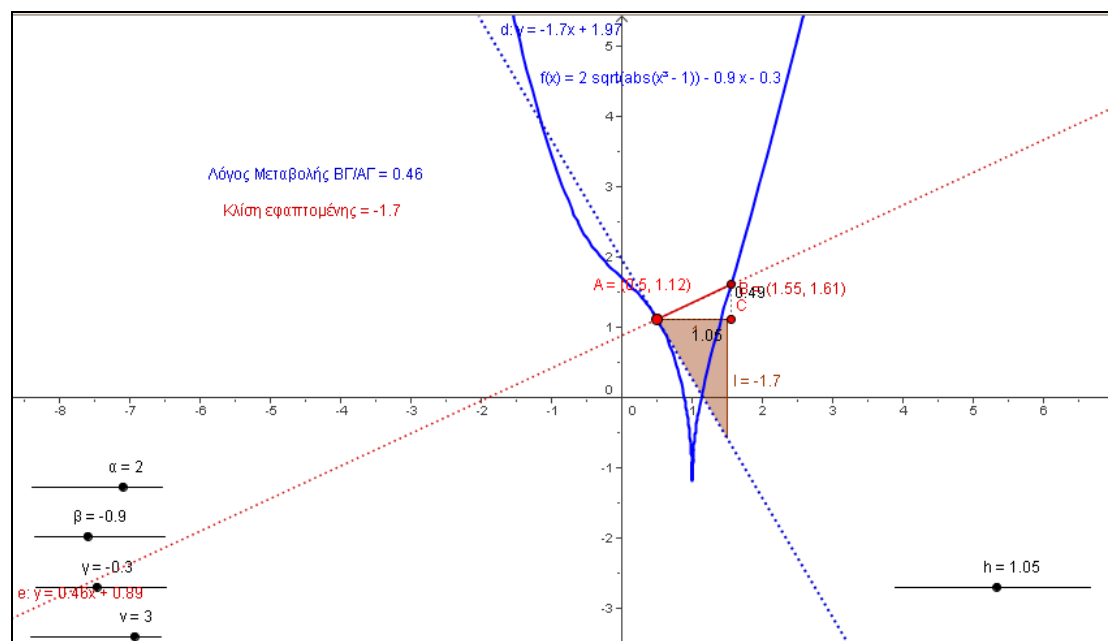
Διερεύνηση 4

Οι μαθητές μπορούν να επαναλάβουν την διερεύνηση όταν $v=1$ ή $v=2$ και $a=2$, $\beta=0$ και $\gamma=-1$. Στην περίπτωση αυτή θα κάνουν τις ίδιες παρατηρήσεις και θα διαπιστώσουν ότι όταν το όριο του λόγου μεταβολής είναι διαφορετικό όταν το B τείνει στο A από αριστερά και από δεξιά τότε δεν υπάρχει εφαπτομένη.

Ανακεφαλαίωση

Ο εκπαιδευτικός πρέπει να βοηθήσει τους μαθητές να ανακεφαλαιώσουν τις παρατηρήσεις τους σχετικά με την κλίση της ευθείας AB, τον λόγο μεταβολής όταν το B τείνει στο A, τη κλίση της εφαπτομένης στο A και να διατυπώσουν συμπεράσματα για την έννοια της εφαπτομένης καμπύλης σε ένα σημείο της καθώς και με τις απαιτήσεις ύπαρξης της εφαπτομένης σε ένα σημείο της καμπύλης συνάρτησης. Επίσης πρέπει να τους ενθαρρύνει να κατηγοριοποιήσουν τις συναρτήσεις σε σχέση με τις περιπτώσεις ύπαρξης σημείων στα οποία δεν υπάρχει εφαπτομένη; Μπορούν να κατηγοριοποιήσουν τις περιπτώσεις των συναρτήσεων ανάλογα με το αν έχουν 1 ή 2 κορυφές και αν έχουν ιδιαιτερότητα ως προς την εφαπτομένη στο (0,0).

5.2 ΣΕΝΑΡΙΟ 10 : Η Παράγωγος Συνάρτηση



5.2.1 Η κεντρική ιδέα του σεναρίου

Στο σενάριο αυτό οι μαθητές καλούνται να διερευνήσουν την έννοια της παραγώγου ως συνάρτηση μιας συνάρτησης και να εκφράσουν ποιοτικά χαρακτηριστικά της. Συγκεκριμένα εμπλέκονται σε διερευνήσεις παρατήρησης, έκφρασης και αλγεβρικής διαπραγμάτευσης ορισμένων χαρακτηριστικών της παραγώγου σε σχέση με τα αντίστοιχα χαρακτηριστικά της αρχικής συνάρτησης, όπως το πρόσημο των τιμών της παραγώγου σε σχέση με την μονοτονία της αρχικής συνάρτησης, την ύπαρξη σημείων μηδενισμού της παραγώγου σε σχέση με τα ακρότατα της συνάρτησης καθώς και την ύπαρξη της παραγώγου σε σημεία που είναι κορυφές της καμπύλης της αρχικής συνάρτησης ή σε σημεία ασυνέχειας της αρχικής συνάρτησης.

Οι μαθητές χρησιμοποιούν τους μεταβολείς για να ορίσουν τις εξισώσεις των συναρτήσεων και στη συνέχεια μετακινούν ένα σημείο της καμπύλης ώστε να συμπίπτει με ένα άλλο και παρακολουθούν πώς μεταβάλλεται η θέση και η κλίση της ευθείας που αυτά ορίζουν. Οι διαδικασίες αυτές αναμένεται να βοηθήσουν τους μαθητές να διερευνήσουν οπτικά την ύπαρξη της παραγώγου σε ένα σημείο Α την οποία στη συνέχεια καλούνται να διερευνήσουν και αλγεβρικά.

5.2.2 Στόχοι

- Να αποκτήσουν εμπειρίες σχετικές με την έννοια της παραγώγου ως συνάρτηση μιας δεδομένης συνάρτησης.
- Να αποκτήσουν εμπειρίες σχετικές με τον τρόπο που συνδέονται τα ποιοτικά χαρακτηριστικά της καμπύλης της παραγώγου με ποιοτικά χαρακτηριστικά της καμπύλης της αρχικής συνάρτησης.

- Να μελετούν και να εκφράσουν ποιοτικά και αλγεβρικά την ύπαρξη και την εύρεση της παραγώγου σε σημείο της καμπύλης της συνάρτησης.

5.2.3 Διδακτική πρόταση

ΟΡΓΑΝΩΣΗ ΤΗΣ ΤΑΞΗΣ

Οι δραστηριότητες αυτές ενδείκνυται να διδάσκονται στο εργαστήριο υπολογιστών και οι μαθητές να εργάζονται σε ομάδες 2-3 ατόμων με φύλλο εργασίας. Μπορούν όμως να διεξαχθούν και στην τάξη που διαθέτει μόνο ένα υπολογιστή με βιντεοπροβολέα. Σ' αυτή την περίπτωση οι μαθητές συμπληρώνουν τα φύλλα εργασίας με βάση τις παρατηρήσεις που κάνουν κατά την διερεύνηση που γίνεται απ' όλη τη τάξη και κατευθύνεται από τον εκπαιδευτικό ή κάποιον μαθητή. Στο πλαίσιο αυτό κάνουν παρεμβάσεις στην διερεύνηση με τις οποίες εκφράζουν την δική τους στρατηγική στη διερεύνηση. Καθώς τέτοιες παρεμβάσεις μπορούν να γίνονται στη τάξη απ' όλους τους μαθητές ο διδάσκων πρέπει να τις υποστηρίζει και να επιδιώκει να συζητούνται όλες οι πιθανές στρατηγικές της διερεύνησης.

Σε κάθε περίπτωση ο εκπαιδευτικός πρέπει να έχει από πριν προετοιμάσει τον τρόπο που θα χειριστεί τις διαφορετικές στρατηγικές που πιθανόν να διατυπωθούν καθώς και τις πιθανές εκβάσεις τους.

Ακόμα πρέπει με τη στάση του να προκαλεί την εφαρμογή των διαφορετικών τρόπων διερεύνησης, να ενθαρρύνει κάθε μαθητή να δοκιμάζει τις ιδέες του, να εκφράζει τις εικασίες του και να διατυπώνει τα συμπεράσματά του ελεύθερα. Ακόμα πρέπει να ενθαρρύνει τους μαθητές να προσπαθούν να επαληθεύουν αλγεβρικά τα αποτελέσματα των διερευνήσεών τους.

ΟΙ ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΕΣ ΔΥΝΑΤΟΤΗΤΕΣ ΤΟΥ ΣΕΝΑΡΙΟΥ

Οι προτεινόμενες στο σενάριο δραστηριότητες αφορούν φαινόμενα τα οποία προκαλούνται από την δράση των μαθητών σε προσχεδιασμένους υπολογιστικούς μικρόκοσμους με σκοπό την ανάδειξη των διερευνούμενων ιδιοτήτων τους. Έτσι οι απαντήσεις στα ερωτήματα που τίθενται στο πλαίσιο αυτών των διερευνήσεων αλλά και αυτών που ο διδάσκων ή οι ίδιοι οι μαθητές μπορούν να θέσουν είναι δυνατόν να αποτελέσουν ένα περιβάλλον απόκτησης και έκφρασης εμπειριών σχετικών με την έννοια της συνάρτησης παράγωγο μιας αρχικής συνάρτησης, την παρατήρηση, έκφραση και αλγεβρική έκφραση και διερεύνηση της συνάρτησης παράγωγο, σε σχέση με την σύνδεση των ποιοτικών χαρακτηριστικών των δυο συναρτήσεων. Τα εργαλεία που έχουν ενσωματωθεί στους μικρόκοσμους δίνουν την δυνατότητα στους μαθητές,

- να κάνουν πειράματα με τον προσδιορισμό συγκεκριμένων συναρτήσεων προκειμένου να διερευνήσουν την εφαπτομένη και την παράγωγο στα διάφορα σημεία της συνάρτησης,
- να διερευνήσουν τη θέση του σημείου Α στο οποίο αλλάζει κλάδο η συνάρτηση ώστε στο σημείο αυτό να είναι συνεχής η αρχική συνάρτηση και να εξετάσουν αν υπάρχει η παράγωγος σ' αυτό,
- να λύνουν προβλήματα αλγεβρικού προσδιορισμού της παραγώγου της συνάρτησης σε ένα σημείο του πεδίου ορισμού της
- να παρατηρούν και να ερμηνεύουν τα αποτελέσματα των χειρισμών τους,

- να εκφράζουν εικασίες, να κάνουν γενικεύσεις, να διατυπώνουν υποθέσεις και θεωρήματα και να τα εκφράζουν με μαθηματικούς όρους,

Ακόμα, μπορούν να επεμβαίνουν και να επαναπροσδιορίζουν τις δυνατότητες των εργαλείων ή να επαναδιατυπώνουν τον τρόπο ορισμού των αντικειμένων και να μεταβάλλουν την εμφάνισή τους. Από αυτή την άποψη οι μικρόκοσμοι είναι επαναχρησιμοποιήσιμοι και δίνουν τη δυνατότητα στους χρήστες να διατυπώνουν και νέα ερωτήματα που αφορούν ιδιαίτερες γνωστικές πτυχές των μαθηματικών αντικειμένων.

ΠΟΡΕΙΑ ΤΗΣ ΕΦΑΡΜΟΓΗΣ ΤΟΥ ΣΕΝΑΡΙΟΥ

Το σενάριο αποτελείται από τέσσερις εργασίες. Στην πρώτη, οι μαθητές διαπραγματεύονται την έννοια της παραγώγου της συνάρτησης $f(x)=ax^v+bx+\gamma$ και συνδέουν τα χαρακτηριστικά της καμπύλης της κλίσης της εφαπτομένης στα διάφορα σημεία της με τα χαρακτηριστικά της καμπύλης της συνάρτησης. Στη δεύτερη, οι μαθητές διαπραγματεύονται την έννοια της παραγώγου της συνάρτησης $f(x)=a*\sin(b*x+\gamma)+\delta$ για τις διάφορες τιμές των παραμέτρων της και συνδέουν τα χαρακτηριστικά της παραγώγου με αυτά της συνάρτησης. Στην τρίτη, διερευνάται η σχέση των χαρακτηριστικών της παραγώγου της συνάρτησης

$$f(x)=a\sqrt{|x^v-1|}+bx+\gamma \quad (f(x)=a \sqrt{\text{abs}(x^v-1)}+bx+\gamma) \text{ σε σχέση με τα}$$

χαρακτηριστικά της συνάρτησης. Ιδιαίτερα διερευνάται η ύπαρξη της παραγώγου σε ορισμένα χαρακτηριστικά σημεία της συνάρτησης. Στην τέταρτη, μελετάται

$$\text{παράγωγος της συνάρτησης } f(x)=\begin{cases} ax^v+x+\beta^2, & -100 \leq x \leq x_A \\ kx^u+bx+\lambda, & x_A < x < 100 \end{cases} \text{ και η ύπαρξη της}$$

παραγώγου στο σημείο A που αλλάζει ο τύπος της συνάρτησης.

H εμπλοκή των μαθητών με κάθε μια δραστηριότητα αναμένεται να αναδείξει:

- Τη σχέση του βαθμού των πολυωνυμικών συναρτήσεων και του βαθμού της παραγώγου των.
- Την στενή σχέση της μονοτονίας της συνάρτησης σε σχέση με το πρόσημο της παραγώγου της.
- Τη στενή σχέση των σημείων μηδενισμού της παραγώγου σε ένα σημείο της σε σχέση με την κλίση της εφαπτομένης στο σημείο αυτό και την ύπαρξη τοπικού ακρότατου της αρχικής συνάρτησης.
- Τον ρόλο της συνέχειας της συνάρτησης σε ένα σημείο της σε σχέση με την ύπαρξη της παραγώγου σ' αυτό.
- Τον ρόλο της θέσης του σημείου στο οποίο αλλάζει κλάδο μια διπλού τύπου συνάρτηση σε σχέση με την συνέχεια της συνάρτησης σ' αυτό και την ύπαρξη της παραγώγου .

Ο εκπαιδευτικός μπορεί να ζητά από τους μαθητές να επαληθεύουν αλγεβρικά τα συμπεράσματά τους σε κάθε περίπτωση. Ακόμα μπορεί να αναδείξει και άλλα ζητήματα σχετικά με την παράγωγο και την καμπύλη της σε σχέση με την αρχική συνάρτηση.

ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

Ενότητα	Περιγραφή	Τμήμα εφαρμογής	Περιεχόμενο
Εργασία 1	Μεταβολή της κλίσης της εφαπτομένης	ΟΛΟΙ	Διερευνήσεις για την μεταβολή της κλίσης της εφαπτομένης καμπύλης καθώς μεταβάλλεται το σημείο επαφής.
Εργασία 2	Η συνάρτηση της κλίσης της εφαπτομένης καμπύλης	ΟΛΟΙ	Διερευνήσεις για τη συνάρτηση της εφαπτομένης καμπύλης.
Εργασία 3	Η συνάρτηση της παραγώγου	ΚΑΤ/ΣΕΙΣ	Διερευνήσεις σχετικές με την έννοια της συνάρτησης παράγωγος μιας συνάρτησης.
Εργασία 4	Η παράγωγος συνάρτησης διπλού τύπου	ΚΑΤ/ΣΕΙΣ	Διερευνήσεις για τον ορισμό της παραγώγου συνάρτησης διπλού τύπου.

5.2.4 Θέμα 1: Μεταβολή της κλίσης της εφαπτομένης

Στην επιφάνεια εργασίας του παρακάτω μικρόκοσμου έχει σχεδιαστεί η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\alpha \cdot x^{\nu}+\beta \cdot x+\gamma$. Ακόμα έχει σχεδιαστεί η καμπύλη της κλίσης της εφαπτομένης. Δηλαδή έχει σχεδιαστεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων που έχουν τετμημένη την τετμημένη του σημείου A και τεταγμένη την κλίση της εφαπτομένης στο σημείο A. Ερευνήστε τον τρόπο μεταβολής της κλίσης της εφαπτομένης.

ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΕΙΣ

1. Επιλέξτε οι δείκτες των μεταβολών να δείχνουν $\alpha=0.2$, $\beta=0$, $\gamma=0$ και $\nu=2$ και το σημείο A να έχει τετμημένη 3. Μπορείτε να περιγράψετε τον τρόπο μεταβολής της κλίσης της εφαπτομένης στο σημείο A; Μπορείτε να εκφράσετε αλγεβρικά την καμπύλη της κλίσης;
2. Επιλέξτε "Επαναπροσδιορισμός" και πληκτρολογήστε τη συνάρτηση $f(x)=\alpha \cdot x^{\nu}+\beta \cdot x+\gamma$ ώστε οι παράμετροι της να είναι $\alpha=0.2$, $\beta=0$, $\gamma=0$ και ο $\nu=1$. Μπορείτε να περιγράψετε τον τρόπο μεταβολής της κλίσης της εφαπτομένης στο σημείο A καθώς μεταβάλλετε τη θέση του στην καμπύλη; Μπορείτε να εκφράσετε αλγεβρικά την καμπύλη της κλίσης; Τι θα συμβεί στην καμπύλη της κλίσης αν μεταβάλλετε τους δείκτες των μεταβολών β ή γ ;
3. Πληκτρολογήστε τη συνάρτησης $f(x)=\alpha \cdot x^{\nu}+\beta \cdot x+\gamma$ ώστε οι παράμετροι της να είναι $\alpha=0.2$, $\beta=0$, $\gamma=0$ και ο $\nu=3$. Μπορείτε να περιγράψετε τον τρόπο μεταβολής της κλίσης της εφαπτομένης στο σημείο A καθώς μεταβάλλετε τη θέση του στην καμπύλη; Μπορείτε να εκφράσετε αλγεβρικά την καμπύλη της κλίσης; Τι θα συμβεί στην καμπύλη της κλίσης αν μεταβάλλετε τους δείκτες των μεταβολών β ή γ ;
4. Επιλέξτε κατά την πληκτρολόγηση διάφορες τιμές για τους δείκτες των μεταβολών α , β , γ και ν . Μπορείτε να περιγράψετε τον τρόπο μεταβολής της κλίσης της εφαπτομένης στο σημείο A καθώς αυτό κινείται στη γραφική παράσταση της συνάρτησης; Πώς συνδέεται η μορφή της καμπύλης της μεταβολής με τη μορφή της γραφικής παράστασης της συνάρτησης;

ΟΔΗΓΙΕΣ ΠΡΟΣ ΤΟΝ ΔΙΔΑΣΚΟΝΤΑ

Για τη διαχείριση των εργαλείων του μικρόκοσμου

Ζητήστε από τους μαθητές:

- Να κινούν τον κάθε μεταβολέα κατάλληλα ώστε να ορίσουν την εξίσωση της συνάρτησης σύμφωνα με την διερεύνηση.
- Μετακινούν το σημείο A ώστε να μεταβάλλουν την εφαπτομένη της καμπύλης στο σημείο A.
- Να χρησιμοποιούν την εντολή "Ιδιότητες" για να επαναπροσδιορίζουν τα χαρακτηριστικά των μεταβολών για να μπορούν να επαναπροσδιορίζουν την συνάρτηση $f(x)$.

Για τις διερευνήσεις

Ζητήστε από τους μαθητές να παρατηρούν, να προβλέπουν, να ελέγχουν και να εκφράζουν στην ομάδα τους και στην τάξη:

- Για το γράφημα:
 - ✓ Την κατεύθυνση και την κλίση της εφαπτομένης σε κάθε θέση του σημείου A.
 - ✓ Τη μορφή του γραφήματος που ορίζεται από τις τιμές της κλίσης της εφαπτομένης.
 - ✓ Τον τρόπο που μεταβάλλεται το ευθύγραμμο τμήμα A_1B .
 - ✓ Επιλέγουν τη θέση του σημείου A στο γράφημα ώστε να ορίζουν την εφαπτομένη του γραφήματος της συνάρτησης σε ειδικές θέσεις.
- Για την αλγεβρική διαπραγμάτευση:
 - ✓ Καταγράφουν τις συντεταγμένες της θέσης του σημείου B και διαπραγματεύονται τον προσδιορισμό της εξίσωσης της καμπύλης στην οποία ανήκει το σημείο B.

Για τις απαντήσεις

Ζητήστε από τους μαθητές να εκφράσουν στην τάξη τις απαντήσεις τους. Είναι πιθανόν οι μαθητές να δώσουν απαντήσεις όπως οι παρακάτω:

Διερεύνηση 1

Οι μαθητές διαπραγματεύονται την συνάρτηση $f(x)=0.2x^2$. Αναμένεται να κάνουν τις εξής ενέργειες:

(1) Να μετακινούν το σημείο A και να παρατηρούν την κατακόρυφη πλευρά του ορθογωνίου τριγώνου που δείχνει την κλίση της εφαπτομένης στο A. (2) Να παρατηρήσουν τον τρόπο μεταβολής του ευθύγραμμου τμήματος A_1B . (3) Να χρησιμοποιήσουν δεδομένα από την μεταβολή του A_1B και από τις συντεταγμένες του B για να προσδιορίσουν την εξίσωση της κλίσης της εφαπτομένης. Ο εκπαιδευτικός πρέπει να ζητήσει από τους μαθητές να περιγράψουν την μεταβολή της κλίσης της εφαπτομένης και να την εκφράσουν αλγεβρικά χρησιμοποιώντας τις συντεταγμένες του σημείου B.

Διερεύνηση 2

Οι μαθητές διαπραγματεύονται την συνάρτηση $f(x)=0.2x$. Αναμένεται να παρατηρήσουν ότι η καμπύλη της κλίσης της εφαπτομένης είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$. Ακόμα σε κάθε αλλαγή της παραμέτρου γ η καμπύλη της κλίσης εξακολουθεί να παραμένει παράλληλη στον άξονα $x'x$. Και ακόμα ότι σε κάθε αλλαγή της παραμέτρου β η καμπύλη της κλίσης της εφαπτομένης μεταβάλλεται αλλά παραμένει παράλληλη προς τον άξονα $x'x$. Δηλαδή, η καμπύλη της κλίσης της εφαπτομένης είναι πάντοτε σταθερή και (1) αλλάζει όταν μεταβάλλεται ο συντελεστής β και δεν μεταβάλλεται όταν αλλάζει μόνο ο συντελεστής γ .

Διερεύνηση 3

Οι μαθητές διαπραγματεύονται την συνάρτηση $f(x) = 0.2x^3$. Αναμένεται να μετακινήσουν το σημείο Α αργά και να παρακολουθούν την μεταβολή της κλίσης της εφαπτομένης καθώς και τη μεταβολή του σημείου Β. Προφανώς θα διαπιστώσουν ότι η καμπύλη της κλίσης είναι μια παραβολή. Ακόμα αναμένεται να παρατηρήσουν ότι όταν μεταβάλλουν την παράμετρο γ ενώ μεταβάλλεται η καμπύλη της συνάρτησης δεν μεταβάλλεται η καμπύλη της κλίσης. Και ακόμα όταν μεταβάλλεται η παράμετρος β τότε η καμπύλη της κλίσης δεν αλλάζει μορφή αλλά θέση στο επίπεδο. Ο εκπαιδευτικός μπορεί να ζητήσει από τους μαθητές να συνδυάσουν αυτές τις παρατηρήσεις για την μορφή της καμπύλης της κλίσης της εφαπτομένης και την μεταβολή της όταν μεταβάλλονται οι παράμετροι των β και γ με τις αντίστοιχες από τις προηγούμενες διερευνήσεις όπου όταν η συνάρτηση είναι τετραγωνική η καμπύλη είναι ευθεία και όταν η συνάρτηση είναι γραμμική η καμπύλη της κλίσης είναι σταθερή.

Διερεύνηση 4

Και στην περίπτωση αυτής της διερεύνησης οι μαθητές αναμένεται να κάνουν ανάλογες παρατηρήσεις με αυτές που έκαναν στις προηγούμενες διερευνήσεις και να καταλήξουν σε ανάλογα συμπεράσματα. Αναμένεται να επιλέξουν για την παράμετρο n τις τιμές 4, 5, -1, -2, -3, κ.ά.

Ανακεφαλαίωση

Ζητήστε από τους μαθητές να εκφράσουν στη τάξη τα αποτελέσματα των διερευνήσεων που κάνατε. Ζητήστε τους να περιγράψο τη σχέση που έχει η καμπύλη της κλίσης της εφαπτομένης με τον τύπο της συνάρτησης;

5.2.5 Θέμα 2: Η συνάρτηση της κλίσης της εφαπτομένης καμπύλης

Στην επιφάνεια εργασίας του παρακάτω μικρόκοσμου έχει σχεδιαστεί η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=a*\sin(\beta*x+\gamma)+\delta$. Ακόμα έχει σχεδιαστεί η καμπύλη της κλίσης της εφαπτομένης. Δηλαδή έχει σχεδιαστεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων που έχουν τετμημένη την τετμημένη του σημείου A και τεταγμένη την κλίση της εφαπτομένης στο σημείο A. Ερευνήστε την συνάρτηση της κλίσης της εφαπτομένης.

ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΕΙΣ

1. Επιλέξτε οι δείκτες των μεταβολών να δείχνουν $a=2$, $\beta=1$, $\gamma=0$ και $\delta=0$. Μπορείτε να περιγράψετε τον τρόπο μεταβολής της κλίσης της εφαπτομένης στο σημείο A καθώς αυτό μεταβάλλεται; Μπορείτε να εκφράσετε αλγεβρικά την καμπύλη της κλίσης;
2. Επιλέξτε οι δείκτες των μεταβολών να δείχνουν $a=-2$, $\beta=1$, $\gamma=0$ και $\delta=0$. Τι αλλάζει στον τρόπο μεταβολής της κλίσης της εφαπτομένης στο σημείο A καθώς αυτό μεταβάλλεται σε σχέση με την προηγούμενη διερεύνηση; Μπορείτε να εκφράσετε αλγεβρικά την καμπύλη της κλίσης;
3. Επιλέξτε οι δείκτες των μεταβολών να δείχνουν $a=2$, $\beta=1$, $\gamma=0$ και $\delta=0$. Μπορείτε να επανακαθορίσετε την συνάρτηση $s(x) = d*(e*x+g)+h$ ώστε η γραφική της παράσταση να συμπίπτει με την καμπύλη της κλίσης της εφαπτομένης της $\varphi(\chi)$ στο σημείο A; Μπορείτε να εκφράσετε αλγεβρικά την καμπύλη της κλίσης;
4. Επιλέξτε οι δείκτες των μεταβολών να δείχνουν $a=-2$, $\beta=1$, $\gamma=0$ και $\delta=0$. Μπορείτε να επανακαθορίσετε την συνάρτηση $s(x) = d*(e*x+g)+h$ ώστε η γραφική της παράσταση να συμπίπτει με την καμπύλη της κλίσης της εφαπτομένης της $f(\chi)$ στο σημείο A; Μπορείτε να εκφράσετε αλγεβρικά την καμπύλη της κλίσης;

ΟΔΗΓΙΕΣ ΠΡΟΣ ΤΟΝ ΔΙΔΑΣΚΟΝΤΑ

Για τη διαχείριση των εργαλείων του μικρόκοσμου:

Ζητήστε από τους μαθητές:

- Να κινούν τον κάθε μεταβολέα κατάλληλα ώστε να ορίσουν την εξίσωση της συνάρτησης $f(x)$ σύμφωνα με τη διερεύνηση.
- Μετακινούν τους μεταβολείς κ , λ , μ και ν για να ορίσουν την συνάρτηση $\varphi(\chi)$ ώστε η γραφική της παράσταση να ταυτίζεται με την καμπύλη της κλίσης της εφαπτομένης.
- Μετακινούν το σημείο A ώστε να μεταβάλλουν την εφαπτομένη της καμπύλης στο σημείο A.
- Να χρησιμοποιούν την εντολή “Properties” για να επαναπροσδιορίζουν τα χαρακτηριστικά των μεταβολών για να μπορούν να επαναπροσδιορίζουν την συνάρτηση $f(x)$.

- Να χρησιμοποιούν την εντολή “Redefine” για να επαναπροσδιορίζουν τον τύπο της συνάρτησης $\varphi(x)$.

Για τις διερευνήσεις

Ζητήστε από τους μαθητές να παρατηρούν, να προβλέπουν, να ελέγχουν και να εκφράζουν στην ομάδα τους και στην τάξη:

- Για το γράφημα:
 - ✓ Την κατεύθυνση και την κλίση της εφαπτομένης σε κάθε θέση του σημείου A.
 - ✓ Τη μορφή του γραφήματος που ορίζεται από τις τιμές της κλίσης της εφαπτομένης.
 - ✓ Τον τρόπο που μεταβάλλεται το ευθύγραμμο τμήμα A_1B .
 - ✓ Επιλέγουν τη θέση του σημείου A στο γράφημα ώστε να ορίζουν την εφαπτομένη του γραφήματος της συνάρτησης σε ειδικές θέσεις (όταν μηδενίζεται το ευθ. τμήμα A_1B , όταν αυτό είναι πάνω ή κάτω από τον άξονα χ'χ).
- Για την αλγεβρική διαπραγμάτευση:
 - ✓ Καταγράφουν τις συντεταγμένες της θέσης του σημείου B και διαπραγματεύονται τον προσδιορισμό της εξίσωσης της καμπύλης στην οποία ανήκει το σημείο B.
 - ✓ Διατυπώνουν εικασίες για την εξίσωση της συνάρτησης $\varphi(x)$ και τις ελέγχουν επαναδιατυπώνοντας με την εντολή Redefine την εξίσωση ώστε η γραφική της παράσταση να ταυτίζεται με την καμπύλη της κλίσης της εφαπτομένης.

Για τις απαντήσεις

Ζητήστε από τους μαθητές να εκφράσουν στην τάξη τις απαντήσεις τους. Είναι πιθανόν οι μαθητές να δώσουν απαντήσεις όπως οι παρακάτω:

Διερεύνηση 1

Οι μαθητές διαπραγματεύονται την συνάρτηση $f(x) = 2\eta\mu(x)$. Αναμένεται να κάνουν τις εξής ενέργειες:

(1) Να μετακινούν το σημείο A και να παρατηρούν την κατακόρυφη πλευρά του ορθογωνίου τριγώνου που δείχνει την κλίση της εφαπτομένης στο A. (2) Να παρατηρήσουν τον τρόπο μεταβολής του ευθύγραμμου τμήματος A_1B . (3) Να χρησιμοποιήσουν δεδομένα από την μεταβολή του A_1B και από τις συντεταγμένες του B για να προσδιορίσουν τα χαρακτηριστικά της καμπύλης της κλίσης της εφαπτομένης. Ο εκπαιδευτικός πρέπει να ζητήσει από τους μαθητές να περιγράψουν την μεταβολή της κλίσης της εφαπτομένης και να την εκφράσουν αλγεβρικά επαναδιατυπώνοντας την εξίσωση της $\varphi(x)$ ώστε η γραφική της παράσταση να ταυτίζεται με την καμπύλη της κλίσης της εφαπτομένης.

Διερεύνηση 2

Οι μαθητές διαπραγματεύονται την συνάρτηση $f(x) = -2\eta\mu(x)$. Αναμένεται να παρατηρήσουν ότι συνάρτηση καθώς και η καμπύλη της κλίσης της εφαπτομένης

είναι συμμετρικές ως προς τον άξονα $\chi'\chi$ των αντίστοιχων καμπυλών της προηγούμενης διερεύνησης.

Διερεύνηση 3

Οι μαθητές διαπραγματεύονται την συνάρτηση $f(x) = 2\eta\mu(x)$. Αναμένεται να πληκτρολογήσουν την εξίσωση $\varphi(x) = \kappa * (\lambda * \cos(x) + \mu) + \nu$ και να επιλέξουν για τους μεταβολείς τις τιμές $\kappa=2$, $\lambda=1$, $\mu=0$ και $\nu=0$. Έτσι θα διαπιστώσουν ότι η καμπύλη της κλίσης της εφαπτομένης είναι $\varphi(\chi) = 2\sigma\upsilon\nu(\chi)$

Διερεύνηση 4

Οι μαθητές διαπραγματεύονται την συνάρτηση $f(x) = 2\eta\mu(x)$. Οι μαθητές διαπραγματεύονται την συνάρτηση $f(x) = 2\eta\mu(x)$. Αναμένεται να πληκτρολογήσουν την εξίσωση $\varphi(x) = \kappa * (\lambda * \cos(x) + \mu) + \nu$ και να επιλέξουν για τους μεταβολείς τις τιμές $\kappa = -2$, $\lambda=1$, $\mu=0$ και $\nu=0$. Έτσι θα διαπιστώσουν ότι η καμπύλη της κλίσης της εφαπτομένης είναι $\varphi(\chi) = -2\sigma\upsilon\nu(\chi)$

5.2.6 Θέμα 3: Η συνάρτηση της παραγώγου

Στην επιφάνεια εργασίας του παρακάτω μικρόκοσμου έχει σχεδιαστεί η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=a*\sqrt{\text{abs}(x^n-1))+\beta*x+\gamma$ για ορισμένες τιμές των παραμέτρων της και του εκθέτη της δύναμης. Ακόμα έχει σχεδιαστεί η καμπύλη της παραγώγου (δηλαδή της κλίσης της εφαπτομένης). Έχει σχεδιαστεί δηλαδή η γραφική παράσταση των σημείων που έχουν τετμημένη την τετμημένη του σημείου Α και τεταγμένη την κλίση της εφαπτομένης στο σημείο Α. Ερευνήστε τον τρόπο μεταβολής της παραγώγου καθώς μεταβάλλονται οι τιμές των συντελεστών της συνάρτησης.

ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΕΙΣ

1. Η συνάρτηση έχει $a=2$, $\beta=0$, $\gamma=-1$ και $n=3$. Μπορείτε να περιγράψετε την παράγωγο της συνάρτησης στα διάφορα σημεία της (δηλαδή την κλίση της εφαπτομένης της καμπύλης στα διάφορα σημεία της); Πότε η παράγωγος είναι θετική και πότε αρνητική; Τι συμβαίνει στην κορυφή της καμπύλης; Γιατί η γραφική παράσταση της παραγώγου έχει δυο κλάδους; Μπορείτε να εξηγήσετε και αλγεβρικά τις απαντήσεις σας αφού πρώτα προσδιορίσετε την εξίσωση της παραγώγου; Μπορείτε να εξηγήσετε γιατί δεν υπάρχει εφαπτομένη της καμπύλης στο σημείο $A(1,0)$;
2. Επιλέξτε "Επαναπροσδιορισμός" και πληκτρολογήστε την νέα συνάρτηση με τιμές των παραμέτρων $a=2$, $\beta=2$, $\gamma=-1$ και του εκθέτη $n=3$. Τι συμβαίνει στον τρόπο μεταβολής των τιμών της συνάρτησης στα διαστήματα που η παράγωγος είναι θετική ή αρνητική; Πώς συνδέεται η μονοτονία της συνάρτησης με το πρόσημο της παραγώγου; Τι συμβαίνει στο σημείο που η παράγωγος είναι 0; Μπορείτε να εξηγήσετε και αλγεβρικά τις απαντήσεις σας αφού πρώτα προσδιορίσετε την εξίσωση της παραγώγου;
3. Επιλέξτε "Επαναπροσδιορισμός" και πληκτρολογήστε την νέα συνάρτηση με τιμές των παραμέτρων $a=2$, $\beta=2$, $\gamma=-1$ και $n=4$. Τι συμβαίνει στον τρόπο μεταβολής των τιμών της συνάρτησης στα διαστήματα που η παράγωγος είναι θετική ή αρνητική; Πώς συνδέεται η μονοτονία της συνάρτησης με το πρόσημο της παραγώγου; Τι συμβαίνει στις κορυφές της καμπύλης; Υπάρχουν σημεία στα οποία η παράγωγος είναι 0; Μπορείτε να εξηγήσετε και αλγεβρικά τις απαντήσεις σας αφού πρώτα προσδιορίσετε την εξίσωση της παραγώγου.
4. Επιλέξτε "Επαναπροσδιορισμός" και πληκτρολογήστε την νέα συνάρτηση με τιμές των παραμέτρων $a=2$, $\beta=0$, $\gamma=-1$ και $n=-1$ και επαναλάβετε τις προηγούμενες διερευνήσεις. Πώς εξηγείται το γεγονός ότι η παράγωγος της συνάρτησης έχει τρεις κλάδους;

ΟΔΗΓΙΕΣ ΠΡΟΣ ΤΟΝ ΔΙΔΑΣΚΟΝΤΑ

Για την διαχείριση των εργαλείων του μικρόκοσμου

Ζητήστε από τους μαθητές:

- Να κινούν τον κάθε μεταβολέα κατάλληλα ώστε να ορίσουν την εξίσωση της συνάρτησης $f(x)$ σύμφωνα με την διερεύνηση.

- Μετακινούν το σημείο A ώστε να μεταβάλλουν την εφαπτομένη της καμπύλης στο σημείο A.
- Να χρησιμοποιούν την εντολή “Properties” για να επαναπροσδιορίζουν τα χαρακτηριστικά των μεταβολέων για να μπορούν να επαναπροσδιορίζουν την συνάρτηση $f(x)$.
- Να χρησιμοποιούν την εντολή “Redefine” για να επαναπροσδιορίζουν τον τύπο της συνάρτησης $\varphi(x)$.

Για τις διερευνήσεις

Ζητήστε από τους μαθητές να παρατηρούν, να προβλέπουν, να ελέγχουν και να εκφράζουν στην ομάδα τους και στην τάξη:

- Για το γράφημα
 - ✓ Τη κατεύθυνση και τη κλίση της εφαπτομένης σε κάθε θέση του σημείου A.
 - ✓ Τη μορφή του γραφήματος που ορίζεται από τις τιμές της κλίσης της εφαπτομένης.
 - ✓ Τον τρόπο που μεταβάλλεται το ευθύγραμμο τμήμα A_1B .
 - ✓ Επιλέγουν τη θέση του σημείου A στο γράφημα ώστε να ορίζουν την εφαπτομένη του γραφήματος της συνάρτησης σε ειδικές θέσεις (όταν μηδενίζεται το ευθ. τμήμα A_1B , όταν αυτό είναι πάνω ή κάτω από τον άξονα $x'x$ ή όταν τείνει στο άπειρο).
- Για την αλγεβρική διαπραγμάτευση:
 - ✓ Καταγράφουν τις συντεταγμένες της θέσης του σημείου B και διαπραγματεύονται τον προσδιορισμό της εξίσωσης της καμπύλης στην οποία ανήκει το σημείο B.
 - ✓ Υπολογίζουν με τον ορισμό της παραγώγου της συνάρτησης, την παράγωγο της στο σημείο (1,-1).
 - ✓ Διατυπώνουν εικασίες για την εξίσωση της παραγώγου και τις ελέγχουν με τον προσδιορισμό της παραγώγου σε τυχαίο σημείο.
 - ✓ Επαναδιατυπώνουν με την εντολή “Redefine” την εξίσωση της $\varphi(x)$ ώστε να ταυτίζεται με την παράγωγο της $f(x)$.

Για τις απαντήσεις

Ζητήστε από τους μαθητές να εκφράσουν στην τάξη τις απαντήσεις τους. Είναι πιθανόν οι μαθητές να δώσουν απαντήσεις όπως οι παρακάτω:

Διερεύνηση 1

Οι μαθητές διαπραγματεύονται την συνάρτηση $f(x) = 2\sqrt{x^3 - 1} - 1$. Αναμένεται να κάνουν τις εξής ενέργειες:

(1) Να μετακινούν το σημείο A και να παρατηρούν την κατακόρυφη πλευρά του ορθογωνίου τριγώνου που δείχνει την κλίση της εφαπτομένης στο A. (2) Να παρατηρήσουν τον τρόπο μεταβολής του ευθύγραμμου τμήματος A_1B . (3) Να

χρησιμοποιήσουν δεδομένα από την μεταβολή του A_1B και από τις συντεταγμένες του B για να προσδιορίσουν τα χαρακτηριστικά της καμπύλης της κλίσης της εφαπτομένης. (4) Να παρατηρούν τον τρόπο μεταβολής της κλίσης στα ειδικά σημεία της καμπύλης όπως στο $(1,-1)$. Ο εκπαιδευτικός πρέπει να ζητήσει από τους μαθητές να περιγράψουν την μεταβολή της κλίσης της εφαπτομένης κοντά στο σημείο $(1,-1)$ και να υπολογίσουν την παράγωγο με τον ορισμό όταν το A τείνει στο σημείο αυτό. Επίσης τους ζητά να ερμηνεύσουν το γεγονός ότι η παράγωγος έχει δυο κλάδους για τιμές στο x αριστερά και δεξιά από το $(1,-1)$.

Διερεύνηση 2

Οι μαθητές διαπραγματεύονται την συνάρτηση $f(x) = 2\sqrt{x^3 - 1} + 2x - 1$. Αναμένεται να παρατηρήσουν ότι όσο η παράγωγος της συνάρτησης είναι αρνητική η συνάρτηση είναι φθίνουσα και όσο είναι θετική είναι αύξουσα. Ακόμα στο σημείο $(1,1)$ αναμένεται να εκφράσουν την αντίληψη ότι η συνάρτηση στο σημείο αυτό δεν έχει παράγωγο και επομένως η παράγωγος συνάρτηση αποτελείται από δυο κλάδους. Ο εκπαιδευτικός μπορεί να ζητήσει από τους μαθητές να χρησιμοποιήσουν την εντολή “Μεγέθυνση-Σμίκρυνση” ή να μεταβάλλουν το πεδίο ορισμού και τιμών της συνάρτησης ώστε να παρατηρήσουν και τον δεύτερο κλάδο.

Διερεύνηση 3

Οι μαθητές διαπραγματεύονται τη συνάρτηση $f(x) = 2\sqrt{x^4 - 1} + 2x - 1$. Αναμένεται να παρατηρήσουν ότι όσο η παράγωγος της συνάρτησης είναι αρνητική η συνάρτηση είναι φθίνουσα και όσο είναι θετική είναι αύξουσα. Ακόμα ότι υπάρχει ένα σημείο στο οποίο η παράγωγος μηδενίζεται και ότι στο σημείο αυτό η εφαπτομένη είναι παράλληλη στον άξονα xx' . Τέλος αναμένεται να παρατηρήσουν δυο ότι υπάρχουν δυο σημεία, τα $(-3, -1)$ και $(1,1)$, στα οποία δεν υπάρχει παράγωγος και επομένως η παράγωγος έχει τρεις κλάδους. Ο εκπαιδευτικός μπορεί να ζητήσει από τους μαθητές να χρησιμοποιήσουν την εντολή “Μεγέθυνση-Σμίκρυνση” ή να μεταβάλλουν το πεδίο ορισμού και τιμών της συνάρτησης ώστε να παρατηρήσουν και τον δεύτερο κλάδο.

Διερεύνηση 4

Οι μαθητές διαπραγματεύονται τη συνάρτηση $f(x) = 2\sqrt{\frac{1}{x} - 1} - 1$. Αναμένεται να κάνουν ανάλογες με τις προηγούμενες διερευνήσεις και να διατυπώσουν την άποψη ότι η παράγωγος έχει τρεις κλάδους επειδή η αρχική συνάρτηση έχει ένα σημείο ασυνέχειας και ένα σημείο στο οποίο δεν υπάρχει παράγωγος.

5.2.7 Θέμα 4: Η παράγωγος συνάρτησης διπλού τύπου

Στην επιφάνεια εργασίας του παρακάτω μικρόκοσμου έχει σχεδιαστεί η γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$f(x) = \begin{cases} \alpha x^v + x + \beta^2, & -100 < x \leq x_A \\ \kappa x^\mu + \beta x + \lambda, & x_A < x < 100 \end{cases}$$

Ακόμα έχει σχεδιαστεί η γραφική παράσταση της παραγώγου αυτής. Ερευνήστε τον τρόπο μεταβολής της παραγώγου καθώς μεταβάλλονται οι τιμές των συντελεστών της συνάρτησης.

ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΕΙΣ

1. Επιλέξτε οι δείκτες των μεταβολών να δείχνουν $\alpha=1$, $v=2$, $\kappa=1$, $\lambda=1$ και $\mu=3$. Μπορείτε να περιγράψετε την παράγωγο της συνάρτησης στα διάφορα σημεία της; Πότε η παράγωγος είναι θετική και πότε αρνητική; Γιατί η γραφική παράσταση της παραγώγου έχει δυο κλάδους; Μπορείτε να επιλέξετε τη θέση του σημείου A καθώς και την τιμή του β ώστε η συνάρτηση να έχει παράγωγο στο σημείο με τετμημένη x_A ; Μπορείτε να εξηγήσετε και αλγεβρικά τις απαντήσεις σας αφού πρώτα προσδιορίσετε την εξίσωση της παραγώγου;
2. Επιλέξτε οι δείκτες των μεταβολών να δείχνουν $\alpha=1$, $v=3$, $\kappa=1$, $\lambda=0$ και $\mu=3$. Μπορείτε να περιγράψετε την παράγωγο της συνάρτησης στα διάφορα σημεία της; Πότε η παράγωγος είναι θετική και πότε αρνητική; Γιατί η γραφική παράσταση της παραγώγου έχει δυο κλάδους; Μπορείτε να επιλέξετε τη θέση του σημείου A καθώς και την τιμή του β ώστε η συνάρτηση να έχει παράγωγο στο σημείο με τετμημένη x_A ; Μπορείτε να εξηγήσετε και αλγεβρικά τις απαντήσεις σας αφού πρώτα προσδιορίσετε την εξίσωση της παραγώγου;
3. Επιλέξτε οι δείκτες των μεταβολών να δείχνουν $\alpha=1$, $v=0.5$, $\kappa=1$, $\lambda=1.3$ και $\mu=1$. Μπορείτε να περιγράψετε την παράγωγο της συνάρτησης στα διάφορα σημεία της; Πότε η παράγωγος είναι θετική και πότε αρνητική; Γιατί η γραφική παράσταση της παραγώγου έχει δυο κλάδους; Μπορείτε να επιλέξετε τη θέση του σημείου A καθώς και την τιμή του β ώστε η συνάρτηση να έχει παράγωγο στο σημείο με τετμημένη x_A ; Μπορείτε να εξηγήσετε και αλγεβρικά τις απαντήσεις σας αφού πρώτα προσδιορίσετε την εξίσωση της παραγώγου;
4. Επαναλάβετε τις προηγούμενες διερευνήσεις όταν οι δείκτες των μεταβολών να δείχνουν $\alpha=1$, $v=0.5$, $\kappa=1$, $\lambda=0$ και $\mu=2$.

ΟΔΗΓΙΕΣ ΠΡΟΣ ΤΟΝ ΔΙΔΑΣΚΟΝΤΑ

Για τη διαχείριση των εργαλείων του μικρόκοσμου

Ζητήστε από τους μαθητές:

- Να κινούν τον κάθε μεταβολέα α , β και v κατάλληλα ώστε να ορίσουν την εξίσωση του ενός κλάδου της συνάρτησης $f(x)$ σύμφωνα με τη διερεύνηση.

- Να κινούν τον κάθε μεταβολέα κ , λ και μ κατάλληλα ώστε να ορίσουν την εξίσωση του άλλου κλάδου της συνάρτησης $f(x)$ σύμφωνα με την διερεύνηση.
- Μετακινούν το σημείο A ώστε να ορίσουν τα άκρα των πεδίου ορισμού του κάθε κλάδου.
- Μετακινούν το σημείο B ώστε να παρακολουθούν πώς μεταβάλλεται η παράγωγος της συνάρτησης σε κάθε σημείο της συνάρτησης.
- Να χρησιμοποιούν την εντολή “Properties” για να επαναπροσδιορίζουν τα χαρακτηριστικά των μεταβολέων για να μπορούν να επαναπροσδιορίζουν την συνάρτηση $f(x)$.
- Να χρησιμοποιούν την εντολή “Redefine” για να επαναπροσδιορίζουν τον τύπο της συνάρτησης $f(x)$.

Για τις διερευνήσεις

Ζητήστε από τους μαθητές να παρατηρούν, να προβλέπουν, να ελέγχουν και να εκφράζουν στην ομάδα τους και στην τάξη:

- Για το γράφημα:
 - ✓ Την κατεύθυνση και την κλίση της εφαπτομένης σε κάθε θέση του σημείου B_1 .
 - ✓ Τη μορφή του γραφήματος που ορίζεται από τις τιμές της κλίσης της εφαπτομένης στο σημείο B_1 .
 - ✓ Τον τρόπο που μεταβάλλεται το ευθύγραμμο τμήμα M_1B .
 - ✓ Επιλέγουν τη θέση του σημείου A στο γράφημα και παρατηρούν αν και πώς ορίζεται η εφαπτομένη του γραφήματος της συνάρτησης στη θέση αυτή (όταν έχει διαφορετικές εφαπτόμενες αριστερά και δεξιά του σημείου A).
 - ✓ Επιλέγουν τη θέση του σημείου B σε ειδικές περιπτώσεις και παρατηρούν την κλίση της εφαπτομένης σ' αυτό (αν μηδενίζεται, αν είναι αρνητική ή θετική ή αν τείνει στο άπειρο).
- Για την αλγεβρική διαπραγμάτευση:
 - ✓ Καταγράφουν τις συντεταγμένες της θέσης του σημείου B και διαπραγματεύονται τον προσδιορισμό της εξίσωσης της καμπύλης στην οποία ανήκει το σημείο B.
 - ✓ Διατυπώνουν εικασίες για την εξίσωση της παραγώγου και τις ελέγχουν με τον προσδιορισμό της παραγώγου σε τυχαίο σημείο.

Για τις απαντήσεις

Ζητήστε από τους μαθητές να εκφράσουν στην τάξη τις απαντήσεις τους. Είναι πιθανόν οι μαθητές να δώσουν απαντήσεις όπως οι παρακάτω:

Διερεύνηση 1

Οι μαθητές διαπραγματεύονται την συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2 + x + \beta^2, & -100 \leq x \leq x_A \\ x^\mu + \beta x + 1, & x_A < x < 100 \end{cases}$. (1)

Να μετακινούν το σημείο B και να παρατηρούν την κατακόρυφη πλευρά του

ορθογωνίου τριγώνου που δείχνει την κλίση της εφαπτομένης στο B. (2) Να μετακινούν τους δείκτες των μεταβολέων β και μ . (3) Να παρατηρήσουν τον τρόπο μεταβολής του ευθύγραμμου τμήματος M_1B . (3) Να χρησιμοποιήσουν δεδομένα από την μεταβολή του M_1B και από τις συντεταγμένες του B για να προσδιορίσουν τα χαρακτηριστικά της καμπύλης της παραγώγου. (4) Να παρατηρούν τον τρόπο μεταβολής της κλίσης στα ειδικά σημεία της καμπύλης όπως στο $(-0.5, 0)$ και στο σημείο A $(1.1, 0)$. Ο εκπαιδευτικός πρέπει να ζητήσει από τους μαθητές να περιγράψουν την μεταβολή της κλίσης της εφαπτομένης κοντά στο σημείο $(1.1, 0)$ και να υπολογίσουν την παράγωγο με τον ορισμό όταν το B τείνει στο σημείο αυτό. Επίσης τους ζητά να ερμηνεύσουν το γεγονός ότι η παράγωγος έχει δυο κλάδους για τιμές στο χ αριστερά και δεξιά από το $(1, -1)$. Αναμένεται να αναζητήσουν τιμές για το β , το μ και τη θέση του A ώστε να υπάρχει παράγωγος στο A. Καθώς αυτό δεν είναι εύκολα φανερό αν υπάρχουν τέτοιες τιμές οι μαθητές αναμένεται να δουλέψουν και αλγεβρικά με τον ορισμό της παραγώγου στο σημείο A.

Διερεύνηση 2

Οι μαθητές διαπραγματεύονται την συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^3 + x + \beta^2, & -100 \leq x \leq x_A \\ x^3 + \beta x, & x_A < x < 100 \end{cases}$.

Αναμένεται να κάνουν ανάλογες με τη προηγούμενη διερεύνηση παρατηρήσεις και ότι όσο η παράγωγος της συνάρτησης είναι αρνητική η συνάρτηση είναι φθίνουσα και όσο είναι θετική είναι αύξουσα. Ακόμα αναμένεται να αναζητήσουν τιμές για το β , το μ και τη θέση του A ώστε να υπάρχει παράγωγος στο A. Καθώς αυτό δεν είναι εύκολα φανερό αν υπάρχουν τέτοιες τιμές, οι μαθητές αναμένεται να δουλέψουν και αλγεβρικά με τον ορισμό της παραγώγου στο σημείο A. Για παράδειγμα, μπορούν να επιλέξουν για $\beta=0$ και να τοποθετήσουν το A στη θέση $(0,0)$. Στην περίπτωση αυτή θα παρατηρήσουν ότι ενώ η συνάρτηση είναι συνεχής στο A δεν είναι παραγωγίσιμη και έτσι η παράγωγος έχει δυο κλάδους. Η εξήγηση για τα παρατηρούμενα σ' αυτή τη περίπτωση μπορεί να δοθεί αλγεβρικά με τη βοήθεια του ορισμού.

Διερεύνηση 3

Οι μαθητές διαπραγματεύονται την συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} + x + \beta^2, & -100 \leq x \leq x_A \\ x + \beta x + 1.3, & x_A < x < 100 \end{cases}$.

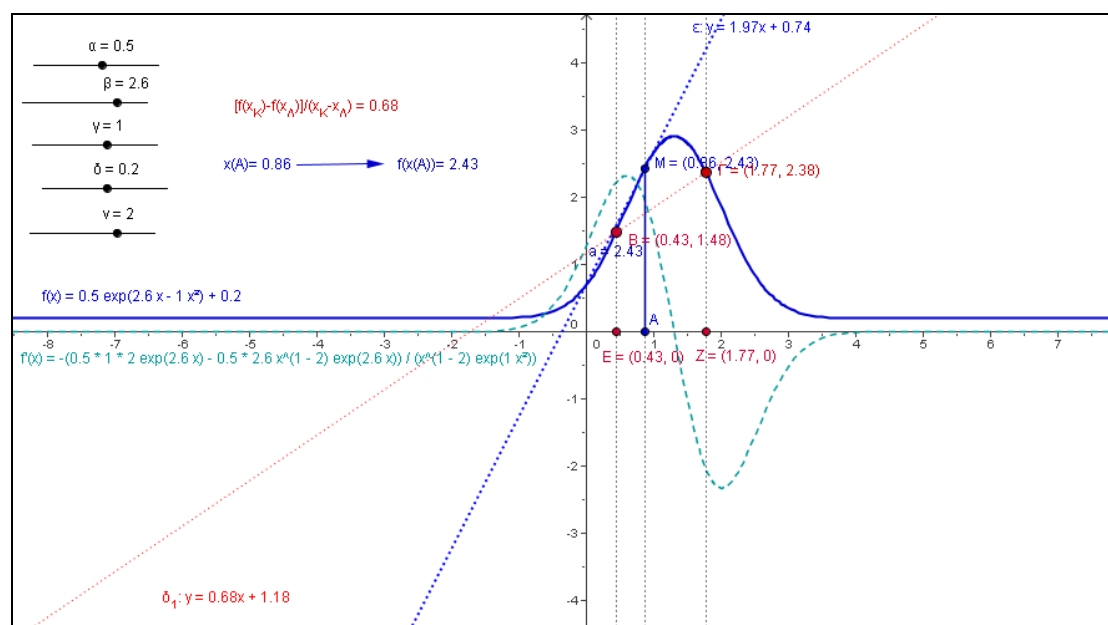
Αναμένεται να κάνουν ανάλογες με τις προηγούμενες διερευνήσεις παρατηρήσεις για τη μορφή της παραγώγου στα διάφορα σημεία της συνάρτησης και ότι όσο η παράγωγος της συνάρτησης είναι αρνητική η συνάρτηση είναι φθίνουσα και όσο είναι θετική είναι αύξουσα. Ακόμα αναμένεται να αναζητήσουν τιμές για το β , και τη θέση του A ώστε να υπάρχει παράγωγος στο A. Καθώς αυτό δεν είναι εύκολα φανερό αν υπάρχουν τέτοιες τιμές, οι μαθητές αναμένεται να δουλέψουν και αλγεβρικά με τον ορισμό της παραγώγου στο σημείο A.

Διερεύνηση 4

Οι μαθητές διαπραγματεύονται την συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} + x + \beta^2, & -100 \leq x \leq x_A \\ x^2 + \beta x, & x_A < x < 100 \end{cases}$.

Αναμένεται και εδώ να κάνουν ανάλογες με τις προηγούμενες διερευνήσεις παρατηρήσεις για τη μορφή της παραγώγου στα διάφορα σημεία της συνάρτησης και ότι όσο η παράγωγος της συνάρτησης είναι αρνητική η συνάρτηση είναι φθίνουσα και όσο είναι θετική είναι αύξουσα. Ακόμα αναμένεται να αναζητήσουν τιμές για το β , και τη θέση του A ώστε να υπάρχει παράγωγος στο A.

5.3 ΣΕΝΑΡΙΟ 11 : Θεωρήματα του διαφορικού λογισμού



5.3.1 Η κεντρική ιδέα του σεναρίου

Στο σενάριο αυτό οι μαθητές καλούνται να διερευνήσουν την έννοια της παραγώγου ως συνάρτηση μιας συνάρτησης και να εκφράσουν ποιοτικά χαρακτηριστικά της. Συγκεκριμένα εμπλέκονται σε διερευνήσεις παρατήρησης, έκφρασης και αλγεβρικής διαπραγμάτευσης ορισμένων χαρακτηριστικών της παραγώγου σε σχέση με τα αντίστοιχα χαρακτηριστικά της αρχικής συνάρτησης, όπως το πρόσημο των τιμών της παραγώγου σε σχέση με την μονοτονία της αρχικής συνάρτησης, την ύπαρξη σημείων μηδενισμού της παραγώγου σε σχέση με τα ακρότατα της συνάρτησης καθώς και την ύπαρξη της παραγώγου σε σημεία που είναι κορυφές της καμπύλης της αρχικής συνάρτησης ή σε σημεία ασυνέχειας της αρχικής συνάρτησης.

Οι μαθητές χρησιμοποιούν τους μεταβολείς για να ορίσουν τις εξισώσεις των συναρτήσεων και στη συνέχεια μετακινούν ένα σημείο της καμπύλης ώστε να συμπίπτει με ένα άλλο και παρακολουθούν πώς μεταβάλλεται η θέση και η κλίση της ευθείας που αυτά ορίζουν. Οι διαδικασίες αυτές αναμένεται να βοηθήσουν τους μαθητές να διερευνήσουν οπτικά την ύπαρξη της παραγώγου σε ένα σημείο A την οποία στη συνέχεια καλούνται να διερευνήσουν και αλγεβρικά.

5.3.2 Στόχοι

- Να αποκτήσουν εμπειρίες σχετικές με την έννοια της παραγώγου ως συνάρτηση μιας δεδομένης συνάρτησης.
- Να αποκτήσουν εμπειρίες σχετικές με τον τρόπο που συνδέονται τα ποιοτικά χαρακτηριστικά της καμπύλης της παραγώγου με ποιοτικά χαρακτηριστικά της καμπύλης της αρχικής συνάρτησης.

- Να μελετούν και να εκφράσουν ποιοτικά και αλγεβρικά την ύπαρξη και την εύρεση της παραγώγου σε σημείο της καμπύλης της συνάρτησης.

5.3.3 Διδακτική πρόταση

ΟΡΓΑΝΩΣΗ ΤΗΣ ΤΑΞΗΣ

Οι δραστηριότητες αυτές ενδείκνυται να διδάσκονται στο εργαστήριο υπολογιστών και οι μαθητές να εργάζονται σε ομάδες 2-3 ατόμων με φύλλο εργασίας. Μπορούν όμως να διεξαχθούν και στην τάξη που διαθέτει μόνο έναν υπολογιστή με βιντεοπροβολέα. Σ' αυτή την περίπτωση οι μαθητές συμπληρώνουν τα φύλλα εργασίας με βάση τις παρατηρήσεις που κάνουν κατά την διερεύνηση που γίνεται απ' όλη την τάξη και κατευθύνεται από τον εκπαιδευτικό ή κάποιον μαθητή. Στο πλαίσιο αυτό κάνουν παρεμβάσεις στην διερεύνηση με τις οποίες εκφράζουν την δική τους στρατηγική στη διερεύνηση. Καθώς τέτοιες παρεμβάσεις μπορούν να γίνονται στην τάξη απ' όλους τους μαθητές ο διδάσκων πρέπει να τις υποστηρίζει και να επιδιώκει να συζητούνται όλες οι πιθανές στρατηγικές της διερεύνησης.

Σε κάθε περίπτωση ο εκπαιδευτικός πρέπει να έχει από πριν προετοιμάσει τον τρόπο που θα χειριστεί τις διαφορετικές στρατηγικές που πιθανόν να διατυπωθούν καθώς και τις πιθανές εκβάσεις τους.

Ακόμα πρέπει με τη στάση του να προκαλεί την εφαρμογή των διαφορετικών τρόπων διερεύνησης, να ενθαρρύνει κάθε μαθητή να δοκιμάζει τις ιδέες του, να εκφράζει τις εικασίες του και να διατυπώνει τα συμπεράσματά του ελεύθερα. Ακόμα πρέπει να ενθαρρύνει τους μαθητές να προσπαθούν να επαληθεύουν αλγεβρικά τα αποτελέσματα των διερευνήσεών τους.

ΟΙ ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΕΣ ΔΥΝΑΤΟΤΗΤΕΣ ΤΟΥ ΣΕΝΑΡΙΟΥ

Οι προτεινόμενες στο σενάριο δραστηριότητες αφορούν φαινόμενα τα οποία προκαλούνται από τη δράση των μαθητών σε προσχεδιασμένους υπολογιστικούς μικρόκοσμους με σκοπό την ανάδειξη των διερευνούμενων ιδιοτήτων τους. Έτσι, οι απαντήσεις στα ερωτήματα που τίθενται στο πλαίσιο αυτών των διερευνήσεων αλλά και αυτών που ο διδάσκων ή οι ίδιοι οι μαθητές μπορούν να θέσουν, είναι δυνατόν, να αποτελέσουν ένα περιβάλλον απόκτησης και έκφρασης εμπειριών σχετικών με την έννοια της συνάρτησης παράγωγο μιας αρχικής συνάρτησης, την παρατήρηση, έκφραση και αλγεβρική έκφραση και διερεύνηση της συνάρτησης παράγωγο, σε σχέση με την σύνδεση των ποιοτικών χαρακτηριστικών των δυο συναρτήσεων. Τα εργαλεία που έχουν ενσωματωθεί στους μικρόκοσμους δίνουν τη δυνατότητα στους μαθητές,

- να κάνουν πειράματα με τον προσδιορισμό συγκεκριμένων συναρτήσεων προκειμένου να διερευνήσουν την εφαιτομένη και την παράγωγο στα διάφορα σημεία της συνάρτησης,
- να διερευνήσουν τη θέση του σημείου Α στο οποίο αλλάζει κλάδο η συνάρτηση ώστε στο σημείο αυτό να είναι συνεχής η αρχική συνάρτηση και να εξετάσουν αν υπάρχει η παράγωγος σ' αυτό,
- να λύνουν προβλήματα αλγεβρικού προσδιορισμού της παραγώγου της συνάρτησης σε ένα σημείο του πεδίου ορισμού της
- να παρατηρούν και να ερμηνεύουν τα αποτελέσματα των χειρισμών τους,

- να εκφράζουν εικασίες, να κάνουν γενικεύσεις, να διατυπώνουν υποθέσεις και θεωρήματα και να τα εκφράζουν με μαθηματικούς όρους,

Ακόμα, μπορούν να επεμβαίνουν και να επαναπροσδιορίζουν τις δυνατότητες των εργαλείων ή να επαναδιατυπώνουν τον τρόπο ορισμού των αντικειμένων και να μεταβάλλουν την εμφάνισή τους. Από αυτή την άποψη οι μικρόκοσμοι είναι επαναχρησιμοποιήσιμοι και δίνουν τη δυνατότητα στους χρήστες να διατυπώνουν και νέα ερωτήματα που αφορούν ιδιαίτερες γνωστικές πτυχές των μαθηματικών αντικειμένων.

ΠΟΡΕΙΑ ΤΗΣ ΕΦΑΡΜΟΓΗΣ ΤΟΥ ΣΕΝΑΡΙΟΥ

Το σενάριο αποτελείται από τέσσερις εργασίες. Στην πρώτη, οι μαθητές διαπραγματεύονται την έννοια της παραγώγου της συνάρτησης $f(x)=ax^v+bx+\gamma$ και συνδέουν τα χαρακτηριστικά της καμπύλης της κλίσης της εφαπτομένης στα διάφορα σημεία της με τα χαρακτηριστικά της καμπύλης της συνάρτησης. Στη δεύτερη, οι μαθητές διαπραγματεύονται την έννοια της παραγώγου της συνάρτησης $f(x)=a\sin(bx+\gamma)+\delta$ για τις διάφορες τιμές των παραμέτρων της και συνδέουν τα χαρακτηριστικά της παραγώγου με αυτά της συνάρτησης. Στην τρίτη, διερευνάται η σχέση των χαρακτηριστικών της παραγώγου της συνάρτησης

$$f(x)=a\sqrt{|x^v-1|}+bx+\gamma \quad (f(x)=a \sqrt{\text{abs}(x^v-1)}+bx+\gamma) \text{ σε σχέση με τα}$$

χαρακτηριστικά της συνάρτησης. Ιδιαίτερα διερευνάται η ύπαρξη της παραγώγου σε ορισμένα χαρακτηριστικά σημεία της συνάρτησης. Στην τέταρτη, μελετάται

$$\text{παράγωγος της συνάρτησης } f(x)=\begin{cases} ax^v+x+\beta^2, & -100 \leq x \leq x_A \\ kx^\mu+bx+\lambda, & x_A < x < 100 \end{cases} \text{ και η ύπαρξη της}$$

παραγώγου στο σημείο A που αλλάζει ο τύπος της συνάρτησης.

Η εμπλοκή των μαθητών με κάθε μια δραστηριότητα αναμένεται να αναδείξει:

- Τη σχέση του βαθμού των πολυωνυμικών συναρτήσεων και του βαθμού της παραγώγου των.
- Την στενή σχέση της μονοτονίας της συνάρτησης σε σχέση με το πρόσημο της παραγώγου της.
- Τη στενή σχέση των σημείων μηδενισμού της παραγώγου σε ένα σημείο της σε σχέση με την κλίση της εφαπτομένης στο σημείο αυτό και την ύπαρξη τοπικού ακρότατου της αρχικής συνάρτησης.
- Τον ρόλο της συνέχειας της συνάρτησης σε ένα σημείο της σε σχέση με την ύπαρξη της παραγώγου σ' αυτό.
- Τον ρόλο της θέσης του σημείου στο οποίο αλλάζει κλάδο μια διπλού τύπου συνάρτηση σε σχέση με την συνέχεια της συνάρτησης σ' αυτό και την ύπαρξη της παραγώγου.

Ο εκπαιδευτικός μπορεί να ζητά από τους μαθητές να επαληθεύουν αλγεβρικά τα συμπεράσματά τους σε κάθε περίπτωση. Ακόμα μπορεί να αναδείξει και άλλα ζητήματα σχετικά με την παράγωγο και την καμπύλη της σε σχέση με την αρχική συνάρτηση.

ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

Εργασία	Περιγραφή	Τμήμα εφαρμογής	Περιεχόμενο
Εργασία 1	Θεώρημα Μέσης Τιμής	ΟΛΟΙ	Διερευνήσεις σχετικές με το θεώρημα της μέσης τιμής του διαφορικού λογισμού καθώς και με το θεώρημα Roll.
Εργασία 2	Μονοτονία - Ακρότατα	ΟΛΟΙ	Διερευνήσεις σχετικές με τη μονοτονία και τα ακρότατα συνάρτησης.
Εργασία 3	Κυρτότητα και σημεία καμπής της συνάρτησης	ΚΑΤ/ΣΕΙΣ	Διερευνήσεις σχετικές με την έννοια της κυρτότητας και των σημείων καμπής συνάρτησης.
Εργασία 4	Ασύμπτωτες συνάρτησης	ΚΑΤ/ΣΕΙΣ	Διερευνήσεις για την ύπαρξη και τον ορισμό των ασυμπτώτων καμπύλης.

5.3.4 Θέμα 1: Θεώρημα μέσης τιμής

Στην επιφάνεια εργασίας του παρακάτω μικρόκοσμου έχει σχεδιαστεί η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=a \cdot x^n + b \cdot x + \gamma$ και η εφαπτομένη της στο σημείο M. Ακόμα έχει σχεδιαστεί η ευθεία που διέρχεται από δυο τυχαία σημεία A και B της καμπύλης της συνάρτησης. Ερευνήστε την σχέση της εφαπτομένης στο σημείο M με την ευθεία AB.

ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΕΙΣ

1. Επιλέξτε δυο τυχαίες θέσεις των σημείων A και B. Μπορείτε να βρείτε μια θέση του σημείου M ώστε η εφαπτομένη της καμπύλης σ' αυτό να είναι παράλληλη στην ευθεία AB; Μπορείτε να εκφράσετε αλγεβρικά την διαδικασία εύρεσης;
2. Επιλέξτε δυο τυχαίες θέσεις των σημείων A και B και ακόμα οι δείκτες των μεταβολών να δείχνουν $a=0.3$, $b=1$, $\gamma=-0.5$ και $n=3$. Πόσες θέσεις του σημείου M μπορείτε να βρείτε ώστε η εφαπτομένη της καμπύλης σ' αυτά να είναι παράλληλη στην ευθεία AB; Μπορείτε να βρείτε δυο θέσεις των A και B ώστε να ισχύει το θεώρημα Rolle.

Μπορείτε να εκφράσετε αλγεβρικά την διαδικασία εύρεσης;

3. Επιλέξτε την συνάρτηση και με δεξί κλικ "επαναπροσδιορισμός". Πληκτρολογήστε τον τύπο $f(x)=0.3 \cdot x^{(-1)} + 1 \cdot x - 0.5$. Μπορείτε να βρείτε θέσεις των σημείων A και B για τις οποίες ισχύει το θεώρημα της μέσης τιμής; Υπάρχουν θέσεις των A και B για τις οποίες δεν ισχύει το θεώρημα της μέσης τιμής ή το θεώρημα Rolle;

Μπορείτε να εξηγήσετε αλγεβρικά την απάντησή σας;

4. Επιλέξτε την συνάρτηση και με δεξί κλικ "επαναπροσδιορισμός". Πληκτρολογήστε τον τύπο $f(x)=0.2 \cdot x^{(-2)}$. Επαναλάβετε τις προηγούμενες δραστηριότητες. Υπάρχουν θέσεις των A και B για τις οποίες δεν ισχύει το θεώρημα της μέσης τιμής;

Μπορείτε να εξηγήσετε αλγεβρικά την απάντησή σας;

ΟΔΗΓΙΕΣ ΠΡΟΣ ΤΟΝ ΔΙΔΑΣΚΟΝΤΑ

Για τη διαχείριση των εργαλείων του μικρόκοσμου

Ζητήστε από τους μαθητές:

- Να κινούν τον κάθε μεταβολέα κατάλληλα ώστε να ορίσουν την εξίσωση της συνάρτησης σύμφωνα με την διερεύνηση.
- Μετακινούν τα σημεία A και B ώστε να μεταβάλλουν την ευθεία AB
- Μετακινούν το σημείο M για να ορίσουν την εφαπτομένη της καμπύλης στο σημείο αυτό.
- Να χρησιμοποιούν την εντολή "Properties" για να επαναπροσδιορίζουν τα χαρακτηριστικά των μεταβολών για να μπορούν να επαναπροσδιορίζουν την συνάρτηση $f(x)$.

Για τις διερευνήσεις

Ζητήστε από τους μαθητές να παρατηρούν, να προβλέπουν, να ελέγχουν και να εκφράζουν στην ομάδα τους και στην τάξη:

- Για το γράφημα:
 - ✓ Τη μορφή του γραφήματος που ορίζεται από τις τιμές των παραμέτρων.
 - ✓ Την κατεύθυνση της ευθείας AB και την κλίση της εφαπτομένης σε κάθε θέση του σημείου M σε σχέση με την κατεύθυνση της AB.
- Για την αλγεβρική διαπραγμάτευση:
 - ✓ Καταγράφουν τις συντεταγμένες των σημείων A και B και διαπραγματεύονται τον προσδιορισμό της κλίσης της AB σε σχέση με την κλίση της εφαπτομένης στο σημείο M.

Για τις απαντήσεις

Ζητήστε από τους μαθητές να εκφράσουν στην τάξη τις απαντήσεις τους. Είναι πιθανόν οι μαθητές να δώσουν απαντήσεις όπως οι παρακάτω:

Διερεύνηση 1

Οι μαθητές διαπραγματεύονται την συνάρτηση $f(x) = 0.3x^2 + x$. Αναμένεται να κάνουν τις εξής ενέργειες:

(1) Να μετακινούν τα σημεία A και B σε δυο συγκεκριμένες θέσεις. (2) Να μετακινήσουν το σημείο M σε διάφορες θέσεις και να παρατηρήσουν τον τρόπο μεταβολής του λόγου μεταβολής $[f(x(B)) - f(x(A))]/(x(B) - x(A))$. (3) Να παρατηρούν την παραλληλία της εφαπτομένης και της ευθείας AB. Ο εκπαιδευτικός πρέπει να ζητήσει από τους μαθητές να υπολογίσουν και να εκφράσουν τη κλίση της εφαπτομένης στο σημείο M. Αναμένεται να καταλήξουν σε συμπεράσματα που αφορούν το θεώρημα της Μέσης Τιμής, δηλαδή ότι σε κάθε θέση των A και B υπάρχει μια θέση του σημείου M που η εφαπτομένη σ' αυτό είναι παράλληλη προς την AB.

Διερεύνηση 2

Οι μαθητές διαπραγματεύονται την συνάρτηση $f(x) = 0.3x^3 - x - 0.5$. Αναμένεται να παρατηρήσουν ότι η σε ορισμένες θέσεις των A και B υπάρχουν περισσότερα από ένα σημεία στα οποία η εφαπτομένη είναι παράλληλη στην AB. Για παράδειγμα στις θέσεις A(-2.51, -2.74) και B(2.4, 1.23) ο λόγος μεταβολής – κλίση της AB είναι $[f(B) - f(A)]/[x(B) - x(A)] = 0.81$. Για το θεώρημα Rolle αρκεί να βρεθούν δυο θέσεις των A και B στις οποίες οι τεταγμένες τους είναι ίσες.

Διερεύνηση 3

Οι μαθητές διαπραγματεύονται τη συνάρτηση $f(x) = 0.3\frac{1}{x} + x - 0.5$. Αναμένεται να διαπιστώσουν ότι ισχύουν και εδώ όσα παρατήρησαν στις προηγούμενες διερευνήσεις σχετικά με το θεώρημα της Μέσης Τιμής αλλά όταν το ένα σημείο είναι στον ένα κλάδο και το άλλο στον άλλο κλάδο η συνάρτηση δεν είναι συνεχής και παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο του διαστήματος που ορίζουν τα δυο σημεία και γι' αυτό δεν μπορούν να βρουν σημείο στο οποίο η εφαπτομένη να είναι παράλληλη

στην ευθεία AB. Για το θεώρημα Rolle αρκεί να βρεθούν δυο θέσεις των A και B στις οποίες οι τεταγμένες τους είναι ίσες.

Διερεύνηση 4

Οι μαθητές διαπραγματεύονται τη συνάρτηση $f(x) = 0.3 \frac{1}{x^2}$. Αναμένεται να διαπιστώσουν ότι ισχύουν και εδώ όσα παρατήρησαν στις προηγούμενες διερευνήσεις σχετικά με το Θ.Μ.Τ.

5.3.5 Θέμα 2: Μονοτονία - Ακρότατα

Στην παρακάτω επιφάνεια εργασίας έχει σχεδιαστεί η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=a \cdot \exp(\beta \cdot x + \gamma \cdot x^{\gamma}) + \delta$ ($f(x)=ae^{\beta x + \gamma x^{\gamma}} + \delta$). Ακόμα έχουν σχεδιαστεί η παράγωγος αυτής, η εφαπτομένη σε ένα σημείο της A καθώς και ευθεία BΓ που διέρχεται από δυο σημεία της. Ερευνήστε για την μονοτονία και τα ακρότατα της συνάρτησης για τις διάφορες τιμές των παραμέτρων της και του εκθέτη γ .

ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΕΙΣ

1. Μπορείτε να περιγράψετε τον τρόπο μεταβολής των τιμών της συνάρτησης καθώς κινείτε το σημείο A και να τον συνδυάσετε με το πρόσημο των τιμών της παραγώγου; Μπορείτε να βρείτε σε ποιο σημείο η συνάρτηση έχει τοπικό ακρότατο; Μπορείτε να εκφράσετε αλγεβρικά τα συμπεράσματά σας;
2. Επιλέξτε τη συνάρτηση και με δεξί κλικ "Επαναπροσδιορισμός". Πληκτρολογήστε τον τύπο $0.5 \cdot \exp(2 \cdot x + x^3) + 1$. Μπορείτε να περιγράψετε τον τρόπο μεταβολής των τιμών της συνάρτησης και να τον συνδυάσετε με το πρόσημο των τιμών της παραγώγου; Μπορείτε να βρείτε σε ποιο σημείο η συνάρτηση έχει τοπικό ακρότατο; Μπορείτε να εκφράσετε αλγεβρικά τα συμπεράσματά σας; Τι θα αλλάξει στην μονοτονία της συνάρτησης αν μεταβάλλετε τις τιμές της παραμέτρου δ ;
3. Επιλέξτε τη συνάρτηση και με δεξί κλικ "Επαναπροσδιορισμός". Πληκτρολογήστε τον τύπο $-0.5 \cdot \exp(2 \cdot x + x^2) + 1$. Μπορείτε να περιγράψετε την μονοτονία των τιμών της συνάρτησης και να τον συνδυάσετε με το πρόσημο των τιμών της παραγώγου; Σε τι διαφέρει η μονοτονία της συνάρτησης από την μονοτονία της συνάρτησης της πρώτης διερεύνησης που είχε $a=0,5$; Μπορείτε να εξηγήσετε αλγεβρικά τα συμπεράσματά σας;
4. Επιλέξτε τη συνάρτηση και με δεξί κλικ "Επαναπροσδιορισμός". Πληκτρολογήστε τον τύπο $0.5 \cdot \exp(2 \cdot x + x^2) + 1$. Μπορείτε να βρείτε δυο θέσεις για τα σημεία A και B ώστε να ισχύει το θεώρημα Rolle; Ισχύει το θεώρημα της μέσης τιμής σε κάθε διάστημα που ορίζουν τα A και B; Μπορείτε να εκφράσετε αλγεβρικά τα συμπεράσματά σας;

Ανακεφαλαίωση: Ζητήστε από τους μαθητές να ανακοινώσουν στη τάξη τα συμπεράσματά τους σχετικά με τη σχέση της μονοτονίας και του προσήμου των τιμών της παραγώγου σε ένα διάστημα. Εκφράστε τα συμπεράσματά σας από τις διερευνήσεις που κάνατε σε σχέση με το πρόσημο της παραγώγου.

ΟΔΗΓΙΕΣ ΠΡΟΣ ΤΟΝ ΔΙΔΑΣΚΟΝΤΑ

Για τη διαχείριση των εργαλείων του μικρόκοσμου

Ζητήστε από τους μαθητές:

- Να κινούν τον κάθε μεταβολέα κατάλληλα ώστε να ορίσουν την εξίσωση της συνάρτησης σύμφωνα με την διερεύνηση.
- Μετακινούν το σημείο A ώστε να μεταβάλλουν την εφαπτομένη της καμπύλης στο σημείο A.

- Μετακινούν τα σημεία Β και Γ.
- Να χρησιμοποιούν την εντολή “Ιδιότητες” για να επαναπροσδιορίζουν τα χαρακτηριστικά των μεταβολέων για να μπορούν να επαναπροσδιορίζουν την συνάρτηση $f(x)$.

Για τις διερευνήσεις

Ζητήστε από τους μαθητές να παρατηρούν, να προβλέπουν, να ελέγχουν και να εκφράζουν στην ομάδα τους και στην τάξη:

- Για το γράφημα
 - ✓ Τη μορφή του γραφήματος που ορίζεται από τις τιμές των μεταβολέων.
 - ✓ Την κατεύθυνση και το πρόσημο της κλίσης της εφαπτομένης σε κάθε θέση του σημείου Α.
 - ✓ Τα διαστήματα στα οποία η παράγωγος είναι θετική ή αρνητική.
 - ✓ Τον τρόπο που μεταβάλλεται το ευθύγραμμο τμήμα AA_1 και το A_1A' .
 - ✓ Τον τρόπο που μεταβάλλονται οι τιμές της συνάρτησης και της παραγώγου της.
 - ✓ Επιλέγουν τη θέση του σημείου Α ώστε να ορίζουν την εφαπτομένη του γραφήματος της συνάρτησης σε ειδικές θέσεις.
- Για την αλγεβρική διαπραγμάτευση:
 - ✓ Καταγράφουν τον τρόπο μεταβολής των τιμών της συνάρτησης εντός των διαστημάτων που ορίζουν τα σημεία Β και Γ.
 - ✓ Υπολογίζουν την παράγωγο στα εσωτερικά του διαστήματος σημεία της συνάρτησης.

Για τις απαντήσεις

Ζητήστε από τους μαθητές να εκφράσουν στην τάξη τις απαντήσεις τους. Είναι πιθανόν οι μαθητές να δώσουν απαντήσεις όπως οι παρακάτω:

Διερεύνηση 1

Οι μαθητές διαπραγματεύονται την συνάρτηση $f(x) = 0.5e^{2x-x^2} + 1$. Αναμένεται να κάνουν τις εξής ενέργειες:

(1) Να μετακινούν το σημείο Α και να παρατηρούν τον τρόπο μεταβολής της κλίσης της εφαπτομένης σ' αυτό. (2) Να παρατηρήσουν τον τρόπο μεταβολής των τιμών της συνάρτησης $f(x(A))$ καθώς αυξάνουν τις τιμές του $x(A)$. Ο εκπαιδευτικός πρέπει να ζητήσει από τους μαθητές να περιγράψουν λεκτικά και αλγεβρικά την μεταβολή των τιμών της συνάρτησης. Αναμένεται να παρατηρήσουν ότι σύμφωνα με το λογισμικό μέχρι την τιμή $x(A) = -4,71$ περίπου οι τιμές της συνάρτησης είναι σταθερές. Στη συνέχεια και μέχρι την τιμή $x(A) = 1$ οι τιμές αυξάνουν και στη συνέχεια για $x(A) < 4,71$ περίπου οι τιμές μειώνονται. Για μεγαλύτερες τιμές του $x(A)$ οι τιμές της συνάρτησης παραμένουν σταθερές. Στα αντίστοιχα διαστήματα η παράγωγος ταυτίζεται με τον $\chi\chi'$, είναι θετική, είναι αρνητική και τέλος ταυτίζεται με τον άξονα.

Διάστημα τιμών του $x(A)$	Οι τιμές της $f(x(A))$	Το πρόσημο των τιμών της παραγώγου
$(-\infty, -2,71)$	Σταθερή	0
$(-2,71,1)$	Αυξάνουν	Θετικό
$(1,4,71)$	Μειώνονται	Αρνητικό
$(4,71,+\infty)$	Σταθερή	0

Ακόμα αναμένεται να διατυπώσουν το συμπέρασμα ότι η συνάρτηση έχει μέγιστο στο σημείο $(1, f(1))$.

Ο εκπαιδευτικός θα πρέπει να ζητήσει από τους μαθητές να ελέγξουν την αλήθεια των παρατηρήσεων αυτών αλγεβρικά και ιδιαίτερα στα διαστήματα που αυτή φαίνεται να είναι σταθερή.

Διερεύνηση 2

Οι μαθητές διαπραγματεύονται τη συνάρτηση $f(x) = 0.5e^{2x-x^3} + 1$. Αναμένεται να παρατηρήσουν ότι η συνάρτηση είναι κατά διαστήματα μονότονη, να συμπληρώσουν σε ένα ανάλογο πίνακα τα διαστήματα μονοτονίας σύμφωνα με τα δεδομένα του λογισμικού και να παρατηρήσουν ότι έχει δυο ακρότατα, ένα ελάχιστο και ένα μέγιστο, στα σημεία στα οποία η παράγωγος τέμνει τον άξονα $χχ'$. Ακόμα αναμένεται να παρατηρήσουν ότι οι μεταβολές των τιμών του δ δεν μεταβάλλουν την παράγωγο και άρα την μονοτονία της συνάρτησης.

Διερεύνηση 3

Οι μαθητές διαπραγματεύονται τη συνάρτηση $f(x) = -0.5e^{2x-x^2} + 1$. Αναμένεται να κάνουν ανάλογες παρατηρήσεις με αυτές που έκαναν στην πρώτη διερεύνηση. Συμπληρώνοντας ένα ανάλογο πίνακα μπορούν να κάνουν εύκολα συγκρίσεις για τη μονοτονία των δυο συναρτήσεων. Δηλαδή, με βάση τον παρακάτω πίνακα αναμένεται να παρατηρήσουν ότι στις δυο περιπτώσεις η μονοτονία είναι αντίθετη. Ακόμα, παρουσιάζει στο ίδιο σημείο ελάχιστο αντί μέγιστο.

Διάστημα τιμών του $x(A)$	Πρόσημο των τιμών $f(x(A))$	Πρόσημο της παραγώγου
$(-\infty, -2,71)$	Σταθερή	0
$(-2,71,1)$	Μειώνονται	Αρνητικό
$(1,4,71)$	Αυξάνονται	Θετικό
$(4,71,+\infty)$	Σταθερή	0

Διερεύνηση 4

Οι μαθητές διαπραγματεύονται τη συνάρτηση $f(x) = 0.5e^{2x-x^2} + 1$. Και στην περίπτωση αυτής της διερεύνησης οι μαθητές αναμένεται να βρουν διάφορες θέσεις των E και Z. Για παράδειγμα, μπορούν να τοποθετήσουν το E στη θέση (0,0) και το Z στη θέση (2,0). Έτσι στο διάστημα αυτό ισχύει το θεώρημα Rolle καθώς ισχύει $f(0) = f(2)$ και στο διάστημα αυτό η συνάρτηση είναι συνεχής.

5.3.6 Θέμα 3: Κυρτότητα και σημεία καμπής της συνάρτησης

Στην επιφάνεια εργασίας του παρακάτω μικρόκοσμου έχει σχεδιαστεί η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=a*x^2+\beta*x+\gamma$. Ακόμα έχουν σχεδιαστεί η πρώτη και η δεύτερη παράγωγος αυτής. Ερευνήστε την κυρτότητα της συνάρτησης και συνδέστε την με τον τρόπο μεταβολής των δυο παραγώγων.

ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΕΙΣ

- Μπορείτε να περιγράψετε την κυρτότητα της συνάρτησης και να την συνδυάσετε με την μονοτονία της πρώτης παραγώγου και το πρόσημο της δεύτερης παραγώγου;
Επιλέξτε την συνάρτησης και με δεξί κλικ "Επαναπροσδιορισμός". Στη συνέχεια πληκτρολογήστε νέες τιμές των συντελεστών της συνάρτησης ώστε η δεύτερη παράγωγος έχει αρνητικές τιμές. Τι αλλάζει στη μορφή της συνάρτησης και της πρώτης παραγώγου; Μπορείτε να διατυπώσετε αλγεβρικά τις απαντήσεις σας;
- Επιλέξτε την συνάρτησης και με δεξί κλικ "Επαναπροσδιορισμός". Στη συνέχεια πληκτρολογήστε την συνάρτηση $0.2*x^3-2*x-1$. Μπορείτε να περιγράψετε την κυρτότητα της συνάρτησης και να την συνδυάσετε με την σχετική θέση της εφαπτομένης στο Α, την μονοτονία της πρώτης παραγώγου και το πρόσημο της δεύτερης παραγώγου; Υπάρχουν θέσεις των Α και Β όπου οι εφαπτόμενες σ' αυτά είναι παράλληλες; Τι συμβαίνει με τα σημεία στα οποία η δεύτερη παράγωγος είναι 0; Πώς μεταβάλλεται η κυρτότητα της συνάρτησης όταν μεταβάλλετε τις τιμές των συντελεστών της συνάρτησης; Πώς συνδέονται οι αλλαγές στην κυρτότητα με τις αλλαγές στο πρόσημο της δεύτερης παραγώγου. Τι αλλάζει στη μορφή της συνάρτησης και της πρώτης παραγώγου κατά τις αλλαγές αυτές; Μπορείτε να διατυπώσετε αλγεβρικά τις απαντήσεις σας;
- Επιλέξτε την εντολή «Επαναπροσδιορισμός» και πληκτρολογήστε τον τύπο $f(x)=a*x^4+\beta*x+\gamma$. Επιλέξτε ακόμα οι δείκτες των μεταβολών να δείχνουν $\alpha=-0.3$, $\beta=-2$ και $\gamma=1$. Μπορείτε να περιγράψετε πώς μεταβάλλεται η κυρτότητα της καμπύλης και να βρείτε σε ποια σημεία αλλάζει; Υπάρχουν σημεία στα οποία η δεύτερη παράγωγος είναι 0; Μπορείτε να εξηγήσετε και αλγεβρικά τις απαντήσεις σας αφού πρώτα προσδιορίσετε την εξίσωση της παραγώγου.
- Επιλέξτε την εντολή «Επαναπροσδιορισμός» και πληκτρολογήστε τον τύπο $f(x)=a*x^4+\beta*x^3+\gamma*x$. Κάντε δεξί κλικ πάνω στο γράφημα της συνάρτησης $f(x)$ και απενεργοποιήστε την εντολή "Δείξτε το αντικείμενο". Ακόμα φροντίστε οι δείκτες των μεταβολών να δείχνουν $\alpha=0.3$, $\beta=1$ και $\gamma=-2$. Μπορείτε να περιγράψετε σε ποια διαστήματα στρέφει τα κοίλα πάνω ή κάτω και ποια σημεία είναι σημεία καμπής; Μπορείτε να περιγράψετε τι αλλάζει ως προς τα κοίλα όταν μεταβάλλετε την τιμή του α σε -0.3 ;

Ανακεφαλαίωση: Συζητήστε στη τάξη για τη σχέση της κυρτότητας της συνάρτησης με την σχετική θέση της εφαπτομένης της συνάρτησης, την μονοτονία της πρώτης παραγώγου και το πρόσημο των τιμών της δεύτερης παραγώγου σε ένα διάστημα. Εκφράστε τα συμπεράσματά σας από τις διερευνήσεις που κάνατε σε σχέση με τις μεταβολές της κυρτότητας, τη μονοτονία της πρώτης παραγώγου και το πρόσημο της δεύτερης παραγώγου.

ΟΔΗΓΙΕΣ ΠΡΟΣ ΤΟΝ ΔΙΔΑΣΚΟΝΤΑ

Για τη διαχείριση των εργαλείων του μικρόκοσμου

Ζητήστε από τους μαθητές:

- Μετακινούν το σημείο B ώστε να μεταβάλλουν την εφαπτομένη της καμπύλης στο σημείο B.
- Να χρησιμοποιούν την εντολή “Ιδιότητες” για να επαναπροσδιορίζουν την συνάρτηση $f(x)$.
- Να επιλέγουν τα κουμπιά για αν εμφανίζουν συγκεκριμένες πληροφορίες.

Για τις διερευνήσεις

Ζητήστε από τους μαθητές να παρατηρούν, να προβλέπουν, να ελέγχουν και να εκφράζουν στην ομάδα τους και στην τάξη:

- Για το γράφημα:
 - ✓ Τη μορφή του γραφήματος που ορίζεται από τις τιμές των μεταβολών.
 - ✓ Τη μορφή του γραφήματος της πρώτης παραγώγου της συνάρτησης.
 - ✓ Τη μορφή του γραφήματος της δεύτερης παραγώγου της συνάρτησης.
 - ✓ Τη σχετική θέση της εφαπτομένης της συνάρτησης σε σημείο της ως προς την γραφική παράσταση της συνάρτησης.
 - ✓ Τη κατεύθυνση και τη κλίση της εφαπτομένης σε κάθε θέση του σημείου A.
 - ✓ Επιλέγουν τη θέση του σημείου A στο γράφημα ώστε να ορίζουν την εφαπτομένη του γραφήματος της συνάρτησης σε ειδικές θέσεις.
- Για την αλγεβρική διαπραγμάτευση:
 - ✓ Να παρακολουθούν τον τρόπο μεταβολής των αριθμητικών τιμών της συνάρτησης και των δυο παραγώγων.
 - ✓ Καταγράφουν τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση έχει τα κοίλα πάνω ή κάτω και να τα συνδέουν με την μονοτονία των τιμών της πρώτης παραγώγου και το πρόσημο της δεύτερης παραγώγου.

Για τις απαντήσεις

Ζητήστε από τους μαθητές να εκφράσουν στην τάξη τις απαντήσεις τους. Είναι πιθανόν οι μαθητές να δώσουν απαντήσεις όπως οι παρακάτω:

Διερεύνηση 1

Οι μαθητές διαπραγματεύονται την συνάρτηση $f(x) = 0.3x^2 + 0.4x - 1$. Αναμένεται να κάνουν τις εξής ενέργειες:

(1) Να μετακινούν το σημείο A και να παρατηρούν τη σχετική θέση της εφαπτομένης καθώς και τον τρόπο μεταβολής της κλίσης της. (2) Να παρατηρήσουν τον τρόπο μεταβολής του σημείου B και του σημείου Γ. (3) Να χρησιμοποιήσουν τα αριθμητικά δεδομένα για τις τιμές των δυο παραγώγων στο A για να εκφράσουν αριθμητικά και

λεκτικά τον τρόπο μεταβολής των τιμών των δυο παραγώγων. (4) Να χρησιμοποιήσουν τα παραπάνω δεδομένα ώστε να ορίσουν τα διαστήματα στα οποία η πρώτη παράγωγος είναι αύξουσα ή φθίνουσα και να τα συνδέσουν με το πρόσημο της δεύτερης παραγώγου. Οι μαθητές αναμένεται να παρατηρήσουν ότι η σχετική θέση της εφαπτομένης δεν μεταβάλλεται καθώς το σημείο Α κινείται στον καμπύλη. Ο εκπαιδευτικός πρέπει να ζητήσει από τους μαθητές να περιγράψουν την μεταβολή της κλίσης της εφαπτομένης και να την εκφράσουν αλγεβρικά χρησιμοποιώντας την μονοτονία της πρώτης παραγώγου.

Διερεύνηση 2

Οι μαθητές διαπραγματεύονται την συνάρτηση $f(x) = 0.1x^3 - 2x - 1$. Αναμένεται να παρατηρήσουν ότι η καμπύλη της πρώτης παραγώγου είναι δευτέρου βαθμού και της δεύτερης παραγώγου πρώτου βαθμού. Επίσης ότι η σχετική θέση της εφαπτομένης μεταβάλλεται καθώς το σημείο Α κινείται στην καμπύλη. Η καμπύλη στρέφει τα κοίλα άνω στα διαστήματα που η πρώτη παράγωγος είναι αύξουσα και η δεύτερη παράγωγος θετική. Στρέφει τα κοίλα κάτω στα διαστήματα που η πρώτη παράγωγος είναι φθίνουσα και η δεύτερη παράγωγος αρνητική. Υπάρχει ένα σημείο στο οποίο η πρώτη παράγωγος είναι 0 και η δεύτερη παράγωγος αρνητική. Στο σημείο αυτό η συνάρτηση αλλάζει καμπυλότητα και ονομάζεται σημείο καμπής. Τα σημεία Α στα οποία οι δυο εφαπτόμενες είναι παράλληλες είναι αυτά στα οποία τα σημεία Β και Γ ταυτίζονται.

Διερεύνηση 3

Οι μαθητές διαπραγματεύονται την συνάρτηση $f(x) = -0.1x^4 - 2x + 1$. Αναμένεται να μετακινήσουν το σημείο Α αργά και να παρακολουθούν την μεταβολή της κλίσης της εφαπτομένης στο Α, την μεταβολή της κλίσης της εφαπτομένης της πρώτης παραγώγου στο Β καθώς και τη μεταβολή της καμπύλης της δεύτερης παραγώγου. Ακόμα αναμένεται να παρατηρήσουν ότι η συνάρτηση στρέφει τα κοίλα κάτω σε όλο το πεδίο ορισμού της.

Διερεύνηση 4

Οι μαθητές διαπραγματεύονται την συνάρτηση $f(x) = 0.3x^4 + x^3 - 2$. Και στην περίπτωση αυτής της διερεύνησης οι μαθητές αναμένεται να κάνουν ανάλογες παρατηρήσεις με αυτές που έκαναν στις προηγούμενες διερευνήσεις και να καταλήξουν σε ανάλογα συμπεράσματα.

5.3.7 Θέμα 4: Ασύμπτωτες συνάρτησης

Στην επιφάνεια εργασίας του παρακάτω μικρόκοσμου έχει σχεδιαστεί η γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$g(x) = \frac{x^2 - \alpha}{x - \beta}$$

Ακόμα έχει σχεδιαστεί η γραφική παράσταση της ευθείας d: $y=kx+\lambda$. Ερευνήστε, για ποιές τιμές των κ και λ η ευθεία είναι ασύμπτωτη της συνάρτησης.

ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΕΙΣ

1. Επιλέξτε οι δείκτες των μεταβολών της συνάρτησης να δείχνουν $\alpha=2$ και $\beta=2$. Μπορείτε να ορίσετε τις τιμές των μεταβολών κ και λ ώστε η ευθεία να είναι ασύμπτωτη της συνάρτησης; Μπορείτε να εξηγήσετε και αλγεβρικά τις απαντήσεις σας;
2. Επιλέξτε διάφορες τιμές για τους δείκτες των μεταβολών της συνάρτησης. Μπορείτε να ορίσετε σε κάθε περίπτωση τις τιμές των μεταβολών κ και λ ώστε η ευθεία να είναι ασύμπτωτη της συνάρτησης; Υπάρχει κάποιος κανόνας που αφορά την εξίσωση της ασύμπτωτης σε σχέση με τις τιμές των συντελεστών που ορίζουν την συνάρτηση; Μπορείτε να εξηγήσετε και αλγεβρικά τις απαντήσεις σας;
3. Με την εντολή «Επαναπροσδιορισμός» επαναδιατυπώστε τον τύπο της συνάρτησης στον $g(x) = (x^3 - \alpha)/(x - \beta)$. Επιλέξτε οι δείκτες των μεταβολών να δείχνουν $\alpha=1$ και $\beta=0$. Μπορείτε να προσδιορίσετε τις ασύμπτωτες της συνάρτησης; Μπορείτε να εξηγήσετε και αλγεβρικά τις απαντήσεις σας;
4. Με την εντολή «Επαναπροσδιορισμός» επαναδιατυπώστε τον τύπο της συνάρτησης στον $g(x) = \sqrt{x^2 + \alpha x + \beta}$. Επιλέξτε οι δείκτες των μεταβολών να δείχνουν $\alpha=1$ και $\beta=0$. Μπορείτε να προσδιορίσετε τις ασύμπτωτες της συνάρτησης; Έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη η συνάρτηση. Μπορείτε να εξηγήσετε και αλγεβρικά τις απαντήσεις σας;

ΟΔΗΓΙΕΣ ΠΡΟΣ ΤΟΝ ΔΙΔΑΣΚΟΝΤΑ

Για τη διαχείριση των εργαλείων του μικρόκοσμου

Ζητήστε από τους μαθητές:

- Να κινούν τον κάθε μεταβολέα κατάλληλα ώστε να ορίσουν την εξίσωση της συνάρτησης σύμφωνα με τη διερεύνηση.
- Μετακινούν το σημείο A ώστε να μεταβάλλουν την κατακόρυφο που διέρχεται από αυτό.
- Να μετακινούν το σημείο M και να παρακολουθούν πως μεταβάλλονται οι αποστάσεις της κατακόρυφης στο M από την καμπύλη.

- Να χρησιμοποιούν την εντολή “Properties” για να επαναπροσδιορίζουν τα χαρακτηριστικά των μεταβολέων για να μπορούν να επαναπροσδιορίζουν την συνάρτηση $f(x)$.

Για τις διερευνήσεις

Ζητήστε από τους μαθητές να παρατηρούν, να προβλέπουν, να ελέγχουν και να εκφράζουν στην ομάδα τους και στην τάξη:

- Για το γράφημα
 - ✓ Τη μορφή του γραφήματος που ορίζεται από τις τιμές των τιμών των μεταβολέων.
 - ✓ Τις αλλαγές που συμβαίνουν καθώς κινούν τον δείκτη του μεταβολέα h .
 - ✓ Τον τρόπο που μεταβάλλεται το ευθύγραμμο τμήμα $B\Gamma$ καθώς και τα ευθύγραμμα τμήματα ΔN_1 και EN_2 .
- Για την αλγεβρική διαπραγμάτευση:
 - ✓ Καταγράφουν τις αριθμητικές τιμές των αποστάσεων $B\Gamma$, ΔN_1 και EN_2 και παρατηρούν τον τρόπο μεταβολής τους.

Για τις απαντήσεις

Ζητήστε από τους μαθητές να εκφράσουν στην τάξη τις απαντήσεις τους. Είναι πιθανόν οι μαθητές να δώσουν απαντήσεις όπως οι παρακάτω:

Διερεύνηση 1

Οι μαθητές διαπραγματεύονται την συνάρτηση $g(x) = \frac{x^2 - 2}{x - 2}$. Αναμένεται να κάνουν τις εξής ενέργειες:

(1) Να μετακινούν το σημείο A προς το $+\infty$ ή το $-\infty$ και να παρατηρούν την μεταβολή της απόστασης $B\Gamma$. (2) Να παρατηρήσουν τον τρόπο μεταβολής των αριθμητικών τιμών. (3) Μεταβάλλουν τις τιμές των κ και λ ώστε να ορίσουν την (d) να είναι ασύμπτωτη της $f(x)$. Οι τιμές των κ και λ που αναμένεται να βρουν είναι $\kappa=1$, $\lambda=2$. Ο εκπαιδευτικός πρέπει να ζητήσει από τους μαθητές να περιγράψουν την μεταβολή της απόστασης $B\Gamma$ καθώς το A πλησιάζει τη θέση $(2, 0)$ και να εξηγήσουν αλγεβρικά (με τη βοήθεια του ορίου) το συμπέρασμά τους.

Διερεύνηση 2

Οι μαθητές μπορούν να επιλέξουν διάφορες τιμές για τα α και β . Για παράδειγμα, για $\alpha=3$ και $\beta=2$ αναμένεται να διαπραγματευτούν την συνάρτηση $g(x) = \frac{x^2 - 3}{x - 2}$. Στην περίπτωση αυτή η ασύμπτωτη (d) είναι η ίδια $\psi = x+2$. Η αλγεβρική διαπραγμάτευση για την ασύμπτωτη για τις διάφορες τιμές των α και β θα οδηγήσει τους μαθητές να διατυπώνουν κανόνες όπως για παράδειγμα η τιμή για το κ είναι πάντοτε ίση με 1. Ακόμα, μετακινούν το σημείο M στη θέση $(2,0)$ και μετακινούν τον μεταβολέα h ώστε οι τιμές του να πλησιάζουν στο 2. Έτσι διαπιστώνουν ότι η κατακόρυφη απόσταση είναι $\chi=2$.

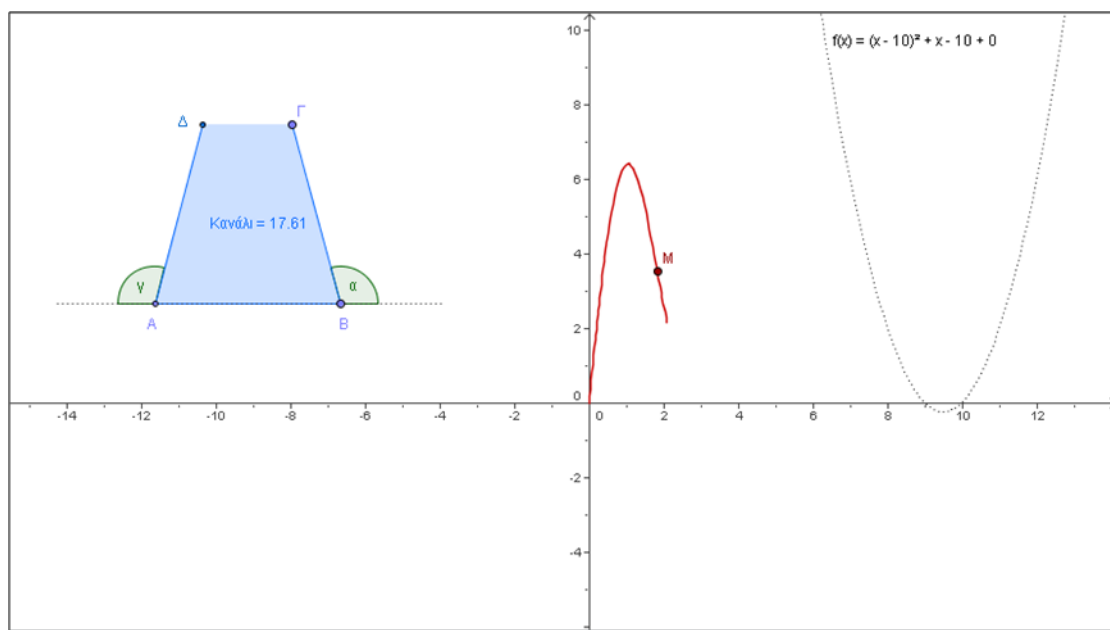
Διερεύνηση 3

Οι μαθητές διαπραγματεύονται την συνάρτηση $g(x) = \frac{x^3 - 1}{x}$. Αναμένεται να μετακινήσουν το σημείο A αργά και να παρακολουθούν την μεταβολή της απόστασης AB. Προφανώς θα διαπιστώσουν ότι η απόσταση AB μεγαλώνει διαρκώς όσο το σημείο A πλησιάζει στο 0. Σ' αυτή την περίπτωση θα τοποθετήσουν το σημείο M στη θέση (0,0) και θα μετακινούν τον μεταβολέα h ώστε οι τιμές του να πλησιάζουν στο 0. Έτσι, αναμένεται να διαπιστώσουν ότι η ευθεία $χ=0$ είναι ασύμπτωτη.

Διερεύνηση 4

Οι μαθητές διαπραγματεύονται την συνάρτηση $g(x) = \sqrt{x^2 + x}$. Αναμένεται να μετακινήσουν το σημείο A αργά και να παρακολουθούν την μεταβολή της απόστασης AB. Προφανώς θα παρατηρήσουν την ύπαρξη δυο πλάγιων ασύμπτωτων. Και στην περίπτωση αυτής της διερεύνησης οι μαθητές αναμένεται να καταλήξουν σε ανάλογα αλγεβρικά συμπεράσματα και να βρουν ότι οι ασύμπτωτες είναι (d): $y=x+1/2$ και (d): $y=-x-1/2$. Αναμένεται να επιλέξουν για την παράμετρο ν τις τιμές 4, 5, -1, -2, -3, κ.ά.

5.4 ΣΕΝΑΡΙΟ 12 : Οι εφαρμογές του διαφορικού λογισμού



5.4.1 Η κεντρική ιδέα του σεναρίου

Στο σενάριο αυτό οι μαθητές καλούνται να εφαρμόσουν τις εμπειρίες που απέκτησαν από τις διερευνήσεις που έκαναν στα προηγούμενα σενάρια τους διαφορικού λογισμού στη διερεύνηση συγκεκριμένων προβλημάτων. Συγκεκριμένα εμπλέκονται σε διερευνήσεις παρατήρησης, έκφρασης και αλγεβρικής διαπραγμάτευσης μεταβολών που συμβαίνουν κατά τη διαχείριση μοντέλων και γραφικών αναπαραστάσεων συναρτήσεων που αναφέρονται σε προβλήματα.

5.4.2 Στόχοι

- Να αποκτήσουν εμπειρίες σχετικές με την εφαρμογή των εννοιών του διαφορικού λογισμού για τη λύση προβλημάτων μεγιστοποίησης και ελαχιστοποίησης των τιμών δεδομένης συνάρτησης.
- Να αποκτήσουν εμπειρίες σχετικές με τον τρόπο που συνδέονται τα ποιοτικά χαρακτηριστικά της καμπύλης της συνάρτησης με την λύση προβλημάτων σχετικών με μεταβολές των τιμών μιας συνάρτησης.
- Να μελετούν και να εκφράσουν ποιοτικά και αλγεβρικά την ύπαρξη μεγίστων και ελαχίστων της συνάρτησης.

5.4.3 Διδακτική πρόταση

ΟΡΓΑΝΩΣΗ ΤΗΣ ΤΑΞΗΣ

Οι δραστηριότητες αυτές ενδείκνυται να διδάσκονται στο εργαστήριο υπολογιστών και οι μαθητές να εργάζονται σε ομάδες 2-3 ατόμων με φύλλο εργασίας. Μπορούν

όμως να διεξαχθούν και στην τάξη που διαθέτει μόνο ένα υπολογιστή με βιντεοπροβολέα. Σ' αυτή την περίπτωση οι μαθητές συμπληρώνουν τα φύλλα εργασίας με βάση τις παρατηρήσεις που κάνουν κατά την διερεύνηση που γίνεται απ' όλη την τάξη και κατευθύνεται από τον εκπαιδευτικό ή κάποιον μαθητή. Στο πλαίσιο αυτό κάνουν παρεμβάσεις στην διερεύνηση με τις οποίες εκφράζουν τη δική τους στρατηγική στη διερεύνηση. Καθώς τέτοιες παρεμβάσεις μπορούν να γίνονται στην τάξη απ' όλους τους μαθητές ο διδάσκων πρέπει να τις υποστηρίζει και να επιδιώκει να συζητούνται όλες οι πιθανές στρατηγικές της διερεύνησης.

Σε κάθε περίπτωση ο εκπαιδευτικός πρέπει να έχει από πριν προετοιμάσει τον τρόπο που θα χειριστεί τις διαφορετικές στρατηγικές που πιθανόν να διατυπωθούν καθώς και τις πιθανές εκβάσεις τους.

Ακόμα πρέπει με τη στάση του να προκαλεί την εφαρμογή των διαφορετικών τρόπων διερεύνησης, να ενθαρρύνει κάθε μαθητή να δοκιμάζει τις ιδέες του, να εκφράζει τις εικασίες του και να διατυπώνει τα συμπεράσματά του ελεύθερα. Ακόμα πρέπει να ενθαρρύνει τους μαθητές να προσπαθούν να επαληθεύουν αλγεβρικά τα αποτελέσματα των διερευνήσεών τους.

ΟΙ ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΕΣ ΔΥΝΑΤΟΤΗΤΕΣ ΤΟΥ ΣΕΝΑΡΙΟΥ

Οι προτεινόμενες στο σενάριο δραστηριότητες αφορούν φαινόμενα τα οποία προκαλούνται από την δράση των μαθητών σε προσχεδιασμένους υπολογιστικούς μικρόκοσμους με σκοπό την ανάδειξη των διερευνούμενων ιδιοτήτων τους. Έτσι οι απαντήσεις στα ερωτήματα που τίθενται στο πλαίσιο αυτών των διερευνήσεων αλλά και αυτών που ο διδάσκων ή οι ίδιοι οι μαθητές μπορούν να θέσουν είναι δυνατόν να αποτελέσουν ένα περιβάλλον απόκτησης και έκφρασης εμπειριών σχετικών με την έννοια της συνάρτησης παράγωγο μιας αρχικής συνάρτησης, την παρατήρηση, έκφραση και αλγεβρική έκφραση και διερεύνηση της συνάρτησης παράγωγο, σε σχέση με την σύνδεση των ποιοτικών χαρακτηριστικών των δυο συναρτήσεων. Τα εργαλεία που έχουν ενσωματωθεί στους μικρόκοσμους δίνουν την δυνατότητα στους μαθητές,

- να κάνουν πειράματα με τον προσδιορισμό συγκεκριμένων συναρτήσεων προκειμένου να διερευνήσουν την ύπαρξη μεγίστων - ελαχίστων,
- να διερευνήσουν τη θέση του σημείου A στο οποίο παρουσιάζει η συνάρτηση μέγιστο ή ελάχιστο,
- να λύνουν προβλήματα αλγεβρικού προσδιορισμού της παραγώγου της συνάρτησης σε ένα σημείο του πεδίου ορισμού της για να υπολογίσουν το μέγιστο ή το ελάχιστο της συνάρτησης,
- να παρατηρούν και να ερμηνεύουν τα αποτελέσματα των χειρισμών τους,
- να εκφράζουν εικασίες, να κάνουν γενικεύσεις, να διατυπώνουν υποθέσεις και θεωρήματα και να τα εκφράζουν με μαθηματικούς όρους,

Ακόμα, μπορούν να επεμβαίνουν και να επαναπροσδιορίζουν τις δυνατότητες των εργαλείων ή να επαναδιατυπώνουν τον τρόπο ορισμού των αντικειμένων και να μεταβάλλουν την εμφάνισή τους. Από αυτή την άποψη οι μικρόκοσμοι είναι επαναχρησιμοποιήσιμοι και δίνουν τη δυνατότητα στους χρήστες να διατυπώνουν και νέα ερωτήματα που αφορούν ιδιαίτερες γνωστικές πτυχές των μαθηματικών αντικειμένων.

ΠΟΡΕΙΑ ΤΗΣ ΕΦΑΡΜΟΓΗΣ ΤΟΥ ΣΕΝΑΡΙΟΥ

Το σενάριο αποτελείται από τέσσερις εργασίες. Στην πρώτη, οι μαθητές διαπραγματεύονται την μεταβολή του εμβαδού της τομής ενός καναλιού παροχής νερού και αναζητούν τη γωνία στην οποία η παροχή είναι μέγιστη. Στη δεύτερη, οι μαθητές αναζητούν την ελάχιστη απόσταση σημείου από τη συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}$. Στην τρίτη, διερευνάται η ύπαρξη της ελάχιστης διαφοράς των τιμών μεταξύ των συναρτήσεων $f(x) = e^x$ και $g(x) = ax$. Στην τέταρτη, μελετάται η μεταβολή της συγκέντρωσης ενός φαρμάκου στο αίμα ενός ασθενούς σε σχέση με τον χρόνο που πέρασε από τη στιγμή της χορήγησής του.

Η εμπλοκή των μαθητών με κάθε μια δραστηριότητα αναμένεται να αναδεικνύει:

- Τη σχέση της μορφής της καμπύλης και της μεταβολής των τιμών της.
- Την στενή σχέση της μονοτονίας της συνάρτησης με την ύπαρξη μέγιστης ή ελάχιστης τιμής.
- Τη στενή σχέση της μεταβολής της κλίσης της καμπύλης με την ύπαρξη μέγιστης ή ελάχιστης τιμής της συνάρτησης.

Ο εκπαιδευτικός μπορεί να ζητά από τους μαθητές να επαληθεύουν αλγεβρικά τα συμπεράσματά τους σε κάθε περίπτωση.

ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

Εργασία	Περιγραφή	Τμήμα εφαρμογής	Περιεχόμενο
Εργασία 1	Το κανάλι παροχής νερού	ΟΛΟΙ	Διερευνήσεις σχετικές με την μεγιστοποίηση της παροχής νερού από ένα κανάλι.
Εργασία 2	Απόσταση σημείου από καμπύλη συνάρτησης	ΟΛΟΙ	Διερευνήσεις σχετικές με την απόσταση σημείου από καμπύλη συνάρτησης.
Εργασία 3	Ελάχιστη τιμή της διαφοράς δυο συναρτήσεων	ΚΑΤ/ΣΕΙΣ	Διερευνήσεις σχετικές με την ελάχιστη τιμή της διαφοράς δυο συναρτήσεων.
Εργασία 4	Η μέγιστη τιμή συγκέντρωσης ενός φαρμάκου	ΚΑΤ/ΣΕΙΣ	Η μέγιστη τιμή της συγκέντρωσης ενός φαρμάκου.

5.4.4 Θέμα 1: Το κανάλι παροχής νερού

Στην επιφάνεια εργασίας του παρακάτω μικρόκοσμου έχει σχεδιαστεί η κάθετη τομή ενός καναλιού παροχής νερού. Επίσης έχει σχεδιαστεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων που έχουν τετμημένη το άνοιγμα της γωνίας α και τεταγμένη το $1/4$ του εμβαδού της τομής του καναλιού. Μπορείτε να κινείτε το σημείο Γ για να μεταβάλλετε τη γωνία και το σημείο B για να μεταβάλλετε το μήκος των τριών πλευρών του. Ερευνήστε την σχέση μεταξύ της γωνίας και του εμβαδού για τις διάφορες τιμές του μήκους των τριών πλευρών του.

ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΕΙΣ

1. Μπορείτε να περιγράψετε πώς μεταβάλλεται το εμβαδόν του καναλιού καθώς μεταβάλλεται η γωνία α ; Μπορείτε να εκφράσετε αλγεβρικά την σχέση αυτής της συμμεταβολής;
2. Μπορείτε να βρείτε για ποια τιμές της γωνίας το εμβαδόν γίνεται μέγιστο; Μπορείτε να εξηγήσετε και αλγεβρικά τη διαδικασία εύρεσης;
3. Στην επιφάνεια εργασίας του μικρόκοσμου έχει σχεδιαστεί η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=(x - 10)^2+(x-10)+0$. Μπορείτε να επαναδιατυπώσετε τον τύπο της συνάρτησης ώστε να ταιριάζει ακριβώς με την καμπύλη του γεωμετρικού τόπου; Μπορείτε να εξηγήσετε αλγεβρικά την απάντησή σας;
4. Επαναλάβετε τις προηγούμενες διερευνήσεις και για άλλες τιμές των πλευρών της τομής. Τι μεταβάλλεται καθώς κινείτε το σημείο B ; Μπορείτε να ελέγξετε και να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά τον τύπο που βρήκατε;

Ανακεφαλαίωση: Συζητήστε στην τάξη για τον τρόπο που προσδιορίσατε τη συνάρτηση $f(x)$ ώστε να ταυτίζεται με την καμπύλη που ορίζει το σημείο M . Επιβεβαιώστε αλγεβρικά την ταύτιση. Συζητήστε στη τάξη τον ρόλο των συναρτήσεων στη μελέτη φαινομένων της καθημερινότητας και των επιστημών.

ΟΔΗΓΙΕΣ ΠΡΟΣ ΤΟΝ ΔΙΔΑΣΚΟΝΤΑ

Για τη διαχείριση των εργαλείων του μικρόκοσμου

Ζητήστε από τους μαθητές:

- Να μετακινούν τα σημεία A , B και Γ ώστε να μεταβάλλουν το σχήμα της κάθετης τομής του καναλιού.
- Να χρησιμοποιούν την εντολή «Επαναπροσδιορισμός» προκειμένου να ορίσουν την εξίσωση της συνάρτησης $f(x)$ σύμφωνα με την διερεύνηση.
- Να χρησιμοποιούν την εντολή “Ιδιότητες” για να επαναπροσδιορίζουν τα χαρακτηριστικά των αντικειμένων της επιφάνειας εργασίας.

Για τις διερευνήσεις

Ζητήστε από τους μαθητές να παρατηρούν, να προβλέπουν, να ελέγχουν και να εκφράζουν στην ομάδα τους και στην τάξη:

- Για το γράφημα:

- ✓ Τη μορφή του σχήματος της τομής ΑΒΓΔ.
- ✓ Τη μορφή του γραφήματος που ορίζεται από τις θέσεις των σημείων Α, Β και Γ.
- ✓ Τη μορφή του γραφήματος της συνάρτησης $f(x)$.
- Για την αλγεβρική διαπραγμάτευση:
 - ✓ Καταγράφουν τα μεγέθη και το εμβαδόν της κάθετης τομής.
 - ✓ Την αλγεβρική εξίσωση της συνάρτησης $f(x)$.

Για τις απαντήσεις

Ζητήστε από τους μαθητές να εκφράσουν στην τάξη τις απαντήσεις τους. Είναι πιθανόν οι μαθητές να δώσουν απαντήσεις όπως οι παρακάτω:

Διερεύνηση 1

Οι μαθητές διαπραγματεύονται το εμβαδόν της τομής. Αναμένεται να κάνουν τις εξής ενέργειες:

(1) Να μετακινούν το σημείο Γ. (2) Παρατηρούν πώς μεταβάλλεται το σημείο Μ στην καμπύλη του εμβαδού. (3) Επιλέγουν την συνάρτηση $f(x)$ και την εντολή «Επαναπροσδιορισμός» και στη συνέχεια πληκτρολογούν τον τύπο της συνάρτησης ώστε το γράφημά της να ταυτίζεται με την καμπύλη του εμβαδού. Ο εκπαιδευτικός πρέπει να ζητήσει από τους μαθητές να υπολογίσουν το εμβαδόν της τομής συναρτήσει της γωνίας α και να βρουν έτσι την κατάλληλη εξίσωση για την συνάρτηση $f(x)$. Ακόμα πρέπει να επιστήσει την προσοχή τους στην περιγραφή της μορφής της καμπύλης, καθώς δεν είναι παραβολή αλλά μέρος μιας τριγωνομετρικής καμπύλης.

Διερεύνηση 2

Οι μαθητές αναμένεται να διαπιστώσουν ότι η γωνία για την οποία έχουν μέγιστο εμβαδόν είναι 60° . Η σχέση της συμμεταβολής είναι τριγωνομετρική και εκφράζεται από τη σχέση $E=4\eta\mu\alpha*(1+\sigma\upsilon\nu\alpha)$

Διερεύνηση 3

Οι μαθητές αναμένεται να πληκτρολογήσουν στη θέση της $f(x)$ είναι $f(x)=4*\sin(x)*(1+\cos(x))$.

Διερεύνηση 4

Οι μαθητές αναμένεται να παρατηρήσουν ότι καθώς μεταβάλλουν το σημείο Β, μεταβάλλεται το μέγιστο αλλά δεν αλλάζει η μορφή της καμπύλης. Ο εκπαιδευτικός μπορεί να ζητήσει από τους μαθητές να διατυπώσουν τον γενικό τύπο της εξίσωσης που υπολογίζει το εμβαδόν της τομής.

5.4.5 Θέμα 2: Απόσταση σημείου από καμπύλη συνάρτησης

Στην παρακάτω επιφάνεια εργασίας έχει σχεδιαστεί η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \sqrt{x}$. Ακόμα έχουν σχεδιαστεί ένα σημείο M στην καμπύλη της συνάρτησης και ένα σημείο A εκτός αυτής. Ακόμα έχουν σχεδιαστεί οι γεωμετρικοί τόποι των σημείων που ορίζονται από την τετμημένη του M και την απόσταση d των A και M καθώς και από την τεταγμένη του M και την απόσταση d των A και M . Ερευνήστε τον τρόπο μεταβολής της απόστασης d όταν το M κινείται στην καμπύλη της συνάρτησης..

ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΕΙΣ

1. Μπορείτε να περιγράψετε πώς μεταβάλλεται η απόσταση d καθώς κινείτε το σημείο M πάνω στην γραφική παράσταση της συνάρτησης; Μπορείτε να εκφράσετε αλγεβρικά την σχέση της συμμεταβολής;
2. Μπορείτε να περιγράψετε πώς μεταβάλλεται η απόσταση d συναρτήσει της τετμημένης του σημείου M ; Σε ποιά θέση η απόσταση d είναι ελάχιστη; Μπορείτε να εκφράσετε και αλγεβρικά την σχέση των δυο μεταβλητών και να επαναδιατυπώσετε τον τύπο της $g(x)$ ώστε να ταυτίζεται με τον γεωμετρικό τόπο του σημείου Λ ;
3. Μπορείτε να περιγράψετε πώς μεταβάλλεται η απόσταση d συναρτήσει της τεταγμένης του σημείου M ; Σε ποιά θέση η απόσταση d είναι ελάχιστη; Μπορείτε να εκφράσετε και αλγεβρικά την σχέση των δυο μεταβλητών και να επαναδιατυπώσετε τον τύπο της $g(x)$ ώστε να ταυτίζεται με τον γεωμετρικό τόπο του σημείου K ;
4. Επαναλάβετε τις προηγούμενες διερευνήσεις και για άλλες θέσεις του σημείου A . Πώς μεταβάλλεται η ελάχιστη απόσταση καθώς μεταβάλλετε τη θέση του σημείου A ;

Μπορείτε να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά τον τύπο που βρήκατε;

Ανακεφαλαίωση: Συζητήστε στην τάξη για τον τρόπο που μεταβάλλεται η απόσταση συναρτήσει της τετμημένης και της τεταγμένης του σημείου M . Εκφράστε την αλγεβρική μέθοδο που ακολουθήσατε για να προσδιορίσετε τη συνάρτηση της απόστασης στις δυο περιπτώσεις καθώς και ένα γενικό τρόπο εύρεσης της συμμεταβολής δυο ποσοτήτων αλγεβρικά και γραφικά. Συζητήστε στη τάξη τον ρόλο των συναρτήσεων στη μελέτη φαινομένων της καθημερινότητας και των επιστημών.

ΟΔΗΓΙΕΣ ΠΡΟΣ ΤΟΝ ΔΙΔΑΣΚΟΝΤΑ

Για τη διαχείριση των εργαλείων του μικρόκοσμου

Ζητήστε από τους μαθητές:

- Να μετακινούν το σημείο M ώστε να μεταβάλλουν την απόσταση d .
- Να χρησιμοποιούν την εντολή « «Επαναπροσδιορισμός» » προκειμένου να ορίσουν την εξίσωση της συνάρτησης $g(x)$ σύμφωνα με την διερεύνηση.
- Να χρησιμοποιούν την εντολή “Ιδιότητες” για να επαναπροσδιορίζουν τα χαρακτηριστικά των αντικειμένων της επιφάνειας εργασίας.

Για τις διερευνήσεις

Ζητήστε από τους μαθητές να παρατηρούν, να προβλέπουν, να ελέγχουν και να εκφράζουν στην ομάδα τους και στην τάξη:

- Για το γράφημα:
 - ✓ Τη μορφή των δυο γεωμετρικών τόπων C_1 και C_2 .
 - ✓ Την μεταβολή της απόστασης AM.
 - ✓ Τη μορφή του γραφήματος της συνάρτησης $f(x)$.
- Για την αλγεβρική διαπραγμάτευση:
 - ✓ Την αριθμητική μεταβολή της απόστασης AM
 - ✓ Την μεταβολή των συντεταγμένων των σημείων M, K και Λ.
 - ✓ Την αλγεβρική εξίσωση της συνάρτησης $g(x)$.

Για τις απαντήσεις

Ζητήστε από τους μαθητές να εκφράσουν στην τάξη τις απαντήσεις τους. Είναι πιθανόν οι μαθητές να δώσουν απαντήσεις όπως οι παρακάτω:

Διερεύνηση 1

Οι μαθητές διαπραγματεύονται την απόσταση AM του A από το σημείο M της συνάρτησης $f(x) = \sqrt{x}$. Αναμένεται να κάνουν τις εξής ενέργειες:

(1) Να μετακινούν το σημείο M. (2) Να παρατηρούν πώς μεταβάλλεται το ευθύγραμμο τμήμα AM. (3) Να παρατηρούν πώς μεταβάλλεται οι αριθμητική τιμή της απόστασης d. Ο εκπαιδευτικός πρέπει να επιστήσει την προσοχή των μαθητών στην περιγραφή της μεταβολής καθώς και στον τρόπο έκφρασης της μεταβολής με τη βοήθεια της αλγεβρικής διατύπωσης. Δηλαδή θα πρέπει οι μαθητές να χρησιμοποιήσουν τον τύπο της απόστασης $d = \sqrt{(x - x_A)^2 + (\psi - \psi_A)^2}$ για να εκφράσουν αλγεβρικά την απόσταση και στη συνέχεια να την εκφράσουν ως συνάρτηση του x ή του ψ.

Διερεύνηση 2

Οι μαθητές (1) αναμένεται να παρατηρούν πώς μεταβάλλεται το σημείο M στην καμπύλη της συνάρτησης. (2) Να παρατηρούν πώς μεταβάλλονται το σημείο Λ που ορίζει τον γ. τόπο C_1 . (3) Να επιλέγουν την συνάρτηση $g(x)$ και την εντολή «Επαναπροσδιορισμός» και στη συνέχεια πληκτρολογούν τον τύπο της συνάρτησης ώστε το γράφημά της να ταυτίζεται με κάθε μια από τις καμπύλες των γεωμετρικών τόπων. Ο εκπαιδευτικός πρέπει να επιστήσει την προσοχή των μαθητών στην περιγραφή της μορφής της καμπύλης, καθώς δεν είναι παραβολή αλλά καμπύλη άρρητης συνάρτησης. Οι μαθητές αναμένεται να διαπιστώσουν ότι η σχέση της συμμεταβολής των d και $x(M)$ είναι η $g(x) = \sqrt{x^2 - 7x - 10\sqrt{x} + 41}$ και πως αν την πληκτρολογήσουν στη θέση της $g(x)$ η γραφική της παράσταση θα ταυτίζεται με την καμπύλη C_1 . Η ελάχιστη απόσταση είναι 2.92.

Διερεύνηση 3

Οι μαθητές αναμένεται να πληκτρολογήσουν στη θέση της $g(x)$ την εξίσωση

$$g(x) = \sqrt{x^4 - 7x^2 - 10x + 41}.$$

Διερεύνηση 4

Οι μαθητές αναμένεται να παρατηρήσουν ότι καθώς μεταβάλλουν το σημείο A , μεταβάλλεται το μέγιστο της απόστασης αλλά δεν αλλάζουν μορφή οι δυο καμπύλες. Αναμένεται να παρατηρήσουν ότι καθώς το σημείο απομακρύνεται προς τις θετικές τιμές του άξονα των ψ το ελάχιστο μεγαλώνει. Ακόμα όταν απομακρύνεται το A προς τις αρνητικές τιμές το ελάχιστο μεγαλώνει και πάλι. Ο εκπαιδευτικός μπορεί να ζητήσει από τους μαθητές να διατυπώσουν τον γενικό τύπο της απόστασης d συναρτήσει του χ_M και συναρτήσει του ψ_M .

5.4.6 Θέμα 3: Ελάχιστη τιμή της διαφοράς δυο συναρτήσεων

Στην επιφάνεια εργασίας του παρακάτω μικρόκοσμου έχουν σχεδιαστεί οι γραφικές παραστάσεις της συνάρτησης $f(x)=\exp(x)$, της συνάρτησης $g(x)=a \cdot x$ και της διαφοράς τους $h(x) = f(x)-g(x)$. Ακόμα έχουν σχεδιαστεί, η εφαπτομένη της $f(x)$ στο σημείο A, η ευθεία που διέρχεται από το A και είναι κάθετη στην $χχ'$ καθώς και το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα σημεία τομής της με τις δυο γραφικές παραστάσεις. Ερευνήστε για την σχέση των δυο συναρτήσεων καθώς και για τον τρόπο μεταβολής της απόστασης AB καθώς μεταβάλλετε είτε το σημείο A είτε την τιμή του a .

Διερευνήσεις

1. Μπορείτε να περιγράψετε πώς μεταβάλλεται η απόσταση AB καθώς κινείτε το σημείο A πάνω στην γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)$; Μπορείτε να εκφράσετε αλγεβρικά την σχέση της συμμεταβολής;
2. Μπορείτε να περιγράψετε πώς μεταβάλλεται η απόσταση AB συναρτήσει της τετμημένης του σημείου A; Σε ποιά θέση η απόσταση είναι ελάχιστη; Τι σχέση έχει η εφαπτομένη στη θέση με την ελάχιστη τιμή με την συνάρτηση $g(x)$; Μπορείτε να εκφράσετε και αλγεβρικά την απόσταση των δυο σημείων;
3. Μπορείτε να περιγράψετε πώς μεταβάλλεται η απόσταση AB καθώς μεταβάλλετε τον συντελεστή a ; Σε ποιά θέση η απόσταση AB είναι ελάχιστη; Μπορείτε να επιβεβαιώσετε και αλγεβρικά τις απαντήσεις σας;
4. Μπορείτε για τη μεγαλύτερη τιμή του a που βρήκατε στη προηγούμενη διερεύνηση να βρείτε τη θέση που η απόσταση AB είναι ελάχιστη. Ποια είναι η σχέση της συνάρτησης $g(x)$ με την εφαπτομένη της $f(x)$ στο σημείο αυτό; Μπορείτε να επιβεβαιώσετε και αλγεβρικά τις απαντήσεις σας;

Ανακεφαλαίωση: Συζητήστε στην τάξη για την ελάχιστη απόσταση μεταξύ των δυο συναρτήσεων καθώς και για τον τρόπο εύρεσης αυτής αλγεβρικά. Συζητήστε στη τάξη για την μέγιστη τιμή του a ώστε η ελάχιστη απόσταση των δυο συναρτήσεων να είναι 0 καθώς και για το γεγονός ότι αυτή μοιάζει να είναι προσέγγιση του e .

ΟΔΗΓΙΕΣ ΠΡΟΣ ΤΟΝ ΔΙΔΑΣΚΟΝΤΑ

Για τη διαχείριση των εργαλείων του μικρόκοσμου

Ζητήστε από τους μαθητές:

- Να μετακινούν το σημείο A.
- Να μετακινούν τον δείκτη του μεταβολέα a .
- Να χρησιμοποιούν την εντολή “Ιδιότητες” για να επαναπροσδιορίζουν τα χαρακτηριστικά των αντικειμένων της επιφάνειας εργασίας.

Για τις διερευνήσεις

Ζητήστε από τους μαθητές να παρατηρούν, να προβλέπουν, να ελέγχουν και να εκφράζουν στην ομάδα τους και στην τάξη:

- Για το γράφημα:
 - ✓ Τη μορφή των τριών γραφικών παραστάσεων.

- ✓ Την μεταβολή της απόστασης AB.
- ✓ Την μεταβολή της εφαπτομένης της $f(x)$ στο A.
- Για την αλγεβρική διαπραγμάτευση:
 - ✓ Την αριθμητική μεταβολή της απόστασης AB
 - ✓ Την μεταβολή της κλίσης της εφαπτομένης.

Για τις απαντήσεις

Ζητήστε από τους μαθητές να εκφράσουν στην τάξη τις απαντήσεις τους. Είναι πιθανόν οι μαθητές να δώσουν απαντήσεις όπως οι παρακάτω:

Διερεύνηση 1

Οι μαθητές διαπραγματεύονται την απόσταση AB των τεταγμένων των δυο συναρτήσεων που αντιστοιχούν στην ίδια τετμημένη. Αναμένεται να κάνουν τις εξής ενέργειες:

(1) Να μετακινούν το σημεία A. (2) Να παρατηρούν πώς μεταβάλλεται το ευθύγραμμο τμήμα AB. (3) Να παρατηρούν πώς μεταβάλλεται η αριθμητική τιμή της απόστασης AB. (4) Να παρατηρούν τη μορφή της καμπύλης $h(x)$. Ο εκπαιδευτικός πρέπει να επιστήσει την προσοχή των μαθητών στην περιγραφή της μεταβολής καθώς και στον τρόπο έκφρασης της μεταβολής με τη βοήθεια της αλγεβρικής διατύπωσης.

Δηλαδή θα πρέπει οι μαθητές να εκφράσουν την απόσταση $AB = e^x - a \cdot x$ και να χρησιμοποιήσουν τη μορφή της καμπύλης $h(x)$ για να περιγράψουν την μεταβολή της απόστασης.

Διερεύνηση 2

Οι μαθητές αναμένεται να παρατηρούν την αριθμητική τιμή της απόστασης AB καθώς και τη σχέση της εφαπτομένης στο σημείο A με τη συνάρτηση $g(x)$. Αναμένεται να παρατηρήσουν ότι στη θέση του A που η απόσταση AB είναι ελάχιστη, η εφαπτομένη και η ευθεία $g(x)$ είναι παράλληλες. Η διαπίστωση αυτή πρέπει να αποδειχθεί και αλγεβρικά, υπολογίζοντας το ελάχιστο της συνάρτησης $h(x)$ και την εφαπτομένη της $f(x)$ στο σημείο αυτό.

Διερεύνηση 3

Οι μαθητές αναμένεται να παρατηρήσουν ότι όταν αυξάνουν την τιμή του a μειώνεται η ελάχιστη απόσταση. Υπάρχουν τιμές του a στις οποίες η απόσταση γίνεται 0. Αναμένεται να βρουν ότι η μέγιστη τιμή του A είναι περίπου 2,71. Αυτό μπορεί να οδηγήσει στην εικασία ότι η τιμή είναι ίση με e η οποία πρέπει να επιβεβαιωθεί και αλγεβρικά.

Διερεύνηση 4

Οι μαθητές αναμένεται να παρατηρήσουν ότι στην περίπτωση αυτή η ελάχιστη απόσταση είναι 0 και ότι η $g(x)$ και η εφαπτομένη ταυτίζονται. Η απόδειξη πρέπει να γίνει και αλγεβρικά υπολογίζοντας το ελάχιστο της $h(x)$ και την εύρεση της εφαπτομένης στο σημείο αυτό.

5.4.7 Θέμα 4: Η μέγιστη τιμή συγκέντρωσης ενός φαρμάκου

Στην επιφάνεια εργασίας του παρακάτω μικρόκοσμου έχει σχεδιαστεί η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \alpha x / (1 + (x/\beta)^2)$, $[0, 100]$ η οποία περιγράφει την συγκέντρωση $f(x)$ ενός φαρμάκου στο αίμα ενός ασθενούς μετά από χρόνο x ώρες όταν του χορηγήθηκε την χρονική στιγμή $x=0$.

Ερευνήστε, για τη μέγιστη τιμή συγκέντρωσης στο αίμα του ασθενούς σε σχέση με τις τιμές των παραμέτρων α και β .

ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΕΙΣ

1. Επιλέξτε $\alpha = 4$ και $\beta = 3$. Μπορείτε να περιγράψετε πώς μεταβάλλονται οι τιμές της συνάρτησης $f(x)$; Πότε έχουμε μέγιστη τιμή συγκέντρωσης; Μπορείτε να υπολογίσετε αλγεβρικά την μέγιστη τιμή της συνάρτησης;
2. Με δεδομένο ότι η τιμή του β είναι 3 πώς πρέπει να ορίσετε την τιμή του α ώστε η μέγιστη συγκέντρωση να επιτυγχάνεται ακριβώς μετά από 3 ώρες και να είναι 9 μονάδες Μπορείτε να επιβεβαιώσετε και αλγεβρικά την απάντησή σας;
3. Πώς πρέπει να ορίσετε τις τιμές των συντελεστών α και β ώστε η μέγιστη συγκέντρωση του φαρμάκου να επιτυγχάνεται ακριβώς μετά από 3 ώρες και ταυτόχρονα η τιμή της να είναι 6 μονάδες; Μπορείτε να επιβεβαιώσετε και αλγεβρικά την απάντησή σας;
4. Πώς πρέπει να ορίσετε τις τιμές των συντελεστών α και β ώστε η μέγιστη συγκέντρωση του φαρμάκου να επιτυγχάνεται ακριβώς μετά από 6 ώρες και ταυτόχρονα η τιμή της να είναι 15 μονάδες; Σύμφωνα με τις κλινικές μελέτες η ωφελιμότητα του φαρμάκου εξασφαλίζεται όταν η τιμή της συγκέντρωσής του στο αίμα να είναι τουλάχιστον 12 μονάδες και στο χρονικό αυτό διάστημα δεν χορηγείται άλλο φάρμακο. Μπορείτε να προσδιορίσετε το παράθυρο ωφελιμότητας του φαρμάκου στην περίπτωση που θέλουμε να έχουμε μέγιστη τιμή 12 μονάδες μετά από 5 ώρες; Μπορείτε να επιβεβαιώσετε και αλγεβρικά τις απαντήσεις σας;

Ανακεφαλαίωση: Συζητήστε στην τάξη για τον τρόπο που οι συντελεστές καθορίζουν μια συγκεκριμένη μέγιστη τιμή της συνάρτησης. Συζητήστε στη τάξη για την χρησιμότητα της μελέτης των συναρτήσεων στην αντιμετώπιση της επιστημονικής έρευνας.

ΟΔΗΓΙΕΣ ΠΡΟΣ ΤΟΝ ΔΙΔΑΣΚΟΝΤΑ

Για τη διαχείριση των εργαλείων του μικρόκοσμου

Ζητήστε από τους μαθητές:

- Να μετακινούν το σημείο A.
- Να μετακινούν τους δείκτες των μεταβολών α , β .
- Να χρησιμοποιούν την εντολή “Ιδιότητες” για να επαναπροσδιορίζουν τα χαρακτηριστικά των αντικειμένων της επιφάνειας εργασίας.

Για τις διερευνήσεις

Ζητήστε από τους μαθητές να παρατηρούν, να προβλέπουν, να ελέγχουν και να εκφράζουν στην ομάδα τους και στην τάξη:

- Για το γράφημα:
 - ✓ Τη μορφή της γραφικής παράστασης.
 - ✓ Την μεταβολή της κλίσης της εφαπτομένης της συνάρτησης στο Α.
- Για την αλγεβρική διαπραγμάτευση:
 - ✓ Την αριθμητική μεταβολή των συντεταγμένων του σημείου Α.
 - ✓ Την αριθμητική μεταβολή της κλίσης της εφαπτομένης

Για τις απαντήσεις

Ζητήστε από τους μαθητές να εκφράσουν στην τάξη τις απαντήσεις τους. Είναι πιθανόν οι μαθητές να δώσουν απαντήσεις όπως οι παρακάτω:

Διερεύνηση 1

Οι μαθητές διαπραγματεύονται την συνάρτηση $f(x) = \frac{4x}{1 + \left(\frac{x}{3}\right)^2}$, $x \in [0, 100]$. Αναμένεται

να κάνουν τις εξής ενέργειες:

(1) Να μετακινούν το σημείο Α. (2) Να παρατηρούν πώς μεταβάλλεται η τεταγμένη του Α. (3) Να παρατηρούν πώς μεταβάλλεται η εφαπτομένη της καμπύλης στο Α. Ο εκπαιδευτικός πρέπει να επιστήσει την προσοχή των μαθητών στην περιγραφή της μεταβολής καθώς και στον τρόπο έκφρασης της μεταβολής με τη βοήθεια της αλγεβρικής διατύπωσης. Δηλαδή θα πρέπει οι μαθητές να εκφράσουν πότε αυξάνουν και πότε μειώνονται οι τιμές της και βέβαια να βρουν τη θέση του Α στην οποία η συνάρτηση παρουσιάζει μέγιστο.

Διερεύνηση 2

Οι μαθητές αναμένεται να βρουν την τιμή $\alpha=6$ ώστε η μέγιστη συγκέντρωση να συμβεί μετά από 3 ώρες και να είναι 9 μονάδες.

Διερεύνηση 3

Οι μαθητές αναμένεται να βρουν την τιμή $\alpha=1$ και $\beta=-3$ ώστε η μέγιστη συγκέντρωση να συμβεί μετά από 3 ώρες και να είναι 6.

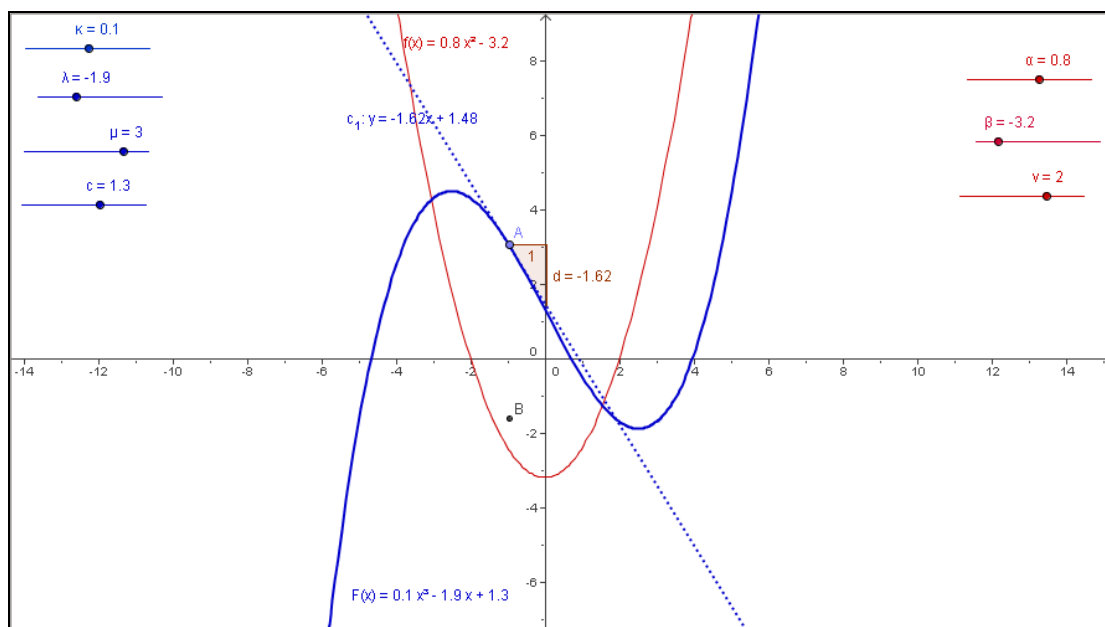
Διερεύνηση 4

Οι μαθητές αναμένεται να βρουν την τιμή $\alpha=4,8$ και $\beta=5$ ώστε η μέγιστη συγκέντρωση να συμβεί μετά από 6 ώρες και να είναι 15.

Ο εκπαιδευτικός πρέπει να ζητήσει από τους μαθητές να επιβεβαιώσουν και αλγεβρικά κάθε απάντησή τους στις διερευνήσεις που θα κάνουν.

6 ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4 - Ολοκληρώματα

6.1 ΣΕΝΑΡΙΟ 13 : Αόριστο ολοκλήρωμα συνάρτησης



6.1.1 Η κεντρική ιδέα του σεναρίου

Στο σενάριο αυτό οι μαθητές καλούνται να βρουν την αρχική συνάρτηση μιας δεδομένης συνάρτησης και να εφαρμόσουν τις εμπειρίες που απέκτησαν από τις διερευνήσεις που έκαναν στα προηγούμενα σενάρια τους διαφορικού λογισμού. Συγκεκριμένα εμπλέκονται σε διερευνήσεις παρατήρησης, έκφρασης και αλγεβρικής διαπραγμάτευσης με τη βοήθεια μεταβολέων οι οποίοι ορίζουν δυο συναρτήσεις $f(x)$ και $F(x)$, ώστε η δεύτερη να είναι αρχική της πρώτης.

6.1.2 Στόχοι

- Να αποκτήσουν εμπειρίες σχετικές με την έννοια της αρχικής συνάρτησης.
- Να αποκτήσουν εμπειρίες σχετικές με τον τρόπο υπολογισμού του αόριστου ολοκληρώματος μιας συνάρτησης.
- Να διατυπώσουν κανόνες υπολογισμού του αόριστου ολοκληρώματος.

6.1.3 Διδακτική πρόταση

ΟΡΓΑΝΩΣΗ ΤΗΣ ΤΑΞΗΣ

Οι δραστηριότητες αυτές ενδείκνυται να διδάσκονται στο εργαστήριο υπολογιστών και οι μαθητές να εργάζονται σε ομάδες 2-3 ατόμων με φύλλο εργασίας. Μπορούν όμως να διεξαχθούν και στη τάξη που διαθέτει μόνο έναν υπολογιστή με

βιντεοπροβολέα. Σ' αυτή την περίπτωση οι μαθητές συμπληρώνουν τα φύλλα εργασίας με βάση τις παρατηρήσεις που κάνουν κατά τη διερεύνηση που γίνεται απ' όλη την τάξη και κατευθύνεται από τον εκπαιδευτικό ή κάποιον μαθητή. Στο πλαίσιο αυτό κάνουν παρεμβάσεις στην διερεύνηση με τις οποίες εκφράζουν την δική τους στρατηγική στη διερεύνηση. Καθώς τέτοιες παρεμβάσεις μπορούν να γίνονται στην τάξη απ' όλους τους μαθητές ο διδάσκων πρέπει να τις υποστηρίζει και να επιδιώκει να συζητούνται όλες οι πιθανές στρατηγικές της διερεύνησης.

Σε κάθε περίπτωση ο εκπαιδευτικός πρέπει να έχει από πριν προετοιμάσει τον τρόπο που θα χειριστεί τις διαφορετικές στρατηγικές που πιθανόν να διατυπωθούν καθώς και τις πιθανές εκβάσεις τους.

Ακόμα πρέπει με τη στάση του να προκαλεί την εφαρμογή των διαφορετικών τρόπων διερεύνησης, να ενθαρρύνει κάθε μαθητή να δοκιμάζει τις ιδέες του, να εκφράζει τις εικασίες του και να διατυπώνει τα συμπεράσματά του ελεύθερα. Ακόμα πρέπει να ενθαρρύνει τους μαθητές να προσπαθούν να επαληθεύουν αλγεβρικά τα αποτελέσματα των διερευνήσεών τους.

ΟΙ ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΕΣ ΔΥΝΑΤΟΤΗΤΕΣ ΤΟΥ ΣΕΝΑΡΙΟΥ

Οι προτεινόμενες στο σενάριο δραστηριότητες αφορούν φαινόμενα τα οποία προκαλούνται από τη δράση των μαθητών σε προσχεδιασμένους υπολογιστικούς μικρόκοσμους με σκοπό την ανάδειξη των διερευνούμενων ιδιοτήτων τους. Έτσι οι απαντήσεις στα ερωτήματα που τίθενται στο πλαίσιο αυτών των διερευνήσεων αλλά και αυτών που ο διδάσκων ή οι ίδιοι οι μαθητές μπορούν να θέσουν είναι δυνατόν να αποτελέσουν ένα περιβάλλον απόκτησης και έκφρασης εμπειριών σχετικών με την έννοια της αρχικής συνάρτησης και του αόριστου ολοκληρώματος. Τα εργαλεία που έχουν ενσωματωθεί στους μικρόκοσμους δίνουν την δυνατότητα στους μαθητές,

- να κάνουν πειράματα με τον προσδιορισμό συγκεκριμένων συναρτήσεων προκειμένου η παράγωγος της μιας να ταυτίζεται με την άλλη,
- να διερευνήσουν ποιες τιμές των μεταβολών ορίζουν τη ζητούμενη συνάρτηση,
- να παρατηρούν και να ερμηνεύουν τα αποτελέσματα των χειρισμών τους,
- να εκφράζουν εικασίες, να κάνουν γενικεύσεις, να διατυπώνουν υποθέσεις και θεωρήματα και να τα εκφράζουν με μαθηματικούς όρους,

Ακόμα, μπορούν να επεμβαίνουν και να επαναπροσδιορίζουν τις δυνατότητες των εργαλείων ή να επαναδιατυπώνουν τον τρόπο ορισμού των αντικειμένων και να μεταβάλλουν την εμφάνισή τους. Από αυτή την άποψη οι μικρόκοσμοι είναι επαναχρησιμοποιήσιμοι και δίνουν τη δυνατότητα στους χρήστες να διατυπώνουν και νέα ερωτήματα που αφορούν ιδιαίτερες γνωστικές πτυχές των μαθηματικών αντικειμένων.

ΠΟΡΕΙΑ ΤΗΣ ΕΦΑΡΜΟΓΗΣ ΤΟΥ ΣΕΝΑΡΙΟΥ

Το σενάριο αποτελείται από τέσσερις εργασίες. Στην πρώτη, οι μαθητές διαπραγματεύονται την εύρεση του αόριστου ολοκληρώματος πολωνυμικών συναρτήσεων. Στη δεύτερη, οι μαθητές διαπραγματεύονται την εύρεση του αόριστου ολοκληρώματος τριγωνομετρικών συναρτήσεων. Στην τρίτη, οι μαθητές διαπραγματεύονται την εύρεση του αόριστου ολοκληρώματος εκθετικών

συναρτήσεων. Στην τέταρτη, οι μαθητές διαπραγματεύονται την εύρεση του αόριστου ολοκληρώματος άρρητων συναρτήσεων.

Η εμπλοκή των μαθητών με κάθε μια δραστηριότητα αναμένεται να αναδείξει:

- Τη σχέση της μορφής της καμπύλης των δυο συναρτήσεων.
- Τη στενή σχέση των συντελεστών των δυο συναρτήσεων.

Ο εκπαιδευτικός μπορεί να ζητά από τους μαθητές να επαληθεύουν αλγεβρικά τα συμπεράσματά τους σε κάθε περίπτωση.

ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

Εργασία	Περιγραφή	Τμήμα εφαρμογής	Περιεχόμενο
Εργασία 1	Το αόριστο ολοκλήρωμα πολυωνυμικών συναρτήσεων	ΚΑΤ/ΣΕΙΣ	Διερευνήσεις σχετικές με την ύπαρξη αρχικής συνάρτησης (αόριστο ολοκλήρωμα) μιας πολυωνυμικής συνάρτησης.
Εργασία 2	Το αόριστο ολοκλήρωμα τριγωνομετρικών συναρτήσεων	ΚΑΤ/ΣΕΙΣ	Διερευνήσεις σχετικές με την ύπαρξη αρχικής συνάρτησης (αόριστο ολοκλήρωμα) μιας τριγωνομετρικής συνάρτησης.
Εργασία 3	Το αόριστο ολοκλήρωμα εκθετικών συναρτήσεων	ΚΑΤ/ΣΕΙΣ	Διερευνήσεις σχετικές με την ύπαρξη αρχικής συνάρτησης (αόριστο ολοκλήρωμα) μιας εκθετικής συνάρτησης.
Εργασία 4	Το αόριστο ολοκλήρωμα άρρητων συναρτήσεων	ΚΑΤ/ΣΕΙΣ	Διερευνήσεις σχετικές με την ύπαρξη αρχικής συνάρτησης (αόριστο ολοκλήρωμα) μιας άρρητης συνάρτησης.

6.1.4 Θέμα 1: Το αόριστο ολοκλήρωμα πολυωνυμικών συναρτήσεων

Στην επιφάνεια εργασίας του παρακάτω μικρόκοσμου έχει σχεδιαστεί η γραφική παράσταση της συνάρτησης $F(x)=x^3+x+1$ ($F(x)=1*x^3+(-1)*x+1$), η εφαπτομένη σε ένα σημείο της Α και ένα σημείο Β με τετμημένη την τετμημένη του Α και τεταγμένη την κλίση της εφαπτομένης. Ακόμα έχει σχεδιαστεί η γραφική παράσταση της $f(x)=ax^n+\beta$. Μπορείτε να ορίσετε την $F(x)$ ώστε η καμπύλη του ίχνους του σημείου Β ταυτίζεται με την προκαθορισμένη $f(x)$ (δηλαδή η $F(x)$ είναι μια αρχική της $f(x)$);

ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΕΙΣ

1. Επιλέξτε οι δείκτες των μεταβολών να δείχνουν $\alpha=1$, $\beta=-2$ και $n=2$. Μπορείτε να επαναπροσδιορίσετε την συνάρτηση $F(x)$ ώστε το σημείο Β να κινείται πάνω στην $f(x)$ καθώς μεταβάλλεται το σημείο Α (δηλαδή η παράγωγος της $F(x)$ να είναι η $f(x)$ ή η $F(x)$ να είναι μια αρχική της $f(x)$); Μπορείτε να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά την απάντησή σας;
2. Επιλέξτε οι δείκτες των μεταβολών να δείχνουν $\alpha=-1$, $\beta=4$ και $n=2$. Μπορείτε να προσδιορίσετε τη συνάρτηση $F(x)$ ώστε να είναι μια αρχική της $f(x)$; Μπορείτε να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά την απάντησή σας;
3. Επιλέξτε οι δείκτες των μεταβολών να δείχνουν $\alpha=0.4$, $\beta=-1$ και $n=3$. Μπορείτε να προσδιορίσετε την συνάρτηση $F(x)$ ώστε να είναι μια αρχική της $f(x)$; Μπορείτε να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά την απάντησή σας;
4. Επιλέξτε διάφορες τιμές για τους δείκτες των μεταβολών α , β και n . Μπορείτε να προσδιορίσετε την συνάρτηση $F(x)$ ώστε να είναι μια αρχική της $f(x)$; Υπάρχει κάποιος κανόνας για τον προσδιορισμό της $F(x)$; Μπορείτε να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά την απάντησή σας;

Ανακεφαλαίωση: Συζητήστε στη τάξη για την διαδικασία του (αντίστροφου) προσδιορισμού μιας συνάρτησης ώστε να έχει δεδομένη παράγωγο. Συνδέστε την διαδικασία αυτή με το γράφημα του σημείου Β. Συζητήστε για το γεγονός ότι υπάρχει πλήθος αρχικών συναρτήσεων μιας δεδομένης συνάρτησης. Μπορείτε να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά την απάντησή σας;

ΟΔΗΓΙΕΣ ΠΡΟΣ ΤΟΝ ΔΙΔΑΣΚΟΝΤΑ

Για τη διαχείριση των εργαλείων του μικρόκοσμου

Ζητήστε από τους μαθητές:

- Να μετακινούν τους δείκτες των μεταβολών για να ορίσουν τις δυο συναρτήσεις $f(x)$ και $g(x)$.
- Να μετακινούν το σημείο Α και να παρακολουθούν τη μεταβολή της εφαπτομένης της καμπύλης στο Α και του σημείου Β.
- Να χρησιμοποιούν την εντολή “Ίχνος on” για να αφήνει ίχνος το σημείο Β.
- Να χρησιμοποιούν την εντολή “Properties” για να επαναπροσδιορίζουν τα χαρακτηριστικά των αντικειμένων της επιφάνειας εργασίας.

Για τις διερευνήσεις

Ζητήστε από τους μαθητές να παρατηρούν, να προβλέπουν, να ελέγχουν και να εκφράζουν στην ομάδα τους και στην τάξη:

- Για το γράφημα:
 - ✓ Τη μορφή των γραφημάτων των δυο συναρτήσεων.
 - ✓ Τη μορφή του σχήματος που δημιουργεί το ίχνος του σημείου B.
 - ✓ Τη μεταβολή της κλίσης της εφαπτομένης στο σημείο A.
- Για την αλγεβρική διαπραγμάτευση:
 - ✓ Καταγράφουν τις τιμές των μεταβολών.
 - ✓ Την αλγεβρική εξίσωση της συνάρτησης $f(x)$.
 - ✓ Την αλγεβρική εξίσωση της συνάρτησης $F(x)$.

Για τις απαντήσεις

Ζητήστε από τους μαθητές να εκφράσουν στην τάξη τις απαντήσεις τους. Είναι πιθανόν οι μαθητές να δώσουν απαντήσεις όπως οι παρακάτω:

Διερεύνηση 1

Οι μαθητές διαπραγματεύονται την εύρεση της συνάρτησης $F(x)$ ώστε να ταιριάζει ακριβώς με την καμπύλη του ίχνους του σημείου B. Αναμένεται να κάνουν τις εξής ενέργειες:

(1) Να επιλέξουν το σημείο B και με δεξί κλικ να εμφανίσουν τον κατάλογο εντολών και από εκεί να επιλέξουν την εντολή “Ίχνος ενεργό”. (2) Να επιλέξουν τις τιμές για τους δείκτες των μεταβολών α , β και ν . (3) Να μετακινούν το σημείο A και να παρακολουθούν την καμπύλη του ίχνους του B. (4) Να μετακινούν ορίζουν τους συντελεστές της $F(x)$ ώστε να επιλέξουν την κατάλληλη συνάρτηση. Αναμένεται να βρουν την συνάρτηση $F(x)=0,33x^3-2x$. Ο εκπαιδευτικός πρέπει να ζητήσει από τους μαθητές να υπολογίσουν την αρχική συνάρτηση της $f(x)$ και αλγεβρικά.

Διερεύνηση 2

Οι μαθητές αναμένεται να βρουν την συνάρτηση $F(x)=-0,33x^3-4x$

Διερεύνηση 3

Οι μαθητές αναμένεται να βρουν την συνάρτηση $F(x)=-0,1x^4-x$

Διερεύνηση 4

Οι μαθητές αναμένεται να βρουν τις εξής σχέσεις: (1) συντελεστής του $x^3=\alpha/(\nu+1)$ (2) συντελεστής του $x=\beta$ και (3) σταθερός= οποιοσδήποτε.

6.1.5 Θέμα 2: Το αόριστο ολοκλήρωμα τριγωνομετρικών συναρτήσεων

Στην επιφάνεια εργασίας του παρακάτω μικρόκοσμου έχει σχεδιαστεί η γραφική παράσταση της συνάρτησης $F(x)=\kappa \cdot \cos(\lambda \cdot x)+\mu$ [$F(x)=\kappa \sin(\lambda x)+\mu$], η εφαπτομένη σε ένα σημείο της A και ένα σημείο B με τετμημένη την τετμημένη του A και τεταγμένη την κλίση της εφαπτομένης. Ακόμα έχει σχεδιαστεί η γραφική παράσταση της $f(x)=a \cdot \sin(\beta \cdot x)$ [$f(x)=a \cdot \cos(\beta x)$]. Μπορείτε να ερευνήσετε τότε η $F(x)$ είναι μια αρχική της $f(x)$;

ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΕΙΣ

1. Επιλέξτε οι δείκτες των μεταβολών να δείχνουν $a=2$ και $\beta=1$. Μπορείτε να προσδιορίσετε την συνάρτηση $F(x)$ ώστε να είναι μια αρχική της $f(x)$; Μπορείτε να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά την απάντησή σας;
2. Επιλέξτε οι δείκτες των μεταβολών να δείχνουν $a=-2$ και $\beta=-1$ και επαναλάβετε την προηγούμενη δραστηριότητα. Μπορείτε να προσδιορίσετε περισσότερες από μια συναρτήσεις $F(x)$ αρχικές της $f(x)$; Μπορείτε να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά την απάντησή σας;
3. Επιλέξτε οι δείκτες των μεταβολών να δείχνουν $a=2$ και $\beta=1$ και στη θέση της μεταβλητής x την μεταβλητή $\pi/2-x$ επιλέγοντας την εντολή Επαναπροσδιορισμός και πληκτρολογώντας $f(x)=a \cdot \sin(\beta \cdot (\pi/2-x))$. Στη συνέχεια επαναλάβετε την προηγούμενη δραστηριότητα. Μπορείτε να προσδιορίσετε περισσότερες από μια συναρτήσεις $F(x)$ αρχικές της $f(x)$; Μπορείτε να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά την απάντησή σας;
4. Επιλέξτε διάφορες τιμές για τους δείκτες των μεταβολών a και β . Μπορείτε να προσδιορίσετε την συνάρτηση $F(x)$ ώστε να είναι μια αρχική της $f(x)$; Υπάρχει κάποιος κανόνας για τον προσδιορισμό της $F(x)$; Μπορείτε να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά την απάντησή σας;

Ανακεφαλαίωση: Συζητήστε στη τάξη για την διαδικασία προσδιορισμού μιας συνάρτησης ώστε να έχει δεδομένη παράγωγο την $f(x)$. Συνδέστε την διαδικασία αυτή με το γράφημα του σημείου B. Συζητήστε για το γεγονός ότι υπάρχει πλήθος αρχικών συναρτήσεων μιας δεδομένης συνάρτησης. Μπορείτε να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά την απάντησή σας;

ΟΔΗΓΙΕΣ ΠΡΟΣ ΤΟΝ ΔΙΔΑΣΚΟΝΤΑ

Για τη διαχείριση των εργαλείων του μικρόκοσμου

Ζητήστε από τους μαθητές:

- Να μετακινούν τους δείκτες των μεταβολών για να ορίσουν τις δυο συναρτήσεις $f(x)$ και $g(x)$.
- Να μετακινούν το σημείο A και να παρακολουθούν τη μεταβολή της εφαπτομένης της καμπύλης στο A και του σημείου B.
- Να χρησιμοποιούν την εντολή “Ίχνος ενεργό” για να αφήνει ίχνος το σημείο B.
- Να χρησιμοποιούν την εντολή “Ιδιότητες” για να επαναπροσδιορίζουν τα χαρακτηριστικά των αντικειμένων της επιφάνειας εργασίας.

Για τις διερευνήσεις

Ζητήστε από τους μαθητές να παρατηρούν, να προβλέπουν, να ελέγχουν και να εκφράζουν στην ομάδα τους και στην τάξη:

- Για το γράφημα:
 - ✓ Τη μορφή των γραφημάτων των δυο συναρτήσεων.
 - ✓ Τη μορφή του σχήματος που δημιουργεί το ίχνος του σημείου B.
 - ✓ Τη μεταβολή της κλίσης της εφαπτομένης στο σημείο A.
- Για την αλγεβρική διαπραγμάτευση:
 - ✓ Καταγράφουν τις τιμές των μεταβολών.
 - ✓ Την αλγεβρική εξίσωση της συνάρτησης $f(x)$.
 - ✓ Την αλγεβρική εξίσωση της συνάρτησης $F(x)$.

Για τις απαντήσεις

Ζητήστε από τους μαθητές να εκφράσουν στην τάξη τις απαντήσεις τους. Είναι πιθανόν οι μαθητές να δώσουν απαντήσεις όπως οι παρακάτω:

Διερεύνηση 1

Οι μαθητές διαπραγματεύονται την εύρεση της συνάρτησης $F(x)$ ώστε να ταιριάζει ακριβώς με την καμπύλη του ίχνους του σημείου B. Αναμένεται να κάνουν τις εξής ενέργειες:

(1) Να επιλέξουν το σημείο B και με δεξί κλικ να εμφανίσουν τον κατάλογο εντολών και από εκεί να επιλέξουν την εντολή “Ίχνος ενεργό”. (2) Να επιλέξουν τις τιμές για τους δείκτες των μεταβολών α και β . (3) Να μετακινούν το σημείο A και να παρακολουθούν την καμπύλη του ίχνους του B. (4) Να μετακινούν τους δείκτες των μεταβολών κ , λ και μ ώστε να επιλέξουν την συνάρτηση $F(x)$. Αναμένεται να προσπαθήσουν να βρουν τον τύπο της συνάρτησης χωρίς να αλλάξουν τον τύπο της συνάρτησης. Σ’ αυτή την περίπτωση θα πρέπει να πληκτρολογήσουν τον τύπο $F(x)=\kappa*\sin(\lambda(\pi/2-x))+\mu$ και στη συνέχεια να επιλέξουν τις κατάλληλες τιμές για τους συντελεστές κ , λ και μ . Έτσι αναμένεται να βρουν ότι η αρχική συνάρτηση είναι η $F(x)=-2\sin x$. Ο εκπαιδευτικός πρέπει να ζητήσει από τους μαθητές να υπολογίσουν την αρχική συνάρτηση της $f(x)$ και αλγεβρικά.

Διερεύνηση 2

Οι μαθητές πρέπει να αναμένεται να βρουν την συνάρτηση $F(x)=2\sin(-\pi/2+x)$.

Διερεύνηση 3

Οι μαθητές πρέπει να αναμένεται να βρουν την συνάρτηση $F(x)=2\eta\mu x + \mu$ για κάθε τιμή του μ .

Διερεύνηση 4

Οι μαθητές αναμένεται να βρουν τις εξής σχέσεις: (1) $\kappa=\alpha/(\nu+1)$ (2) $\beta=\lambda$ και (2) $\mu=\nu+1$. Για αποφυγή πιθανών παρερμηνειών ο εκπαιδευτικός πρέπει να τονίσει στους μαθητές ότι η σχέση των συντελεστών β και λ είναι ανάλογη με αυτή των α και κ με την έννοια ότι ο συντελεστής λ προκύπτει από τη διαίρεση του συντελεστή β με τον εκθέτη του x του όρου του λ .

6.1.6 Θέμα 3: Το αόριστο ολοκλήρωμα εκθετικών συναρτήσεων

Στην επιφάνεια εργασίας του παρακάτω μικρόκοσμου έχει σχεδιαστεί η γραφική παράσταση της συνάρτησης $F(x)=a \cdot b^{(p \cdot x)} + \gamma$ [$F(x)=a b^{p \cdot x} + \gamma$], η εφαπτομένη σε ένα σημείο της A και ένα σημείο B με τετμημένη την τετμημένη του A και τεταγμένη την κλίση της εφαπτομένης. Ακόμα έχει σχεδιαστεί η γραφική παράσταση της $f(x)=k \cdot \ln(\lambda) \cdot \mu^{(v \cdot x)}$ [$f(x)=k(\ln \lambda) \mu^{v \cdot x}$]. Μπορείτε να ερευνήσετε πότε η $F(x)$ είναι μια αρχική της $f(x)$;

ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΕΙΣ

1. Επιλέξτε οι δείκτες των μεταβολών να δείχνουν $k=1$, $\lambda=2$, $\mu=2$ και $v=1$. Μπορείτε να προσδιορίσετε την συνάρτηση $F(x)$ ώστε να είναι μια αρχική της $f(x)$;
Μπορείτε να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά την απάντησή σας;
2. Επιλέξτε οι δείκτες των μεταβολών να δείχνουν $k=2$, $\lambda=1.5$, $\mu=1.5$ και $v=1$. Μπορείτε να προσδιορίσετε την συνάρτηση $F(x)$ ώστε να είναι μια αρχική της $f(x)$;
Μπορείτε να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά την απάντησή σας;
3. Επιλέξτε οι δείκτες των μεταβολών να δείχνουν $k=0.4$, $\lambda=2$, $\mu=2$ και $v=-2$. Μπορείτε να προσδιορίσετε την συνάρτηση $F(x)$ ώστε να είναι μια αρχική της $f(x)$;
Μπορείτε να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά την απάντησή σας;
4. Επιλέξτε διάφορες τιμές για τους δείκτες των μεταβολών k , λ , μ και v . Μπορείτε να προσδιορίσετε την συνάρτηση $F(x)$ ώστε να είναι μια αρχική της $f(x)$; Υπάρχει κάποιος κανόνας για τον προσδιορισμό της $F(x)$;
Μπορείτε να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά την απάντησή σας;

Ανακεφαλαίωση: Συζητήστε στη τάξη για την διαδικασία προσδιορισμού της συνάρτησης $F(x)$ ώστε να έχει δεδομένη παράγωγο την $f(x)$. Συνδέστε την διαδικασία αυτή με το γράφημα του σημείου B. Συζητήστε για το γεγονός ότι υπάρχει πλήθος αρχικών συναρτήσεων μιας δεδομένης συνάρτησης. Επιβεβαιώστε αλγεβρικά την απάντησή σας;

ΟΔΗΓΙΕΣ ΠΡΟΣ ΤΟΝ ΔΙΔΑΣΚΟΝΤΑ

Για τη διαχείριση των εργαλείων του μικρόκοσμου

Ζητήστε από τους μαθητές:

- Να μετακινούν τους δείκτες των μεταβολών για να ορίσουν τις δυο συναρτήσεις $f(x)$ και $g(x)$.
- Να μετακινούν το σημείο A και να παρακολουθούν τη μεταβολή της εφαπτομένης της καμπύλης στο A και του σημείου B.
- Να χρησιμοποιούν την εντολή “Ιχνος on” για να αφήνει ίχνος το σημείο B.
- Να χρησιμοποιούν την εντολή “Properties” για να επαναπροσδιορίζουν τα χαρακτηριστικά των αντικειμένων της επιφάνειας εργασίας.

Για τις διερευνήσεις

Ζητήστε από τους μαθητές να παρατηρούν, να προβλέπουν, να ελέγχουν και να εκφράζουν στην ομάδα τους και στην τάξη:

- Για το γράφημα:
 - ✓ Τη μορφή των γραφημάτων των δυο συναρτήσεων.
 - ✓ Τη μορφή του σχήματος που δημιουργεί το ίχνος του σημείου B.
 - ✓ Τη μεταβολή της κλίσης της εφαπτομένης στο σημείο A.
- Για την αλγεβρική διαπραγμάτευση:
 - ✓ Καταγράφουν τις τιμές των μεταβολών.
 - ✓ Την αλγεβρική εξίσωση της συνάρτησης $f(x)$.
 - ✓ Την αλγεβρική εξίσωση της συνάρτησης $F(x)$.

Για τις απαντήσεις

Ζητήστε από τους μαθητές να εκφράσουν στην τάξη τις απαντήσεις τους. Είναι πιθανόν οι μαθητές να δώσουν απαντήσεις όπως οι παρακάτω:

Διερεύνηση 1

Οι μαθητές διαπραγματεύονται την εύρεση της συνάρτησης $F(x)$ ώστε να ταιριάζει ακριβώς με την καμπύλη του ίχνους του σημείου B. Αναμένεται να κάνουν τις εξής ενέργειες:

(1) Να επιλέξουν το σημείο B και με δεξί κλικ να εμφανίσουν τον κατάλογο εντολών και από εκεί να επιλέξουν την εντολή “Ίχνος ενεργό”. (2) Να επιλέξουν τις τιμές για τους δείκτες των μεταβολών α , β και γ . (3) Να μετακινούν το σημείο A και να παρακολουθούν την καμπύλη του ίχνους του B. (4) Να μετακινούν τους δείκτες των μεταβολών κ , λ και μ ώστε να επιλέξουν την συνάρτηση $F(x)$. Αναμένεται να προσπαθήσουν να βρουν τον τύπο της συνάρτησης επιλέγοντας τιμές για το α ίδια με την τιμή του κ και για το β την τιμή των λ και μ . Έτσι αναμένεται να βρουν ότι η αρχική συνάρτηση είναι η $F(x)=2^x$. Ο εκπαιδευτικός πρέπει να ζητήσει από τους μαθητές να υπολογίσουν την αρχική συνάρτηση της $f(x)$ και αλγεβρικά.

Διερεύνηση 2

Οι μαθητές πρέπει να αναμένεται να βρουν την συνάρτηση $F(x)=2(1,5)^x$.

Διερεύνηση 3

Οι μαθητές πρέπει να αναμένεται να βρουν την συνάρτηση $F(x)=2\eta\mu x + \mu$ για κάθε τιμή του μ .

Διερεύνηση 4

Οι μαθητές αναμένεται να βρουν τις εξής σχέσεις: (1) $\kappa=\alpha\rho$ (2) $\beta=\lambda=\mu$ και (3) $\rho=\nu$. Ο εκπαιδευτικός πρέπει να ζητήσει από τους μαθητές να επιβεβαιώσουν και αλγεβρικά την σχέση των συντελεστών. Έτσι, αν η δεδομένη συνάρτηση είναι $f(x)=\kappa\ln(\lambda)\mu^{(vx)}$ η αρχική της είναι $F(x)=\kappa/\rho(\mu)^{(vx)}$.

6.1.7 Θέμα 4: Το αόριστο ολοκλήρωμα άρρητων συναρτήσεων

Στην επιφάνεια εργασίας του παρακάτω μικρόκοσμου έχει σχεδιαστεί η γραφική παράσταση της συνάρτησης $F(x)=\kappa \cdot x^2 \cdot \sqrt{x} + \lambda x + \mu$, η εφαπτομένη σε ένα σημείο της A και ένα σημείο B με τετμημένη την τετμημένη του A και τεταγμένη την κλίση της εφαπτομένης. Ακόμα έχει σχεδιαστεί η γραφική παράσταση της $f(x)=\alpha \cdot x \cdot \sqrt{x} + \beta$. Μπορείτε να ερευνήσετε πότε η F(x) είναι μια αρχική της f(x);

ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΕΙΣ

1. Επιλέξτε οι δείκτες των μεταβολών να δείχνουν $\alpha=1$ και $\beta=2$. Μπορείτε να προσδιορίσετε την συνάρτηση F(x) ώστε να είναι μια αρχική της f(x); Μπορείτε να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά την απάντησή σας;
2. Επιλέξτε οι δείκτες των μεταβολών να δείχνουν $\alpha=-5$ και $\beta=2$. Μπορείτε να προσδιορίσετε την συνάρτηση F(x) ώστε να είναι μια αρχική της f(x); Μπορείτε να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά την απάντησή σας;
3. Επιλέξτε οι δείκτες των μεταβολών να δείχνουν $\alpha=-2$ και $\beta=0.6$. Ακόμα επαναδιατυπώστε τον τύπο της συνάρτησης f(x) σε $f(x)=\alpha \cdot x \cdot \sqrt{\text{abs}(x)} + \beta$. Μπορείτε να προσδιορίσετε την συνάρτηση F(x) ώστε να είναι μια αρχική της f(x); Μπορείτε να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά την απάντησή σας;
4. Επιλέξτε διάφορες τιμές για τους δείκτες των μεταβολών α και β . Μπορείτε να προσδιορίσετε την συνάρτηση F(x) ώστε να είναι μια αρχική της f(x); Υπάρχει κάποιος κανόνας για τον προσδιορισμό της F(x); Μπορείτε να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά την απάντησή σας;

Ανακεφαλαίωση: Συζητήστε στη τάξη για την διαδικασία προσδιορισμού της συνάρτησης F(x) ώστε να έχει δεδομένη παράγωγο την f(x). Συνδέστε την διαδικασία αυτή με το γράφημα του σημείου B. Συζητήστε για το γεγονός ότι υπάρχει πλήθος αρχικών συναρτήσεων μιας δεδομένης συνάρτησης. Επιβεβαιώστε αλγεβρικά την απάντησή σας;

ΟΔΗΓΙΕΣ ΠΡΟΣ ΤΟΝ ΔΙΔΑΣΚΟΝΤΑ

Για τη διαχείριση των εργαλείων του μικρόκοσμου

Ζητήστε από τους μαθητές:

- Να μετακινούν τους δείκτες των μεταβολών για να ορίσουν τις δυο συναρτήσεις f(x) και g(x).
- Να μετακινούν το σημείο A και να παρακολουθούν τη μεταβολή της εφαπτομένης της καμπύλης στο A και του σημείου B.
- Να χρησιμοποιούν την εντολή “Ιχνος on” για να αφήνει ίχνος το σημείο B.
- Να χρησιμοποιούν την εντολή “Properties” για να επαναπροσδιορίζουν τα χαρακτηριστικά των αντικειμένων της επιφάνειας εργασίας.

Για τις διερευνήσεις

Ζητήστε από τους μαθητές να παρατηρούν, να προβλέπουν, να ελέγχουν και να εκφράζουν στην ομάδα τους και στην τάξη:

- Για το γράφημα:
 - ✓ Τη μορφή των γραφημάτων των δυο συναρτήσεων.
 - ✓ Τη μορφή του σχήματος που δημιουργεί το ίχνος του σημείου B.
 - ✓ Τη μεταβολή της κλίσης της εφαπτομένης στο σημείο A.
- Για την αλγεβρική διαπραγμάτευση:
 - ✓ Καταγράφουν τις τιμές των μεταβολών.
 - ✓ Την αλγεβρική εξίσωση της συνάρτησης $f(x)$.
 - ✓ Την αλγεβρική εξίσωση της συνάρτησης $F(x)$.

Για τις απαντήσεις

Ζητήστε από τους μαθητές να εκφράσουν στην τάξη τις απαντήσεις τους. Είναι πιθανόν οι μαθητές να δώσουν απαντήσεις όπως οι παρακάτω:

Διερεύνηση 1

Οι μαθητές διαπραγματεύονται την εύρεση της συνάρτησης $F(x)$ ώστε να ταιριάζει ακριβώς με την καμπύλη του ίχνους του σημείου B. Αναμένεται να κάνουν τις εξής ενέργειες:

(1) Να επιλέξουν το σημείο B και με δεξί κλικ να εμφανίσουν τον κατάλογο εντολών και από εκεί να επιλέξουν την εντολή “Ίχνος ενεργό”. (2) Να επιλέξουν τις τιμές για τους δείκτες των μεταβολών α και β . (3) Να μετακινούν το σημείο A και να παρακολουθούν την καμπύλη του ίχνους του B. (4) Να μετακινούν τους δείκτες των μεταβολών κ , λ και μ ώστε να επιλέξουν την συνάρτηση $F(x)$. Αναμένεται να προσπαθήσουν να βρουν τον τύπο της συνάρτησης επιλέγοντας τιμές για το α ίδια με την τιμή του κ και για το β την τιμή των λ και μ . Έτσι αναμένεται να βρουν ότι η αρχική συνάρτηση είναι η $F(x) = 0,4x^2\sqrt{x} + 2x + \mu$. Ο εκπαιδευτικός πρέπει να ζητήσει από τους μαθητές να υπολογίσουν την αρχική συνάρτηση της $f(x)$ και αλγεβρικά.

Διερεύνηση 2

Οι μαθητές πρέπει να αναμένεται να βρουν την συνάρτηση $F(x) = -2x^2\sqrt{x} + 2x + \mu$ για κάθε τιμή του μ .

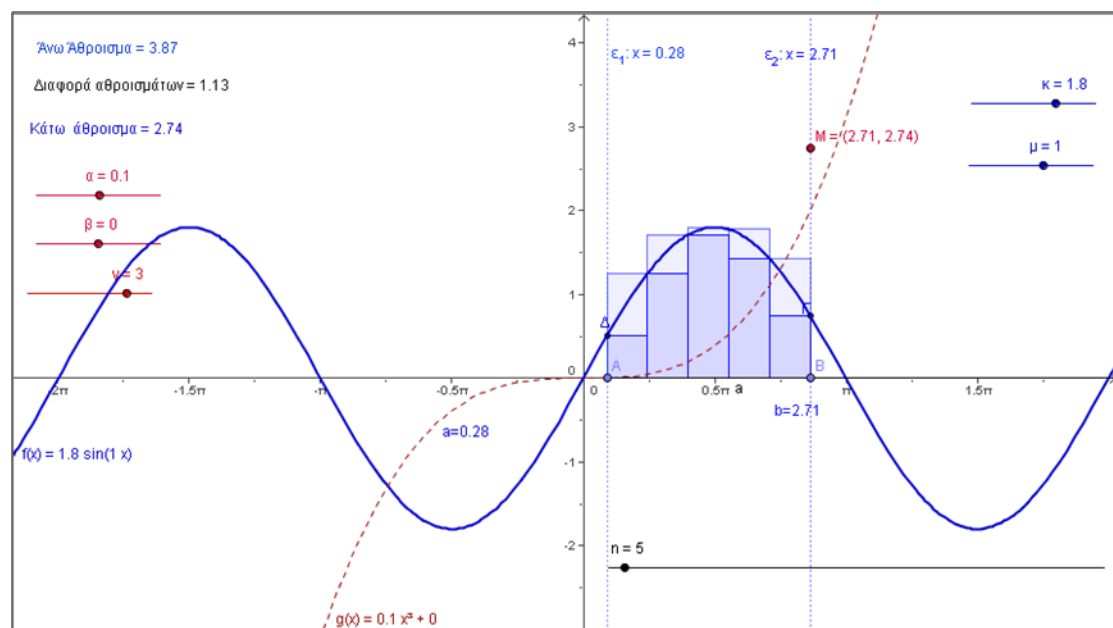
Διερεύνηση 3

Οι μαθητές πρέπει να αναμένεται να βρουν την συνάρτηση $F(x) = -0,8x^2\sqrt{x} + 0,6x + \mu$ για κάθε τιμή του μ .

Διερεύνηση 4

Οι μαθητές αναμένεται να βρουν τις εξής σχέσεις: (1) $\kappa=2\alpha/5$ και (2) $\beta=\lambda$. Ο εκπαιδευτικός πρέπει να ζητήσει από τους μαθητές να επιβεβαιώσουν και αλγεβρικά την σχέση των συντελεστών. Έτσι, αν η δεδομένη συνάρτηση είναι $f(x) = \alpha x\sqrt{x} + \beta$ η αρχική της είναι $F(x) = \frac{2\alpha}{5}x^2\sqrt{x} + \lambda x + \mu$.

6.2 ΣΕΝΑΡΙΟ 14 : Μέτρηση εμβαδού χωρίου



6.2.1 Η κεντρική ιδέα του σεναρίου

Στο σενάριο αυτό οι μαθητές καλούνται να υπολογίσουν το εμβαδόν χωρίου που ορίζεται από τις ευθείες $x=x_A$, $x=x_B$, $y=f(x)$ και τον άξονα xx' και να βρουν την συνάρτηση στην οποία ανήκει το σημείο με τετμημένη την τετμημένη x_B και τεταγμένη το εμβαδόν του χωρίου, όταν η ευθεία $x=x_A$ είναι στο θέση $x=0$. Συγκεκριμένα εμπλέκονται σε διερευνήσεις παρατήρησης, έκφρασης και αλγεβρικής διαπραγμάτευσης με τη βοήθεια μεταβολών οι οποίες ορίζουν δυο συναρτήσεις $f(x)$ και $g(x)$, ώστε η δεύτερη να υπολογίζει το εμβαδόν του χωρίου (δηλαδή να είναι αρχική της πρώτης).

6.2.2 Στόχοι

- Να αποκτήσουν εμπειρίες σχετικές με την έννοια της μέτρησης εμβαδού χωρίου με τη μέθοδο της προσέγγισης με ορθογώνια (μέθοδος «εξάντλησης»).
- Να αποκτήσουν εμπειρίες σχετικές με τον τρόπο υπολογισμού του εμβαδού χωρίου.
- Να συνδέσουν τον υπολογισμό του εμβαδού χωρίου κάτω από μια συνάρτηση με την αρχική της συνάρτηση.

6.2.3 Διδακτική πρόταση

ΟΡΓΑΝΩΣΗ ΤΗΣ ΤΑΞΗΣ

Οι δραστηριότητες αυτές ενδείκνυται να διδάσκονται στο εργαστήριο υπολογιστών και οι μαθητές να εργάζονται σε ομάδες 2-3 ατόμων με φύλλο εργασίας. Μπορούν

όμως να διεξαχθούν και στην τάξη που διαθέτει μόνο έναν υπολογιστή με βιντεοπροβολέα. Σ' αυτή την περίπτωση οι μαθητές συμπληρώνουν τα φύλλα εργασίας με βάση τις παρατηρήσεις που κάνουν κατά τη διερεύνηση που γίνεται απ' όλη την τάξη και κατευθύνεται από τον εκπαιδευτικό ή κάποιον μαθητή. Στο πλαίσιο αυτό κάνουν παρεμβάσεις στην διερεύνηση με τις οποίες εκφράζουν την δική τους στρατηγική στη διερεύνηση. Καθώς τέτοιες παρεμβάσεις μπορούν να γίνονται στην τάξη απ' όλους τους μαθητές ο διδάσκων πρέπει να τις υποστηρίζει και να επιδιώκει να συζητούνται όλες οι πιθανές στρατηγικές της διερεύνησης.

Σε κάθε περίπτωση ο εκπαιδευτικός πρέπει να έχει από πριν προετοιμάσει τον τρόπο που θα χειριστεί τις διαφορετικές στρατηγικές που πιθανόν να διατυπωθούν καθώς και τις πιθανές εκβάσεις τους.

Ακόμα πρέπει με τη στάση του να προκαλεί την εφαρμογή των διαφορετικών τρόπων διερεύνησης, να ενθαρρύνει κάθε μαθητή να δοκιμάζει τις ιδέες του, να εκφράζει τις εικασίες του και να διατυπώνει τα συμπεράσματά του ελεύθερα. Ακόμα πρέπει να ενθαρρύνει τους μαθητές να προσπαθούν να επαληθεύουν αλγεβρικά τα αποτελέσματα των διερευνήσεών τους.

ΟΙ ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΕΣ ΔΥΝΑΤΟΤΗΤΕΣ ΤΟΥ ΣΕΝΑΡΙΟΥ

Οι προτεινόμενες στο σενάριο δραστηριότητες αφορούν φαινόμενα τα οποία προκαλούνται από τη δράση των μαθητών σε προσχεδιασμένους υπολογιστικούς μικρόκοσμους με σκοπό την ανάδειξη των διερευνούμενων ιδιοτήτων τους. Έτσι οι απαντήσεις στα ερωτήματα που τίθενται στο πλαίσιο αυτών των διερευνήσεων αλλά και αυτών που ο διδάσκων ή οι ίδιοι οι μαθητές μπορούν να θέσουν είναι δυνατόν να αποτελέσουν ένα περιβάλλον απόκτησης και έκφρασης εμπειριών σχετικών με τον υπολογισμό του εμβαδού χωρίου που ορίζεται από τις συναρτήσεις $x=x_A$, $x=x_B$, xx' και $y=f(x)$ και τη σύνδεσή του με το αόριστο ολοκλήρωμα. Τα εργαλεία που έχουν ενσωματωθεί στους μικρόκοσμους δίνουν την δυνατότητα στους μαθητές,

- να κάνουν πειράματα με τον προσδιορισμό καλύτερης προσέγγισης του εμβαδού χωρίου,
- να διερευνήσουν ποιες τιμές των μεταβολών ορίζουν την ζητούμενη συνάρτηση του εμβαδού,
- να παρατηρούν και να ερμηνεύουν τα αποτελέσματα των χειρισμών τους,
- να εκφράζουν εικασίες, να κάνουν γενικεύσεις, να διατυπώνουν υποθέσεις και θεωρήματα και να τα εκφράζουν με μαθηματικούς όρους,

Ακόμα, μπορούν να επεμβαίνουν και να επαναπροσδιορίζουν τις δυνατότητες των εργαλείων ή να επαναδιατυπώνουν τον τρόπο ορισμού των αντικειμένων και να μεταβάλλουν την εμφάνισή τους. Από αυτή την άποψη οι μικρόκοσμοι είναι επαναχρησιμοποιήσιμοι και δίνουν τη δυνατότητα στους χρήστες να διατυπώνουν και νέα ερωτήματα που αφορούν ιδιαίτερες γνωστικές πτυχές των μαθηματικών αντικειμένων.

ΠΟΡΕΙΑ ΤΗΣ ΕΦΑΡΜΟΓΗΣ ΤΟΥ ΣΕΝΑΡΙΟΥ

Το σενάριο αποτελείται από τέσσερις εργασίες. Στην πρώτη, οι μαθητές διαπραγματεύονται την εύρεση του εμβαδού που ορίζεται από πολυωνυμική συνάρτηση. Στη δεύτερη, οι μαθητές διαπραγματεύονται την εύρεση της συνάρτησης στην οποία ανήκει το εμβαδόν χωρίου με κάτω άκρο το 0, τον άξονα xx' και μια

πολυωνυμική συνάρτηση. Στην τρίτη, οι μαθητές διαπραγματεύονται την εύρεση της συνάρτησης στην οποία ανήκει το εμβαδόν χωρίου με κάτω άκρο το 0, τον άξονα xx' και μια τριγωνομετρική συνάρτηση. Στην τέταρτη, οι μαθητές διαπραγματεύονται την εύρεση της συνάρτησης στην οποία ανήκει το εμβαδόν χωρίου με κάτω άκρο το 0, τον άξονα xx' και μια άρρητη συνάρτηση.

Η εμπλοκή των μαθητών με κάθε μια δραστηριότητα αναμένεται να αναδειξεί:

- Την δυνατότητα προσέγγισης του εμβαδού χωρίου με ορθογώνια που έχουν βάση τα ίσα τμήματα στα οποία διαιρείται το τμήμα (x_A, x_B) και ύψος την πλευρά του ορθογωνίου που τελειώνει στην συνάρτηση.
- Τη σχέση του εμβαδού του χωρίου που ορίζεται από μια συνάρτηση, τον άξονα xx' και τις ευθείες $x=x_A$, $x=x_B$ με την αρχική της συνάρτηση.

Ο εκπαιδευτικός μπορεί να ζητά από τους μαθητές να επαληθεύουν αλγεβρικά τα συμπεράσματά τους σε κάθε περίπτωση.

ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

Εργασία	Περιγραφή	Τμήμα εφαρμογής	Περιεχόμενο
Εργασία 1	Η μέτρηση του εμβαδού χωρίου κάτω από πολυωνυμική συνάρτηση	ΚΑΤ/ΣΕΙΣ	Διερευνήσεις σχετικές με τη μέτρηση του εμβαδού χωρίου που ορίζουν η πολυωνυμική συνάρτηση και οι ευθείες $x=x_A$, $x=x_B$ και $\psi=0$
Εργασία 2	Η συνάρτηση $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ που ορίζουν πολυωνυμικές συναρτήσεις.	ΚΑΤ/ΣΕΙΣ	Διερευνήσεις σχετικές με την συνάρτηση που ορίζει το εμβαδόν εμβαδού χωρίου που ορίζουν η πολυωνυμική συνάρτηση και οι ευθείες $x=x_A$, $x=x_B$ και $\psi=0$ όταν οι $x=x_A$ και $x=x_B$ μεταβάλλονται.
Εργασία 3	Η συνάρτηση $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ που ορίζουν τριγωνομετρικές συναρτήσεις.	ΚΑΤ/ΣΕΙΣ	Διερευνήσεις σχετικές με την συνάρτηση που ορίζει το εμβαδόν εμβαδού χωρίου που ορίζουν οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις και οι ευθείες $x=x_A$, $x=x_B$ και $\psi=0$ όταν οι $x=x_A$ και $x=x_B$ μεταβάλλονται.
Εργασία 4	Η συνάρτηση $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ που ορίζουν άρρητες συναρτήσεις.	ΚΑΤ/ΣΕΙΣ	Διερευνήσεις σχετικές με την συνάρτηση που ορίζει το εμβαδόν εμβαδού χωρίου που ορίζουν οι άρρητες συναρτήσεις και οι ευθείες $x=x_A$, $x=x_B$ και $\psi=0$ όταν οι $x=x_A$ και $x=x_B$ μεταβάλλονται.

6.2.4 Θέμα 1: Η μέτρηση του εμβαδού χωρίου κάτω από πολυωνυμική συνάρτηση

Στην επιφάνεια εργασίας του παρακάτω μικρόκοσμου έχει σχεδιαστεί η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=0.4 \cdot x^2$ και οι ευθείες (ε_1): $x=x_A$ και (ε_2): $x=x_B$ που διέρχονται από τα σημεία A και B. Με την χρήση του μεταβολέα n μπορείτε να χωρίζετε το χωρίο που προσδιορίζεται από τις ευθείες $x=x_A$, $x=x_B$, $y=f(x)$ και τον άξονα $\chi\chi'$ σε n ορθογώνια ίσου πλάτους. Ένα σημείο M ορίζεται να έχει τετμημένη την τετμημένη του B και τεταγμένη το άθροισμα των εμβαδών των ορθογωνίων στα οποία χωρίζεται το χωρίο. Ερευνήστε πότε το άθροισμα των εμβαδών των ορθογωνίων προσεγγίζει ικανοποιητικά το εμβαδόν του χωρίου.

ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΕΙΣ

1. Μπορείτε να υπολογίσετε με ικανοποιητική προσέγγιση το εμβαδόν του χωρίου όταν οι ευθείες που το ορίζουν είναι οι $x=0$ και $x=2$; Μπορείτε να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά την απάντησή σας;
2. Μπορείτε να υπολογίσετε με ικανοποιητική προσέγγιση το εμβαδόν του χωρίου όταν οι ευθείες που το ορίζουν είναι οι $x=0$ και $x=2$, το σημείο A να είναι στη θέση (0,0) και το B στη θέση στο (2,0) χρησιμοποιώντας και το "Κάτω άθροισμα" και το "Άνω άθροισμα"; Μπορείτε να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά την απάντησή σας;
3. Επιλέξτε τα σημεία A και B να είναι στις θέσεις (0,0) και (3,0) αντίστοιχα. Μπορείτε να προσδιορίσετε το πλήθος των ορθογωνίων που πρέπει να χωριστεί το χωρίο ώστε το σημείο B να ανήκει στην γραφική παράσταση της συνάρτησης $F(x)$; Μπορείτε να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά την απάντησή σας;
4. Μπορείτε να επαναλάβετε τις προηγούμενες διερευνήσεις μετασχηματίζοντας την καμπύλη της συνάρτησης με το ποντίκι σας είτε επαναπροσδιορίζοντας τον τύπο της με την εντολή «Επαναπροσδιορισμός». Προσδιορίστε το εμβαδόν του χωρίου μετακινώντας το σημείο B ενώ το σημείο A να είναι στη θέση (0,0). Πώς συνδέεται το εμβαδόν του χωρίου με την συνάρτηση και την καμπύλη στην οποία ανήκει το σημείο M; Μπορείτε να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά την απάντησή σας;

Ανακεφαλαίωση: Συζητήστε στη τάξη για την διαδικασία προσδιορισμού του εμβαδού χωρίου που ορίζεται από την συνάρτηση $f(x)$ και τις ευθείες $\chi=\chi_A$, $\chi=\chi_B$ και τον άξονα $\chi\chi'$. Συζητήστε την αντίστοιχη αλγεβρική διαδικασία υπολογισμού του εμβαδού.

ΟΔΗΓΙΕΣ ΠΡΟΣ ΤΟΝ ΔΙΔΑΣΚΟΝΤΑ

Για τη διαχείριση των εργαλείων του μικρόκοσμου

Ζητήστε από τους μαθητές:

- Να μετακινούν τους δείκτες των μεταβολέων για να ορίσουν την συνάρτηση $f(x)$.
- Να μετακινούν τα σημεία A και B για να ορίζουν τις ευθείες $x=x_A$ και $x=x_B$.
- Να μετακινούν τον δείκτη του μεταβολέα n.

- Να χρησιμοποιούν την εντολή “«Δείξε το αντικείμενο» για να εμφανίσει ή να κρύψουν το κάτω ή το πάνω εμβαδόν του χωρίου.
- Να χρησιμοποιούν την εντολή “Ιδιότητες” για να επαναπροσδιορίζουν τα χαρακτηριστικά των αντικειμένων της επιφάνειας εργασίας.

Για τις διερευνήσεις

Ζητήστε από τους μαθητές να παρατηρούν, να προβλέπουν, να ελέγχουν και να εκφράζουν στην ομάδα τους και στην τάξη:

- Για το γράφημα:
 - ✓ Τη μορφή του γραφήματος της συνάρτησης $f(x)$.
 - ✓ Τη μορφή του σχήματος που δημιουργεί η τιμή του μεταβολέα n .
 - ✓ Τη μεταβολή του πλήθους των ορθογωνίων που ορίζεται από την μεταβολή του δείκτη n του μεταβολέα.
- Για την αλγεβρική διαπραγμάτευση:
 - ✓ Καταγράφουν τις τιμές των x_A και x_B .
 - ✓ Καταγράφουν τις τιμές του εμβαδού του ορίζεται με την δημιουργία των ορθογωνίων που χωρίζουν το χωρίο.
 - ✓ Καταγράφουν τη διαφορά των τιμών των πάνω και κάτω εμβαδών τα οποία προσεγγίζουν το εμβαδόν του χωρίου.

Για τις απαντήσεις

Ζητήστε από τους μαθητές να εκφράσουν στην τάξη τις απαντήσεις τους. Είναι πιθανόν οι μαθητές να δώσουν απαντήσεις όπως οι παρακάτω:

Διερεύνηση 1

Οι μαθητές διαπραγματεύονται την εύρεση του εμβαδού του χωρίου με την μέτρηση των εμβαδών των ορθογωνίων που υπολείπονται ή υπερέχουν του χωρίου. Αναμένεται να κάνουν τις εξής ενέργειες:

(1) Να επιλέξουν τις θέσεις των σημείων Α και Β. (2) Να επιλέξουν την εμφάνιση των ορθογωνίων που υπολείπονται του χωρίου και στη συνέχεια αυτών που υπερέχουν. (3) Να μετακινούν τον δείκτη n του μεταβολέα αυξάνοντας ανά ένα τις τιμές του. (4) Να παρατηρούν τις τιμές των εμβαδών «Άνω άθροισμα», «Κάτω άθροισμα» και τη «Διαφορά των δυο αθροισμάτων». Αναμένεται να παρατηρήσουν ότι καθώς αυξάνουν τις τιμές του μεταβολέα η διαφορά των δυο εμβαδών τείνει στο 0. Ο εκπαιδευτικός πρέπει να ζητήσει από τους μαθητές να ελέγξουν και αλγεβρικά τις παρατηρήσεις τους.

Διερεύνηση 2

Και σ' αυτή τη διερεύνηση οι μαθητές διαπραγματεύονται την εύρεση του εμβαδού του χωρίου με την μέτρηση των εμβαδών των ορθογωνίων που υπολείπονται ή υπερέχουν του χωρίου. Η ερμηνεία που αναμένεται να δώσουν είναι ότι τα δυο εμβαδά «Άνω άθροισμα» και «Κάτω άθροισμα» των ορθογωνίων που υπερέχουν και αυτών που υπολείπονται τείνουν να είναι ίσα μεταξύ τους και ίσα με το εμβαδόν του χωρίου. Μάλιστα, η τιμή που αναμένεται να βρουν ως εμβαδόν του χωρίου είναι αριθμός ανάμεσα στους 1,07 και 1,08. Ο εκπαιδευτικός πρέπει να ζητήσει από τους

μαθητές να υπολογίσουν την τιμή κάθε εμβαδού και της διαφοράς τους και αλγεβρικά θεωρώντας το n να τείνει στο άπειρο

Διερεύνηση 3

Οι μαθητές αναμένεται να θεωρήσουν ικανοποιητική την ακρίβεια όταν η διαφορά των δυο εμβαδών δεν μειώνεται περαιτέρω. Αναμένεται να βρουν ότι το ζητούμενο εμβαδόν είναι ανάμεσα στις τιμές 3.58 και 3.62.

Διερεύνηση 4

Οι μαθητές αναμένεται να κάνουν παρατηρήσεις ανάλογες με αυτές που έκαναν στις προηγούμενες διερευνήσεις. Επίσης, όταν απομακρύνεται το B από το A το εμβαδόν του χωρίου μεγαλώνει.

6.2.5 Θέμα 2: Η συνάρτηση του εμβαδού χωρίου που ορίζουν πολυωνυμικές συναρτήσεις.

Στην επιφάνεια εργασίας του παρακάτω μικρόκοσμου έχει σχεδιαστεί η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=kx^\mu$, οι ευθείες $x=x_A$ και $x=x_B$ που διέρχονται από τα σημεία A και B καθώς και η συνάρτηση $g(x)=ax^n+\beta$. Με την χρήση του μεταβολέα η μπορείτε να χωρίζετε το χωρίο που προσδιορίζεται από τις ευθείες $x=x_A$, $x=x_B$, $y=f(x)$ και τον άξονα xx' σε η ορθογώνια ίσου πλάτους. Ένα σημείο M ορίζεται να έχει τετμημένη την τετμημένη του B και τεταγμένη το άθροισμα των εμβαδών των ορθογωνίων στα οποία χωρίζεται το χωρίο. Ερευνήστε πότε το άθροισμα των εμβαδών των ορθογωνίων προσεγγίζει ικανοποιητικά το εμβαδόν του χωρίου καθώς και πώς πρέπει να οριστεί η συνάρτηση $g(x)$ ώστε το M να ανήκει σ' αυτή.

ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΕΙΣ

1. Επιλέξτε $a=0.3$ και $k=2$. Μπορείτε να υπολογίσετε με ικανοποιητική προσέγγιση το εμβαδόν του χωρίου όταν οι ευθείες που το ορίζουν είναι οι $x=0$ και $x=2$. Μπορείτε να προσδιορίσετε την $g(x)$ ώστε το σημείο M να ανήκει σ' αυτή καθώς κινείται το σημείο B; Μπορείτε να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά την απάντησή σας;
2. Επιλέξτε $a=-0.3$ και $k=2$. Μπορείτε να υπολογίσετε με ικανοποιητική προσέγγιση το εμβαδόν του χωρίου όταν οι ευθείες που το ορίζουν είναι οι $x=0$ και $x=2$. Μπορείτε να προσδιορίσετε την $g(x)$ ώστε το σημείο M να ανήκει σ' αυτή καθώς κινείται το σημείο B; Μπορείτε να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά την απάντησή σας;
3. Επιλέξτε $a=0.4$ και $k=3$. Μπορείτε να υπολογίσετε με ικανοποιητική προσέγγιση το εμβαδόν του χωρίου όταν οι ευθείες που το ορίζουν είναι οι $x=0$ και $x=2$. Μπορείτε να προσδιορίσετε την $g(x)$ ώστε το σημείο M να ανήκει σ' αυτή καθώς κινείται το σημείο B; Μπορείτε να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά την απάντησή σας;
4. Μπορείτε να επαναλάβετε τις προηγούμενες διερευνήσεις μετασχηματίζοντας την καμπύλη της συνάρτησης $f(x)$ επιλέγοντας διάφορες τιμές για τις παραμέτρους k και μ . Σε κάθε περίπτωση υπολογίστε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την συνάρτηση $f(x)$ τις ευθείες $x=0$ και $x=x_B$ και τον άξονα xx' . Πώς συνδέεται το εμβαδόν του χωρίου με την συνάρτηση $g(x)$; Μπορείτε να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά την απάντησή σας;

Ανακεφαλαίωση: Συζητήστε στη τάξη για την διαδικασία προσδιορισμού του εμβαδού χωρίου που ορίζεται από την συνάρτηση $f(x)$ και τις ευθείες $x=x_A$, $x=x_B$ και τον άξονα xx' . Συζητήστε την αντίστοιχη αλγεβρική διαδικασία υπολογισμού του εμβαδού.

ΟΔΗΓΙΕΣ ΠΡΟΣ ΤΟΝ ΔΙΔΑΣΚΟΝΤΑ

Για τη διαχείριση των εργαλείων του μικρόκοσμου

Ζητήστε από τους μαθητές:

- Να μετακινούν τους δείκτες των μεταβολέων για να ορίσουν τις συναρτήσεις $f(x)$ και $g(x)$.
- Να μετακινούν τα σημεία A και B για να ορίζουν τις ευθείες $x=x_A$ και $x=x_B$.

- Να μετακινούν τον δείκτη του μεταβολέα n .
- Να χρησιμοποιούν την εντολή «Δείξε το αντικείμενο» για να εμφανίσει ή να κρύψουν το κάτω ή το πάνω εμβαδόν του χωρίου.
- Να χρησιμοποιούν την εντολή «Ιδιότητες» για να επαναπροσδιορίζουν τα χαρακτηριστικά των αντικειμένων της επιφάνειας εργασίας.

Για τις διερευνήσεις

Ζητήστε από τους μαθητές να παρατηρούν, να προβλέπουν, να ελέγχουν και να εκφράζουν στην ομάδα τους και στην τάξη:

- Για το γράφημα:
 - ✓ Τη μορφή του γραφήματος της συνάρτησης $f(x)$ και της $g(x)$.
 - ✓ Τη μορφή του σχήματος που δημιουργεί η τιμή του μεταβολέα n .
 - ✓ Την γραμμή που γράφει το σημείο M .
 - ✓ Τη μεταβολή του πλήθους των ορθογωνίων που ορίζεται από την μεταβολή του δείκτη n του μεταβολέα.
- Για την αλγεβρική διαπραγμάτευση:
 - ✓ Καταγράφουν τις τιμές των x_A και x_B .
 - ✓ Καταγράφουν τις τιμές του εμβαδού που ορίζεται με την δημιουργία των ορθογωνίων που χωρίζουν το χωρίο.
 - ✓ Καταγράφουν τη διαφορά των τιμών των πάνω και κάτω εμβαδών τα οποία προσεγγίζουν το εμβαδόν του χωρίου.
 - ✓ Καταγράφουν την εξίσωση της συνάρτησης στην οποία ανήκει το σημείο M .

Για τις απαντήσεις

Ζητήστε από τους μαθητές να εκφράσουν στην τάξη τις απαντήσεις τους. Είναι πιθανόν οι μαθητές να δώσουν απαντήσεις όπως οι παρακάτω:

Διερεύνηση 1

Οι μαθητές διαπραγματεύονται την εύρεση του εμβαδού του χωρίου με την μέτρηση των εμβαδών των ορθογωνίων που υπολείπονται ή υπερέχουν του χωρίου. Αναμένεται να κάνουν τις εξής ενέργειες:

(1) Να επιλέξουν τις θέσεις των σημείων A και B . (2) Να επιλέξουν την εμφάνιση των ορθογωνίων που υπολείπονται του χωρίου και αυτών που υπερέχουν. (3) Να μετακινούν τον δείκτη n του μεταβολέα αυξάνοντας ανά ένα τις τιμές του. (4) Να παρατηρούν τις τιμές των εμβαδών «Άνω άθροισμα», «Κάτω άθροισμα» και τη «Διαφορά των δυο αθροισμάτων». (5) Να παρατηρούν την θέση του σημείου B . (6) Να επιλέγουν τις τιμές για τους συντελεστές της συνάρτησης $g(x)$ ώστε το M να ανήκει στην $g(x)$. Αναμένεται να παρατηρήσουν ότι καθώς αυξάνουν τις τιμές του μεταβολέα n η διαφορά των δυο εμβαδών τείνει στο 0 και ότι καθώς μετακινούν το σημείο B το M ανήκει στην συνάρτηση $g(x)=0.1x^3$. Ο εκπαιδευτικός πρέπει να ζητήσει από τους μαθητές να ελέγξουν και αλγεβρικά τις παρατηρήσεις τους.

Διερεύνηση 2

Οι μαθητές αναμένεται να βρουν ότι το σημείο M ανήκει στην συνάρτηση $g(x) = -0.1x^3$.

Διερεύνηση 3

Οι μαθητές αναμένεται να βρουν ότι το σημείο M ανήκει στην συνάρτηση $g(x) = -0.1x^4$.

Διερεύνηση 4

Οι μαθητές αναμένεται να κάνουν παρατηρήσεις ανάλογες με αυτές που έκαναν στις προηγούμενες διερευνήσεις. Επίσης, ότι το M ανήκει στη $g(x)$ όταν αυτή έχει συντελεστές και εκθέτη $\alpha = \kappa/\nu$, $\beta = 0$ και $\nu = \mu + 1$.

6.2.6 Θέμα 3: Η συνάρτηση του εμβαδού χωρίου που ορίζουν τριγωνομετρικές συναρτήσεις.

Στην επιφάνεια εργασίας του παρακάτω μικρόκοσμου έχει σχεδιαστεί η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\kappa \cdot \sin(\mu \cdot x)$, οι ευθείες $x=x_A$ και $x=x_B$ που διέρχονται από τα σημεία A και B καθώς και η συνάρτηση $g(x)=ax^n+\beta$. Με την χρήση του μεταβολέα n μπορείτε να χωρίζετε το χωρίο που προσδιορίζεται από τις ευθείες $x=x_A$, $x=x_B$, $y=f(x)$ και τον άξονα $\chi\chi'$ σε n ορθογώνια ίσου πλάτους. Ένα σημείο M ορίζεται να έχει τετμημένη την τετμημένη του B και τεταγμένη το άθροισμα των εμβαδών των ορθογωνίων στα οποία χωρίζεται το χωρίο. Ερευνήστε πότε το άθροισμα των εμβαδών των ορθογωνίων προσεγγίζει ικανοποιητικά το εμβαδόν του χωρίου καθώς και πώς πρέπει να οριστεί η συνάρτηση $g(x)$ ώστε το M να ανήκει σ' αυτή.

ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΕΙΣ

1. Επιλέξτε $\kappa=2$ και $\mu=1$. Μπορείτε να υπολογίσετε με ικανοποιητική προσέγγιση το εμβαδόν του χωρίου όταν οι ευθείες που το ορίζουν είναι οι $x=0$ και $x=\pi/2$. Μπορείτε να προσδιορίσετε την $g(x)$ ώστε το σημείο M να ανήκει σ' αυτή καθώς κινείται το σημείο B; Μπορείτε να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά την απάντησή σας;
2. Επιλέξτε $\kappa=-1$ και $\mu=-2$. Μπορείτε να υπολογίσετε με ικανοποιητική προσέγγιση το εμβαδόν του χωρίου όταν οι ευθείες που το ορίζουν είναι οι $x=0$ και $x=\pi/2$. Μπορείτε να προσδιορίσετε την $g(x)$ ώστε το σημείο M να ανήκει σ' αυτή καθώς κινείται το σημείο B; Μπορείτε να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά την απάντησή σας;
3. Επιλέξτε $\kappa=2$ και $\mu=2$. Μπορείτε να υπολογίσετε με ικανοποιητική προσέγγιση το εμβαδόν του χωρίου όταν οι ευθείες που το ορίζουν είναι οι $x=0$ και $x=\pi$. Μπορείτε να προσδιορίσετε την $g(x)$ ώστε το σημείο M να ανήκει σ' αυτή καθώς κινείται το σημείο B; Μπορείτε να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά την απάντησή σας;
4. Μπορείτε να επαναλάβετε τις προηγούμενες διερευνήσεις μετασχηματίζοντας την καμπύλη της συνάρτησης $f(x)$ επιλέγοντας διάφορες τιμές για τις παραμέτρους κ και μ . Σε κάθε περίπτωση υπολογίστε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την συνάρτηση $f(x)$ τις ευθείες $x=0$ και $x=x_B$ και τον άξονα $\chi\chi'$. Πώς συνδέεται το εμβαδόν του χωρίου με την συνάρτηση $g(x)$; Μπορείτε να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά την απάντησή σας;

Ανακεφαλαίωση: Συζητήστε στη τάξη για την διαδικασία προσδιορισμού του εμβαδού χωρίου που ορίζεται από την συνάρτηση $f(x)$ και τις ευθείες $\chi=\chi_A$, $\chi=\chi_B$ και τον άξονα $\chi\chi'$. Συζητήστε την αντίστοιχη αλγεβρική διαδικασία υπολογισμού του εμβαδού.

ΟΔΗΓΙΕΣ ΠΡΟΣ ΤΟΝ ΔΙΔΑΣΚΟΝΤΑ

Για τη διαχείριση των εργαλείων του μικρόκοσμου

Ζητήστε από τους μαθητές:

- Να μετακινούν τους δείκτες των μεταβολέων για να ορίσουν τις συναρτήσεις $f(x)$ και $g(x)$.
- Να μετακινούν τα σημεία A και B για να ορίζουν τις ευθείες $x=x_A$ και $x=x_B$.

- Να μετακινούν τον δείκτη του μεταβολέα n .
- Να χρησιμοποιούν τα κουμπιά ή την εντολή “«Δείξε το αντικείμενο» για να εμφανίσει ή να κρύψουν το κάτω ή το πάνω εμβαδόν του χωρίου.
- Να χρησιμοποιούν την εντολή “Ιδιότητες” για να επαναπροσδιορίζουν τα χαρακτηριστικά των αντικειμένων της επιφάνειας εργασίας.

Για τις διερευνήσεις

Ζητήστε από τους μαθητές να παρατηρούν, να προβλέπουν, να ελέγχουν και να εκφράζουν στην ομάδα τους και στην τάξη:

- Για το γράφημα:
 - ✓ Τη μορφή του γραφήματος της συνάρτησης $f(x)$ και της $g(x)$.
 - ✓ Τη μορφή του σχήματος που δημιουργεί η τιμή του μεταβολέα n .
 - ✓ Την γραμμή που γράφει το σημείο M .
 - ✓ Τη μεταβολή του πλήθους των ορθογωνίων που ορίζεται από την μεταβολή του δείκτη n του μεταβολέα.
- Για την αλγεβρική διαπραγμάτευση:
 - ✓ Καταγράφουν τις τιμές των x_A και x_B .
 - ✓ Καταγράφουν τις τιμές του εμβადού του ορίζεται με την δημιουργία των ορθογωνίων που χωρίζουν το χωρίο.
 - ✓ Καταγράφουν τη διαφορά των τιμών των πάνω και κάτω εμβαδών τα οποία προσεγγίζουν το εμβαδόν του χωρίου.
 - ✓ Καταγράφουν την εξίσωση της συνάρτησης στην οποία ανήκει το σημείο M .

Για τις απαντήσεις

Ζητήστε από τους μαθητές να εκφράσουν στην τάξη τις απαντήσεις τους. Είναι πιθανόν οι μαθητές να δώσουν απαντήσεις όπως οι παρακάτω:

Διερεύνηση 1

Οι μαθητές διαπραγματεύονται την εύρεση του εμβადού του χωρίου με την μέτρηση των εμβαδών των ορθογωνίων που υπολείπονται ή υπερέχουν του χωρίου. Αναμένεται να κάνουν τις εξής ενέργειες:

(1) Να επιλέξουν τις θέσεις των σημείων A και B . (2) Να επιλέξουν την εμφάνιση των ορθογωνίων που υπολείπονται του χωρίου και αυτών που υπερέχουν. (3) Να μετακινούν τον δείκτη n του μεταβολέα αυξάνοντας ανά ένα τις τιμές του. (4) Να παρατηρούν τις τιμές των εμβαδών «Άνω άθροισμα», «Κάτω άθροισμα» και τη «Διαφορά των δυο αθροισμάτων». (5) Να παρατηρούν την θέση του σημείου B . (6) Να επιλέγουν τις τιμές για τους συντελεστές της συνάρτησης $g(x)$ ώστε το M να ανήκει στην $g(x)$. Αναμένεται να παρατηρήσουν ότι καθώς αυξάνουν τις τιμές του μεταβολέα n η διαφορά των δυο εμβαδών τείνει στο 0 και ότι καθώς μετακινούν το σημείο B το M ανήκει στην συνάρτηση $g(x)=2(1-\cos(x))$. Ο εκπαιδευτικός πρέπει να ζητήσει από τους μαθητές να ελέγξουν και αλγεβρικά τις παρατηρήσεις τους.

Διερεύνηση 2

Οι μαθητές αναμένεται να βρουν ότι το σημείο M ανήκει στην συνάρτηση $g(x)=1/2(1-\cos(2x))$.

Διερεύνηση 3

Οι μαθητές αναμένεται να βρουν ότι το σημείο M ανήκει στην συνάρτηση $g(x)=1-\cos(2x)$.

Διερεύνηση 4

Οι μαθητές αναμένεται να κάνουν παρατηρήσεις ανάλογες με αυτές που έκαναν στις προηγούμενες διερευνήσεις. Επίσης, ότι το M ανήκει στη $g(x)=-\kappa/\mu(1-\sin(2x))$.

6.2.7 Θέμα 4: Η συνάρτηση του εμβαδού χωρίου που ορίζουν άρρητες συναρτήσεις.

Στην επιφάνεια εργασίας του παρακάτω μικρόκοσμου έχει σχεδιαστεί η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=k\sqrt{\mu x}$, οι ευθείες $x=x_A$ και $x=x_B$ που διέρχονται από τα σημεία A και B καθώς και η συνάρτηση $g(x)=ax^\gamma+\beta$. Με την χρήση του μεταβολέα μ μπορείτε να χωρίζετε το χωρίο που προσδιορίζεται από τις ευθείες $x=x_A$, $x=x_B$, $y=f(x)$ και τον άξονα x σε n ορθογώνια ίσου πλάτους. Ένα σημείο M ορίζεται να έχει τετμημένη την τετμημένη του B και τεταγμένη το άθροισμα των εμβαδών των ορθογωνίων στα οποία χωρίζεται το χωρίο. Ερευνήστε πότε το άθροισμα των εμβαδών των ορθογωνίων προσεγγίζει ικανοποιητικά το εμβαδόν του χωρίου καθώς και πώς πρέπει να οριστεί η συνάρτηση $g(x)$ ώστε το M να ανήκει σ' αυτή.

ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΕΙΣ

1. Επιλέξτε $k=1$ και $\mu=1$. Μπορείτε να υπολογίσετε με ικανοποιητική προσέγγιση το εμβαδόν του χωρίου όταν οι ευθείες που το ορίζουν είναι οι $x=0$ και $x=3$. Μπορείτε να προσδιορίσετε την $g(x)$ ώστε το σημείο M να ανήκει σ' αυτή καθώς κινείται το σημείο B; Μπορείτε να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά την απάντησή σας;
2. Επιλέξτε $k=0.5$ και $\mu=3$. Μπορείτε να υπολογίσετε με ικανοποιητική προσέγγιση το εμβαδόν του χωρίου όταν οι ευθείες που το ορίζουν είναι οι $x=0$ και $x=3$. Μπορείτε να προσδιορίσετε την $g(x)$ ώστε το σημείο M να ανήκει σ' αυτή καθώς κινείται το σημείο B; Μπορείτε να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά την απάντησή σας;
3. Επιλέξτε $k=-0.5$ και $\mu=3$. Μπορείτε να υπολογίσετε με ικανοποιητική προσέγγιση το εμβαδόν του χωρίου όταν οι ευθείες που το ορίζουν είναι οι $x=0$ και $x=3$. Μπορείτε να προσδιορίσετε την $g(x)$ ώστε το σημείο M να ανήκει σ' αυτή καθώς κινείται το σημείο B; Μπορείτε να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά την απάντησή σας;
4. Μπορείτε να επαναλάβετε τις προηγούμενες διερευνήσεις μετασχηματίζοντας την καμπύλη της συνάρτησης $f(x)$ επιλέγοντας διάφορες τιμές για τις παραμέτρους k και μ . Σε κάθε περίπτωση υπολογίστε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την συνάρτηση $f(x)$ τις ευθείες $x=0$ και $x=x_B$ και τον άξονα x . Πώς συνδέεται το εμβαδόν του χωρίου με την συνάρτηση $g(x)$; Μπορείτε να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά την απάντησή σας;

Ανακεφαλαίωση: Συζητήστε στη τάξη για την διαδικασία προσδιορισμού του εμβαδού χωρίου που ορίζεται από την συνάρτηση $f(x)$ και τις ευθείες $x=x_A$, $x=x_B$ και τον άξονα x . Συζητήστε την αντίστοιχη αλγεβρική διαδικασία υπολογισμού του εμβαδού.

ΟΔΗΓΙΕΣ ΠΡΟΣ ΤΟΝ ΔΙΔΑΣΚΟΝΤΑ

Για τη διαχείριση των εργαλείων του μικρόκοσμου

Ζητήστε από τους μαθητές:

- Να μετακινούν τους δείκτες των μεταβολέων για να ορίσουν τις συναρτήσεις $f(x)$ και $g(x)$.
- Να μετακινούν τα σημεία A και B για να ορίζουν τις ευθείες $x=x_A$ και $x=x_B$.

- Να μετακινούν τον δείκτη του μεταβολέα n .
- Να χρησιμοποιούν την εντολή “«Δείξε το αντικείμενο» για να εμφανίσει ή να κρύψουν το κάτω ή το πάνω εμβαδόν του χωρίου.
- Να χρησιμοποιούν την εντολή “Ιδιότητες” για να επαναπροσδιορίζουν τα χαρακτηριστικά των αντικειμένων της επιφάνειας εργασίας.

Για τις διερευνήσεις

Ζητήστε από τους μαθητές να παρατηρούν, να προβλέπουν, να ελέγχουν και να εκφράζουν στην ομάδα τους και στην τάξη:

- Για το γράφημα:
 - ✓ Τη μορφή του γραφήματος της συνάρτησης $f(x)$ και της $g(x)$.
 - ✓ Τη μορφή του σχήματος που δημιουργεί η τιμή του μεταβολέα n .
 - ✓ Την γραμμή που γράφει το σημείο M .
 - ✓ Τη μεταβολή του πλήθους των ορθογωνίων που ορίζεται από την μεταβολή του δείκτη n του μεταβολέα.
- Για την αλγεβρική διαπραγμάτευση:
 - ✓ Καταγράφουν τις τιμές των x_A και x_B .
 - ✓ Καταγράφουν τις τιμές του εμβαδού του ορίζεται με την δημιουργία των ορθογωνίων που χωρίζουν το χωρίο.
 - ✓ Καταγράφουν τη διαφορά των τιμών των πάνω και κάτω εμβαδών τα οποία προσεγγίζουν το εμβαδόν του χωρίου.
 - ✓ Καταγράφουν την εξίσωση της συνάρτησης στην οποία ανήκει το σημείο M .

Για τις απαντήσεις

Ζητήστε από τους μαθητές να εκφράσουν στην τάξη τις απαντήσεις τους. Είναι πιθανόν οι μαθητές να δώσουν απαντήσεις όπως οι παρακάτω:

Διερεύνηση 1

Οι μαθητές διαπραγματεύονται την εύρεση του εμβαδού του χωρίου με την μέτρηση των εμβαδών των ορθογωνίων που υπολείπονται ή υπερέχουν του χωρίου. Αναμένεται να κάνουν τις εξής ενέργειες:

(1) Να επιλέξουν τις θέσεις των σημείων A και B . (2) Να επιλέξουν την εμφάνιση των ορθογωνίων που υπολείπονται του χωρίου και αυτών που υπερέχουν. (3) Να μετακινούν τον δείκτη n του μεταβολέα αυξάνοντας ανά ένα τις τιμές του. (4) Να παρατηρούν τις τιμές των εμβαδών «Άνω άθροισμα», «Κάτω άθροισμα» και τη «Διαφορά των δυο αθροισμάτων». (5) Να παρατηρούν την θέση του σημείου B . (6) Να επιλέγουν τις τιμές για τους συντελεστές της συνάρτησης $g(x)$ ώστε το M να ανήκει στην $g(x)$. Αναμένεται να παρατηρήσουν ότι καθώς αυξάνουν τις τιμές του μεταβολέα n η διαφορά των δυο εμβαδών τείνει στο 0 και ότι καθώς μετακινούν το σημείο B το M ανήκει στην συνάρτηση $g(x) = \frac{2}{3}\sqrt{x^3}$. Ο εκπαιδευτικός πρέπει να ζητήσει από τους μαθητές να ελέγξουν και αλγεβρικά τις παρατηρήσεις τους.

Διερεύνηση 2

Οι μαθητές αναμένεται να βρουν ότι το σημείο M ανήκει στην συνάρτηση $g(x) = \frac{\sqrt{3}}{3} \sqrt{x^3}$.

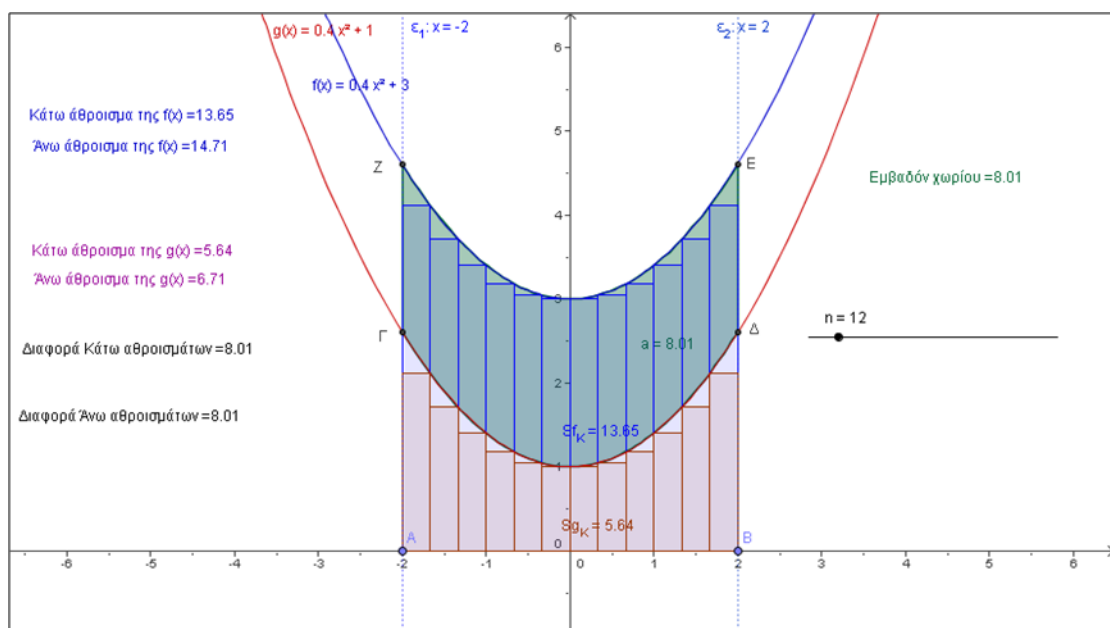
Διερεύνηση 3

Οι μαθητές αναμένεται να βρουν ότι το σημείο M ανήκει στην συνάρτηση $g(x) = -\frac{\sqrt{3}}{3} \sqrt{x^3}$.

Διερεύνηση 4

Οι μαθητές αναμένεται να κάνουν παρατηρήσεις ανάλογες με αυτές που έκαναν στις προηγούμενες διερευνήσεις. Επίσης, ότι το M ανήκει στη $g(x) = \frac{2\kappa\sqrt{\mu}}{3} \sqrt{x^3}$.

6.2.8 ΣΕΝΑΡΙΟ 15 : Θεωρήματα και προβλήματα ολοκληρωτικού λογισμού



6.2.9 Η κεντρική ιδέα του σεναρίου

Στο σενάριο αυτό οι μαθητές καλούνται να εφαρμόσουν τις εμπειρίες και τις γνώσεις που απέκτησαν από την διερεύνηση του εμβαδού χωρίου που ορίζεται από συνάρτηση και να υπολογίσουν το εμβαδόν χωρίου που ορίζεται από τις ευθείες $x=x_A$, $x=x_B$, και δυο συναρτήσεις, είτε να βρουν την συνάρτηση του εμβαδού μεταξύ μιας συνάρτησης και της εφαπτομένης της σε ένα σημείο, είτε να υπολογίσουν το θεώρημα της μέσης τιμής του διαφορικού λογισμού.

6.2.10 Στόχοι

- Να αποκτήσουν εμπειρίες σχετικές με την εφαρμογή ιδιοτήτων του ολοκληρωτικού λογισμού στη μέτρηση του εμβαδού (μέθοδος «εξάντλησης»).
- Να αποκτήσουν εμπειρίες σχετικές με τον τρόπο μεταβολής του εμβαδού χωρίου όταν μεταβάλλεται το ένα του άκρο.
- Να συνδέσουν τον υπολογισμό του εμβαδού χωρίου κάτω από μια συνάρτηση με την αρχική της συνάρτηση.

6.2.11 Διδακτική πρόταση

ΟΡΓΑΝΩΣΗ ΤΗΣ ΤΑΞΗΣ

Οι δραστηριότητες αυτές ενδείκνυται να διδάσκονται στο εργαστήριο υπολογιστών και οι μαθητές να εργάζονται σε ομάδες 2-3 ατόμων με φύλλο εργασίας. Μπορούν όμως να διεξαχθούν και στην τάξη που διαθέτει μόνο έναν υπολογιστή με βιντεοπροβολέα. Σ' αυτή την περίπτωση οι μαθητές συμπληρώνουν τα φύλλα

εργασίας με βάση τις παρατηρήσεις που κάνουν κατά την διερεύνηση που γίνεται απ' όλη την τάξη και κατευθύνεται από τον εκπαιδευτικό ή κάποιον μαθητή. Στο πλαίσιο αυτό κάνουν παρεμβάσεις στην διερεύνηση με τις οποίες εκφράζουν την δική τους στρατηγική στη διερεύνηση. Καθώς τέτοιες παρεμβάσεις μπορούν να γίνονται στην τάξη απ' όλους τους μαθητές ο διδάσκων πρέπει να τις υποστηρίξει και να επιδιώκει να συζητούνται όλες οι πιθανές στρατηγικές της διερεύνησης.

Σε κάθε περίπτωση ο εκπαιδευτικός πρέπει να έχει από πριν προετοιμάσει τον τρόπο που θα χειριστεί τις διαφορετικές στρατηγικές που πιθανόν να διατυπωθούν καθώς και τις πιθανές εκβάσεις τους.

Ακόμα πρέπει με τη στάση του να προκαλεί την εφαρμογή των διαφορετικών τρόπων διερεύνησης, να ενθαρρύνει κάθε μαθητή να δοκιμάζει τις ιδέες του, να εκφράζει τις εικασίες του και να διατυπώνει τα συμπεράσματά του ελεύθερα. Ακόμα πρέπει να ενθαρρύνει τους μαθητές να προσπαθούν να επαληθεύουν αλγεβρικά τα αποτελέσματα των διερευνήσεών τους.

ΟΙ ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΕΣ ΔΥΝΑΤΟΤΗΤΕΣ ΤΟΥ ΣΕΝΑΡΙΟΥ

Οι προτεινόμενες στο σενάριο δραστηριότητες αφορούν φαινόμενα τα οποία προκαλούνται από την δράση των μαθητών σε προσχεδιασμένους υπολογιστικούς μικρόκοσμους με σκοπό την ανάδειξη των διερευνούμενων ιδιοτήτων τους. Έτσι οι απαντήσεις στα ερωτήματα που τίθενται στο πλαίσιο αυτών των διερευνήσεων αλλά και αυτών που ο διδάσκων ή οι ίδιοι οι μαθητές μπορούν να θέσουν είναι δυνατόν να αποτελέσουν ένα περιβάλλον απόκτησης και έκφρασης εμπειριών σχετικών με το θεώρημα της μέσης τιμής του ολοκληρωτικού διαγωνισμού και τη μέτρηση του εμβαδού χωρίου που ορίζεται από τις ευθείες $x=x_A$, $x=x_B$, και δυο συναρτήσεις ή την μεταβολή του εμβαδού του χωρίου που ορίζεται από δυο συναρτήσεις ή μια συνάρτηση και την εφαπτομένη της σε ένα σημείο. Τα εργαλεία που έχουν ενσωματωθεί στους μικρόκοσμους δίνουν την δυνατότητα στους μαθητές,

- να κάνουν πειράματα με τον προσδιορισμό της μεταβολής του εμβαδού χωρίου που ορίζεται από δυο συναρτήσεις,
- να διερευνήσουν πόσες και ποιες τιμές της συνάρτησης ορίζουν ορθογώνιο με βάση ίση με το διάστημα των $x=x_A$, $x=x_B$ που ορίζουν το χωρίο ώστε να έχει εμβαδόν ίσο με αυτό του χωρίου,
- να παρατηρούν και να ερμηνεύουν τα αποτελέσματα των χειρισμών τους,
- να εκφράζουν εικασίες, να κάνουν γενικεύσεις, να διατυπώνουν υποθέσεις και θεωρήματα και να τα εκφράζουν με μαθηματικούς όρους,

Ακόμα, μπορούν να επεμβαίνουν και να επαναπροσδιορίζουν τις δυνατότητες των εργαλείων ή να επαναδιατυπώνουν τον τρόπο ορισμού των αντικειμένων και να μεταβάλλουν την εμφάνισή τους. Από αυτή την άποψη οι μικρόκοσμοι είναι επαναχρησιμοποιήσιμοι και δίνουν τη δυνατότητα στους χρήστες να διατυπώνουν και νέα ερωτήματα που αφορούν ιδιαίτερες γνωστικές πτυχές των μαθηματικών αντικειμένων.

ΠΟΡΕΙΑ ΤΗΣ ΕΦΑΡΜΟΓΗΣ ΤΟΥ ΣΕΝΑΡΙΟΥ

Το σενάριο αποτελείται από τέσσερις εργασίες. Στην πρώτη οι μαθητές διαπραγματεύονται το θεώρημα της μέσης τιμής του ολοκληρωτικού λογισμού. Στη δεύτερη οι μαθητές διαπραγματεύονται την εύρεση του εμβαδού χωρίου που ορίζεται

από τις ευθείες $x=x_A$, $x=x_B$ και δυο πολυωνυμικές συναρτήσεις. Στην τρίτη οι μαθητές διαπραγματεύονται την εύρεση της μεταβολής του εμβαδού χωρίου που ορίζεται από τις ευθείες $x=x_A$, $x=x_B$, μια τριγωνομετρική συνάρτηση και μια εκθετική συνάρτηση. Στην τέταρτη οι μαθητές διαπραγματεύονται την εύρεση της μεταβολής του εμβαδού χωρίου που ορίζεται από μια άρρητη συνάρτηση και την εφαπτομένη αυτής σε ένα σημείο.

Η εμπλοκή των μαθητών με κάθε μια δραστηριότητα αναμένεται να αναδείξει:

- Την δυνατότητα προσέγγισης και έκφρασης της μεταβολής του εμβαδού χωρίου μεταξύ συναρτήσεων.
- Την προσέγγιση του εμβαδού χωρίου που ορίζεται από μια συνάρτηση, τον άξονα xx' και τις ευθείες $x=x_A$, $x=x_B$ με το εμβαδόν ενός ορθογωνίου.

Ο εκπαιδευτικός μπορεί να ζητά από τους μαθητές να επαληθεύουν αλγεβρικά τα συμπεράσματά τους σε κάθε περίπτωση.

ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

Εργασία	Περιγραφή	Τμήμα εφαρμογής	Περιεχόμενο
Εργασία 1	Το θεώρημα της μέσης τιμής ολοκληρωτικού λογισμού	ΚΑΤ/ΣΕΙΣ	Διερευνήσεις σχετικές με την έννοια της μέσης τιμής του εμβαδού χωρίου και την αναπαράσταση αυτής με το εμβαδόν ενός ορθογωνίου.
Εργασία 2	Το εμβαδόν χωρίου μεταξύ δυο συναρτήσεων.	ΚΑΤ/ΣΕΙΣ	Διερευνήσεις σχετικές με τον ορισμό και τον υπολογισμό του εμβαδού χωρίου που ορίζεται από δυο πολυωνυμικές συναρτήσεις.
Εργασία 3	Η συνάρτηση του εμβαδού χωρίου μεταξύ δυο συναρτήσεων.	ΚΑΤ/ΣΕΙΣ	Διερευνήσεις σχετικές με τον ορισμό και τον υπολογισμό του εμβαδού χωρίου που ορίζεται από δυο συναρτήσεις, μια τριγωνομετρική και μια εκθετική.
Εργασία 4	Το εμβαδόν χωρίου που ορίζει μια συνάρτηση και η εφαπτομένη της σε ένα σημείο.	ΚΑΤ/ΣΕΙΣ	Διερευνήσεις σχετικές με τον ορισμό και τον υπολογισμό του εμβαδού χωρίου που ορίζεται από μια συνάρτηση και την εφαπτομένη της σε ένα σημείο.

6.2.12 Θέμα 1: Η μέτρηση του εμβαδού χωρίου κάτω από πολυωνυμική συνάρτηση

Στην επιφάνεια εργασίας του παρακάτω μικρόκοσμου έχει σχεδιαστεί η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=2\sqrt{x}$ και οι ευθείες $x=x_A$ και $x=x_B$ που διέρχονται από τα σημεία A και B. Επίσης εμφανίζεται το εμβαδόν του χωρίου που προσδιορίζεται από τις ευθείες $x=x_A$, $x=x_B$, την καμπύλη της $y=f(x)$ και τον άξονα $\chi\chi'$. Ο δείκτης β ενός μεταβολέα επιτρέπει να ορίζεται ένα ορθογώνιο με βάση AB αυτήν του χωρίου και ύψος το τμήμα ΓΔ. Ερευνήστε για τη σχέση του εμβαδού του ορθογωνίου και του εμβαδού του χωρίου.

ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΕΙΣ

1. Επιλέξτε οι ευθείες που ορίζουν το χωρίο να είναι οι $x=0$ και $x=4$. Μπορείτε να υπολογίσετε τότε το εμβαδόν του ορθογωνίου και το εμβαδόν του χωρίου είναι ίσα;
Μπορείτε να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά την απάντησή σας;
2. Επιλέξτε οι ευθείες που ορίζουν το χωρίο να είναι οι $x=1$ και $x=6$. Μπορείτε να υπολογίσετε τότε το εμβαδόν του ορθογωνίου και το εμβαδόν του χωρίου είναι ίσα; Μπορείτε να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά την απάντησή σας;
3. Επιλέξτε με την εντολή «Επαναπροσδιορισμός» ο τύπος της συνάρτησης να είναι $f(x)=2\sqrt{\text{abs}(x)}$ και οι ευθείες που το ορίζουν το χωρίο μνα είναι οι $x=-1$ και $x=3$. Μπορείτε να υπολογίσετε τότε το εμβαδόν του ορθογωνίου και το εμβαδόν του χωρίου είναι ίσα;
Μπορείτε να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά την απάντησή σας;
4. Μπορείτε να επαναλάβετε τις προηγούμενες διερευνήσεις ορίζοντας και άλλες τιμές για τις ευθείες $x=x_A$ και $x=x_B$. Μπορείτε να διατυπώσετε ένα κανόνα για τον υπολογισμό της θέσης του τμήματος ΓΔ ώστε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από τις δυο ευθείες, τον άξονα $\chi\chi'$ και την συνάρτηση $f(x)$ να είναι ίσο με το εμβαδόν του ορθογωνίου;

ΟΔΗΓΙΕΣ ΠΡΟΣ ΤΟΝ ΔΙΔΑΣΚΟΝΤΑ

Για τη διαχείριση των εργαλείων του μικρόκοσμου

Ζητήστε από τους μαθητές:

- Να μετακινούν τους δείκτες των μεταβολέων για να ορίσουν την συνάρτηση $f(x)$.
- Να μετακινούν τον δείκτη του μεταβολέα β για να ορίσουν το ορθογώνιο με το οποίο θα προσεγγίσουν το εμβαδόν του χωρίου.
- Να χρησιμοποιούν την εντολή “Δείξτε το αντικείμενο” για να εμφανίσουν ή να κρύψουν το κάτω ή το πάνω εμβαδόν του χωρίου.
- Να χρησιμοποιούν την εντολή “Ιδιότητες” για να επαναπροσδιορίζουν τα χαρακτηριστικά των αντικειμένων της επιφάνειας εργασίας.

Για τις διερευνήσεις

Ζητήστε από τους μαθητές να παρατηρούν, να προβλέπουν, να ελέγχουν και να εκφράζουν στην ομάδα τους και στην τάξη:

- Για το γράφημα:
 - ✓ Τη μορφή του γραφήματος της συνάρτησης $f(x)$.
 - ✓ Το σχήμα που δημιουργεί η τιμή του μεταβολέα β .
- Για την αλγεβρική διαπραγμάτευση:
 - ✓ Καταγράφουν τις τιμές των συντεταγμένων των Γ και Δ .
 - ✓ Καταγράφουν τις τιμές του εμβαδού του χωρίου που ορίζεται από την $f(x)$ και του ορθογωνίου που ορίζεται από τον μεταβολέα β .

Για τις απαντήσεις

Ζητήστε από τους μαθητές να εκφράσουν στην τάξη τις απαντήσεις τους. Είναι πιθανόν οι μαθητές να δώσουν απαντήσεις όπως οι παρακάτω:

Διερεύνηση 1

Οι μαθητές διαπραγματεύονται τον ορισμό του ορθογωνίου ώστε το εμβαδόν του να ταυτίζεται με το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την $y=f(x)$ και τις ευθείες $x=x_A$ και $x=x_B$. Αναμένεται να κάνουν τις εξής ενέργειες:

(1) Να επιλέξουν τις θέσεις των σημείων A και B . (2) Επιλέγουν την θέση του δείκτη του μεταβολέα. (3) Να παρατηρούν τις τιμές των εμβαδών του χωρίου και του ορθογωνίου. Αναμένεται να παρατηρήσουν ότι σε κάθε θέση των A και B υπάρχει μια τιμή για το β ώστε τα δυο εμβαδά να ταυτίζονται. Αναμένεται να βρουν ότι αυτό γίνεται όταν η τιμή του β γίνει 2,67. Στην περίπτωση αυτή το σημείο Γ έχει συντεταγμένες (1,78, 0). Ο εκπαιδευτικός πρέπει να ζητήσει από τους μαθητές να ελέγξουν και αλγεβρικά τις παρατηρήσεις τους.

Διερεύνηση 2

Οι μαθητές αναμένεται να βρουν ότι η ζητούμενη τιμή για το β είναι 3,65 και ότι οι συντεταγμένες του Γ είναι (3,33, 0) περίπου. Η αλγεβρική λύση θα δώσει ακριβές αποτέλεσμα.

Διερεύνηση 3

Οι μαθητές αναμένεται να βρουν ότι η ζητούμενη τιμή για το β είναι περίπου 2,99 και ότι οι συντεταγμένες του Γ είναι (2,33, 0) περίπου. Η αλγεβρική λύση θα δώσει ακριβές αποτέλεσμα.

Διερεύνηση 4

Οι μαθητές αναμένεται να κάνουν παρατηρήσεις ανάλογες με αυτές που έκαναν στις προηγούμενες διερευνήσεις και να διατυπώσουν τον κανόνα, σε κάθε περίπτωση υπάρχει σημείο Γ ανάμεσα στα A και B έτσι ώστε το εμβαδόν του ορθογωνίου με βάση την AB και ύψος το $\Gamma\Delta$ είναι ίσο με το εμβαδόν του χωρίου.

6.2.13 Θέμα 2: Το εμβαδόν χωρίου μεταξύ δυο συναρτήσεων.

Στην επιφάνεια εργασίας του παρακάτω μικρόκοσμου έχουν σχεδιαστεί οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)=0.4 \cdot x^2+3$ και $g(x)=0.4 \cdot x^2+1$ καθώς και οι ευθείες $x=x_A$ και $x=x_B$ που διέρχονται από τα σημεία A και B. Με την χρήση του μεταβολέα n μπορείτε να χωρίζετε το χωρίο που προσδιορίζεται από τις ευθείες $x=x_A$, $x=x_B$ και τις γραφικές παραστάσεις των δυο συναρτήσεων $y=f(x)$ και $y=g(x)$. Με τη βοήθεια ενός μεταβολέα n μπορούμε να χωρίσουμε το χωρίο σε ορθογώνια ίσου πλάτους. Ερευνήστε πότε το άθροισμα των εμβαδών των ορθογωνίων προσεγγίζει ικανοποιητικά το εμβαδόν του χωρίου.

ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΕΙΣ

1. Μπορείτε να υπολογίσετε με ικανοποιητική προσέγγιση το εμβαδόν του χωρίου όταν οι ευθείες που το ορίζουν είναι οι $x=0$ και $x=2$; Μπορείτε να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά την απάντησή σας;
2. Μπορείτε να υπολογίσετε με ικανοποιητική προσέγγιση το εμβαδόν του χωρίου όταν οι ευθείες που το ορίζουν είναι οι $x=1$ και $x=4$; Μπορείτε να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά την απάντησή σας;
3. Με το ποντίκι σας μετακινήστε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων ώστε οι κορυφές τους να είναι για την $f(x)$ το σημείο (0,4) και για την $g(x)$ το σημείο (0,2). Μπορείτε να προσδιορίσετε το πλήθος των ορθογωνίων που πρέπει να χωριστεί το χωρίο ώστε το εμβαδόν του χωρίου να προσεγγίζεται με ικανοποιητική ακρίβεια; Μπορείτε να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά την απάντησή σας;
4. Μπορείτε να επαναλάβετε τις προηγούμενες διερευνήσεις μετασχηματίζοντας είτε με το ποντίκι σας είτε με την εντολή «Επαναπροσδιορισμός» τις καμπύλες των δυο συναρτήσεων. Προσδιορίστε το εμβαδόν του χωρίου μετακινώντας τα σημεία A και B σε διάφορες θέσεις. Μπορείτε να διατυπώσετε ένα κανόνα σχετικό με τον υπολογισμό του εμβαδού του χωρίου; Μπορείτε να επιβεβαιώσετε και αλγεβρικά τις απαντήσεις σας;

ΟΔΗΓΙΕΣ ΠΡΟΣ ΤΟΝ ΔΙΔΑΣΚΟΝΤΑ

Για τη διαχείριση των εργαλείων του μικρόκοσμου

Ζητήστε από τους μαθητές:

- Να μετακινούν τους δείκτες των μεταβολέων για να ορίσουν τις δυο συναρτήσεις $f(x)$ και $g(x)$.
- Να μετακινούν τα σημεία A και B για να ορίζουν τις ευθείες $x=x_A$ και $x=x_B$.
- Να μετακινούν τον δείκτη του μεταβολέα n.
- Να χρησιμοποιούν την εντολή “Δείξτε το αντικείμενο” για να εμφανίσουν ή να κρύψουν το κάτω ή το πάνω εμβαδόν του χωρίου.
- Να χρησιμοποιούν την εντολή “Ιδιότητες” για να επαναπροσδιορίζουν τα χαρακτηριστικά των αντικειμένων της επιφάνειας εργασίας.

Για τις διερευνήσεις

Ζητήστε από τους μαθητές να παρατηρούν, να προβλέπουν, να ελέγχουν και να εκφράζουν στην ομάδα τους και στην τάξη:

- Για το γράφημα:
 - ✓ Τη μορφή του γραφήματος της συνάρτησης $f(x)$ και της συνάρτησης $g(x)$.
 - ✓ Τη μορφή του σχήματος που δημιουργεί η τιμή του μεταβολέα n .
 - ✓ Τη μεταβολή του πλήθους των ορθογωνίων που ορίζεται από την μεταβολή του δείκτη n του μεταβολέα.
- Για την αλγεβρική διαπραγμάτευση:
 - ✓ Καταγράφουν τις τιμές των x_A και x_B .
 - ✓ Καταγράφουν τις τιμές του εμβαδού που ορίζεται με την δημιουργία των ορθογωνίων που χωρίζουν το χωρίο.
 - ✓ Καταγράφουν τη διαφορά των τιμών των πάνω και κάτω εμβαδών τα οποία προσεγγίζουν το εμβαδόν του χωρίου.

Για τις απαντήσεις

Ζητήστε από τους μαθητές να εκφράσουν στην τάξη τις απαντήσεις τους. Είναι πιθανόν οι μαθητές να δώσουν απαντήσεις όπως οι παρακάτω:

Διερεύνηση 1

Οι μαθητές διαπραγματεύονται την εύρεση του εμβαδού του χωρίου με την μέτρηση των εμβαδών των ορθογωνίων που υπολείπονται ή υπερέχουν του χωρίου. Αναμένεται να κάνουν τις εξής ενέργειες:

(1) Να επιλέξουν τις θέσεις των σημείων A και B. (2) Να επιλέξουν την εμφάνιση των ορθογωνίων που υπολείπονται του χωρίου και στη συνέχεια αυτών που υπερέχουν. (3) Να μετακινούν τον δείκτη n του μεταβολέα αυξάνοντας ανά ένα τις τιμές του. (4) Να παρατηρούν τις τιμές των εμβαδών «Άνω άθροισμα», «Κάτω άθροισμα» και τη «Διαφορά των δυο αθροισμάτων» για κάθε συνάρτηση. Αναμένεται να παρατηρήσουν ότι καθώς αυξάνουν τις τιμές του μεταβολέα η διαφορά των δυο εμβαδών και στις δυο περιπτώσεις τείνει στο 0. Αναμένεται να βρουν ότι οι δυο διαφορές είναι ίσες με 4 μονάδες που είναι και το εμβαδόν του χωρίου. Ο εκπαιδευτικός πρέπει να ζητήσει από τους μαθητές να ελέγξουν και αλγεβρικά τις παρατηρήσεις τους.

Διερεύνηση 2

Αναμένεται να βρουν ότι οι δυο διαφορές είναι ίσες με 5,99 μονάδες που είναι και το εμβαδόν του χωρίου. Ο εκπαιδευτικός πρέπει να ζητήσει από τους μαθητές να ελέγξουν και αλγεβρικά τις παρατηρήσεις τους.

Διερεύνηση 3

Αναμένεται να βρουν ότι οι δυο διαφορές είναι πάλι ίσες με 5,99 μονάδες που είναι και το εμβαδόν του χωρίου. Ο εκπαιδευτικός πρέπει να ζητήσει από τους μαθητές να ελέγξουν και αλγεβρικά τις παρατηρήσεις τους.

Διερεύνηση 4

Οι μαθητές αναμένεται να κάνουν παρατηρήσεις ανάλογες με αυτές που έκαναν στις προηγούμενες διερευνήσεις. Επίσης, αναμένεται να διαπιστώσουν ότι το εμβαδόν προκύπτει από την διαφορά των εμβαδών των χωρίων που ορίζει κάθε συνάρτηση.

6.2.14 Θέμα 3: Η συνάρτηση του εμβαδού χωρίου μεταξύ δυο συναρτήσεων.

Στην επιφάνεια εργασίας του παρακάτω μικρόκοσμου έχει σχεδιαστεί η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\sin(x)$, η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x)=\exp(x)$ και το χωρίο που ορίζουν οι δυο συναρτήσεις μαζί με τις ευθείες $x=x_A$ και $x=x_B$ που διέρχονται από τα σημεία A και B. Το σημείο M ορίζεται από την τετμημένη του B και την απόλυτη τιμή του εμβαδού του χωρίου. Ερευνήστε τον τρόπο μεταβολής του εμβαδού του χωρίου καθώς μεταβάλλετε τη θέση του σημείου B.

ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΕΙΣ

1. Πώς μεταβάλλεται το εμβαδόν του χωρίου όταν το σημείο A είναι στη θέση (0, 0); Μπορείτε να επιλέξετε κατάλληλη συνάρτηση στη θέση της $g(x)$ ώστε να αντιστοιχεί στη μεταβολή του εμβαδού; Μπορείτε να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά την απάντησή σας;
2. Πώς μεταβάλλεται το εμβαδόν του χωρίου όταν το σημείο A είναι στη θέση $(-2\pi, 0)$; Μπορείτε να επιλέξετε κατάλληλη συνάρτηση στη θέση της $h(x)$ ώστε να αντιστοιχεί στη μεταβολή του εμβαδού; Μπορείτε να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά την απάντησή σας;
3. Με την εντολή «Επαναπροσδιορισμός» επαναδιατυπώστε την συνάρτηση $f(x)$ στην $f(x)=2*\exp(-x)$. Πώς μεταβάλλεται το εμβαδόν του χωρίου όταν το σημείο A είναι στη θέση (0, 0); Μπορείτε να επιλέξετε κατάλληλη συνάρτηση στη θέση της $h(x)$ ώστε να αντιστοιχεί στη μεταβολή του εμβαδού; Μπορείτε να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά την απάντησή σας;
4. Μπορείτε να επαναλάβετε τις προηγούμενες διερευνήσεις μετασχηματίζοντας είτε με το ποντίκι σας είτε με την εντολή «Επαναπροσδιορισμός» τις καμπύλες των δυο συναρτήσεων. Προσδιορίστε το εμβαδόν του χωρίου μετακινώντας τα σημεία A και B σε διάφορες θέσεις. Μπορείτε να επιλέξετε κατάλληλη συνάρτηση στη θέση της $g(x)$ ώστε να αντιστοιχεί στη μεταβολή του εμβαδού; Μπορείτε να διατυπώσετε ένα κανόνα σχετικό με τον τρόπο μεταβολής του εμβαδού του χωρίου; Μπορείτε να επιβεβαιώσετε και αλγεβρικά τις απαντήσεις σας;

ΟΔΗΓΙΕΣ ΠΡΟΣ ΤΟΝ ΔΙΔΑΣΚΟΝΤΑ

Για τη διαχείριση των εργαλείων του μικρόκοσμου

Ζητήστε από τους μαθητές:

- Να μετακινούν τους δείκτες των μεταβολών για να ορίσουν τις συναρτήσεις $f(x)$, $g(x)$ και $h(x)$.
- Να μετακινούν τα σημεία A και B για να ορίζουν τις ευθείες $x=x_A$ και $x=x_B$.
- Να μετακινούν τους δείκτες των μεταβολών α , β , γ προκειμένου να ορίσουν την συνάρτηση $g(x)$.
- Να χρησιμοποιούν την εντολή “Δείξτε το αντικείμενο” για να εμφανίσουν ή να κρύψουν το κάτω ή το πάνω εμβαδόν του χωρίου.

- Να χρησιμοποιούν την εντολή “Ιδιότητες” για να επαναπροσδιορίζουν τα χαρακτηριστικά των αντικειμένων της επιφάνειας εργασίας.

Για τις διερευνήσεις

Ζητήστε από τους μαθητές να παρατηρούν, να προβλέπουν, να ελέγχουν και να εκφράζουν στην ομάδα τους και στην τάξη:

- Για το γράφημα:
 - ✓ Τη μορφή του γραφήματος της συνάρτησης $f(x)$, της $g(x)$ και της $h(x)$.
 - ✓ Την γραμμή που γράφει το σημείο M .
 - ✓ Τη μορφή του σχήματος που δημιουργεί από τις τιμές των α , β και γ .
- Για την αλγεβρική διαπραγμάτευση:
 - ✓ Καταγράφουν τις τιμές των x_A και x_B .
 - ✓ Καταγράφουν τις τιμές του εμβαδού του ορίζεται με την θέση των x_A και x_B .
 - ✓ Καταγράφουν την εξίσωση της συνάρτησης στην οποία ανήκει το σημείο M .

Για τις απαντήσεις

Ζητήστε από τους μαθητές να εκφράσουν στην τάξη τις απαντήσεις τους. Είναι πιθανόν οι μαθητές να δώσουν απαντήσεις όπως οι παρακάτω:

Διερεύνηση 1

Οι μαθητές διαπραγματεύονται την εύρεση του εμβαδού του χωρίου με την μέτρηση των εμβαδών των ορθογωνίων που υπολείπονται ή υπερέχουν του χωρίου. Αναμένεται να κάνουν τις εξής ενέργειες:

(1) Να επιλέξουν τις θέσεις των σημείων A και B . (2) Να μετακινούν το σημείο B . (4) Να παρατηρούν τη μορφή της καμπύλης που γράφει το M . (6) Να επιλέγουν τις τιμές για τους συντελεστές της συνάρτησης $h(x)$ ώστε το M να ανήκει στην $h(x)$. Αναμένεται να παρατηρήσουν ότι καθώς μετακινούν το σημείο B το M ανήκει στην συνάρτηση $h(x)=\sin(x)+e^x-2$. Ο εκπαιδευτικός πρέπει να ζητήσει από τους μαθητές να ελέγξουν και αλγεβρικά τις παρατηρήσεις τους.

Διερεύνηση 2

Οι μαθητές αναμένεται να βρουν ότι το σημείο M ανήκει στην ίδια συνάρτηση $h(x)=\sin(x)+e^x-2$.

Διερεύνηση 3

Οι μαθητές αναμένεται να βρουν ότι το σημείο M ανήκει στην συνάρτηση $h(x)=1+\sin(x)-2e^{(-x)}$.

Διερεύνηση 4

Οι μαθητές αναμένεται να κάνουν παρατηρήσεις ανάλογες με αυτές που έκαναν στις προηγούμενες διερευνήσεις. Επίσης, ότι το M ανήκει σε συνάρτηση που προσδιορίζεται από την απόλυτη τιμή της διαφοράς των αρχικών συναρτήσεων των $f(x)$ και $g(x)$.

6.2.15 Θέμα 4: Η συνάρτηση του εμβαδού χωρίου που ορίζουν άρρητες συναρτήσεις.

Στην επιφάνεια εργασίας του παρακάτω μικρόκοσμου έχει σχεδιαστεί η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=2\sqrt{x}$, η ευθεία $x=x_B$ που διέρχεται από το σημείο Γ της γραφικής παράστασης της συνάρτησης και η εφαπτομένη της $f(x)$ στο σημείο Γ . Ένα σημείο M ορίζεται με συντεταγμένες την τετμημένη του B και τεταγμένη το εμβαδόν του χωρίου που ορίζουν η $f(x)$, η εφαπτομένη στο Γ και ο άξονας $\psi\psi'$.

Ερευνήστε τον τρόπο μεταβολής του εμβαδού του χωρίου καθώς μεταβάλλεται το σημείο M .

ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΕΙΣ

1. Επιλέξτε το σημείο B να είναι στη θέση $(4, 0)$. Μπορείτε να επιβεβαιώσετε και αλγεβρικά την εξίσωση της εφαπτομένης στο Γ ;
Μπορείτε να επιβεβαιώσετε και αλγεβρικά το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)$, τον άξονα $\psi\psi'$ και την εφαπτομένη της $f(x)$ στο σημείο Γ ;
2. Μετακινήστε το σημείο B . Πώς μεταβάλλεται το εμβαδόν του χωρίου καθώς μετακινείτε το σημείο B ; Μπορείτε να επιλέξετε κατάλληλη συνάρτηση στη θέση της $h(x)$ ώστε να αντιστοιχεί στη μεταβολή του εμβαδού; Μπορείτε να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά την απάντησή σας;
3. Επιλέξτε η συνάρτηση $f(x)$ να έχει τύπο $f(x)=2\sqrt{\text{abs}(x)}$. Πώς μεταβάλλεται το εμβαδόν του χωρίου καθώς μετακινείτε το σημείο M ; Μπορείτε να επιλέξετε κατάλληλη συνάρτηση στη θέση της $h(x)$ ώστε να αντιστοιχεί στη μεταβολή του εμβαδού; Μπορείτε να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά την απάντησή σας;
4. Επιλέξτε η συνάρτηση $f(x)$ να έχει τύπο $f(x)=x^{3/2}$. Πώς μεταβάλλεται το εμβαδόν του χωρίου καθώς μετακινείτε το σημείο M ; Μπορείτε να επιλέξετε κατάλληλη συνάρτηση στη θέση της $h(x)$ ώστε να αντιστοιχεί στη μεταβολή του εμβαδού; Μπορείτε να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά την απάντησή σας;

ΟΔΗΓΙΕΣ ΠΡΟΣ ΤΟΝ ΔΙΔΑΣΚΟΝΤΑ

Για τη διαχείριση των εργαλείων του μικρόκοσμου

Ζητήστε από τους μαθητές:

- Να μετακινούν τους δείκτες των μεταβολών για να ορίσουν τις συναρτήσεις $f(x)$ και $h(x)$.
- Να μετακινούν το σημείο B για να ορίζουν της ευθείας $x=x_B$ καθώς και το σημείο Γ .
- Να μετακινούν τους δείκτες των μεταβολών α , β , γ προκειμένου να ορίσουν την συνάρτηση $h(x)$.
- Να χρησιμοποιούν την εντολή “Δείξτε το αντικείμενο” για να εμφανίσει ή να κρύψουν το κάτω ή το πάνω εμβαδόν του χωρίου.

- Να χρησιμοποιούν την εντολή “Ιδιότητες” για να επαναπροσδιορίζουν τα χαρακτηριστικά των αντικειμένων της επιφάνειας εργασίας.

Για τις διερευνήσεις

Ζητήστε από τους μαθητές να παρατηρούν, να προβλέπουν, να ελέγχουν και να εκφράζουν στην ομάδα τους και στην τάξη:

- Για το γράφημα:
 - ✓ Τη μορφή του γραφήματος της συνάρτησης $f(x)$ και της $h(x)$.
 - ✓ Την κλίση της εφαπτομένης της $f(x)$ στο Γ .
 - ✓ Την γραμμή που γράφει το σημείο M .
 - ✓ Τη μορφή του γραφήματος της $h(x)$ που δημιουργεί από τις τιμές των α , β και γ .
- Για την αλγεβρική διαπραγμάτευση:
 - ✓ Καταγράφουν την εξίσωση της εφαπτομένης στο Γ .
 - ✓ Καταγράφουν τις τιμές του εμβαδού του ορίζεται με την θέση του B και της εφαπτομένης.
 - ✓ Καταγράφουν την εξίσωση της συνάρτησης $h(x)$ στην οποία ανήκει το σημείο M .

Για τις απαντήσεις

Ζητήστε από τους μαθητές να εκφράσουν στην τάξη τις απαντήσεις τους. Είναι πιθανόν οι μαθητές να δώσουν απαντήσεις όπως οι παρακάτω:

Διερεύνηση 1

Οι μαθητές διαπραγματεύονται την αλγεβρική εύρεση και επιβεβαίωση της εξίσωσης της εφαπτομένης και του εμβαδού του χωρίου που ορίζεται από την μετακίνηση του σημείου B . Αναμένεται να κάνουν βρουν την εξίσωση $y=0.5x+2$ και εμβαδόν $E=4/3$.

Διερεύνηση 2

Οι μαθητές αναμένεται (1) Να μετακινούν το σημείο B . (2) Να παρατηρούν τη μορφή της καμπύλης που γράφει το M . (3) Να επιλέγουν τις τιμές για τους συντελεστές της συνάρτησης $h(x)$ ώστε το M να ανήκει στην $h(x)$. Αναμένεται να παρατηρήσουν ότι καθώς μετακινούν το σημείο B το M ανήκει στην συνάρτηση $h(x) = \frac{1}{6}x\sqrt{x}$. Ο εκπαιδευτικός πρέπει να ζητήσει από τους μαθητές να ελέγξουν και αλγεβρικά τις παρατηρήσεις τους.

Διερεύνηση 3

Οι μαθητές αναμένεται να εργαστούν στη συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 2\sqrt{x}, & x \geq 0 \\ 2\sqrt{-x}, & x < 0 \end{cases}$ και να βρουν

εμβαδόν $E(x) = \begin{cases} \frac{1}{6}x\sqrt{x}, & x > 0 \\ \frac{1}{6}x\sqrt{-x}, & x < 0 \end{cases}$. Έτσι το σημείο M ανήκει στην συνάρτηση

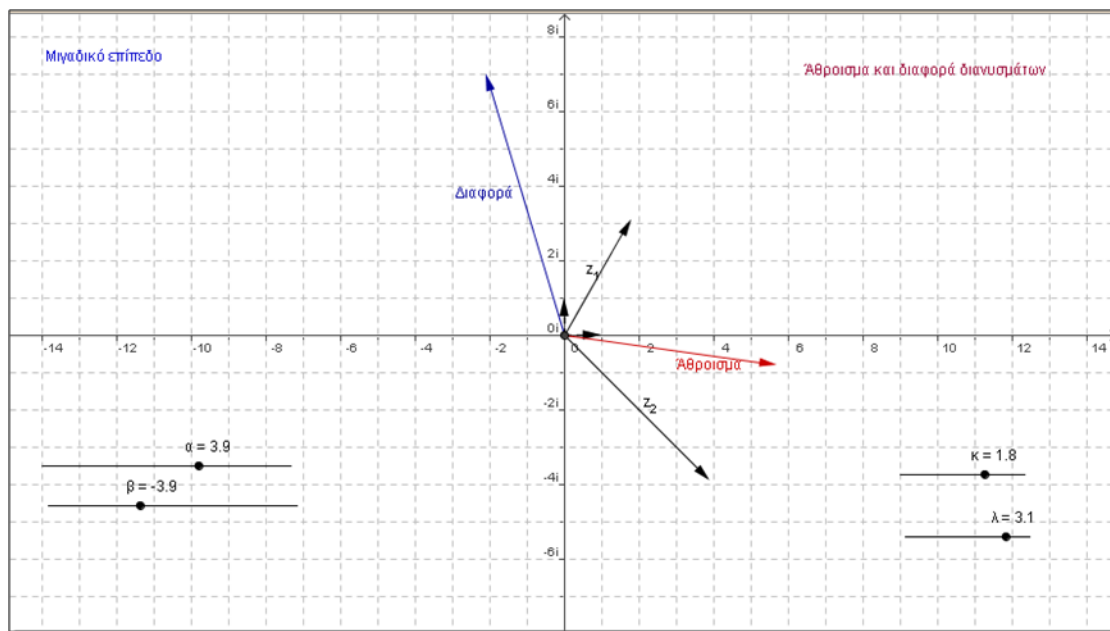
$$h(x) = \frac{1}{6}x\sqrt{|x|}.$$

Διερεύνηση 4

Οι μαθητές αναμένεται να εργαστούν στη συνάρτηση $f(x) = \sqrt[3]{x}, x \geq 0$ και να βρουν ότι το σημείο M ανήκει στην συνάρτηση $h(x) = \frac{1}{12}x\sqrt[3]{x}$

7 ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5 – Μιγαδικοί αριθμοί

7.1 ΣΕΝΑΡΙΟ 16 : Μιγαδικοί αριθμοί



7.1.1 Η κεντρική ιδέα του σεναρίου

Στο σενάριο αυτό οι μαθητές εμπλέκονται σε διερευνήσεις σχετικές με την έννοια των μιγαδικών αριθμών, με το σύνολο των μιγαδικών αριθμών, με το μιγαδικό επίπεδο καθώς και με τις πράξεις μεταξύ των μιγαδικών αριθμών και με τη σχέση των μέτρων τους και των μέτρων του αθροίσματος και της διαφοράς τους.

7.1.2 Στόχοι

- Να αποκτήσουν εμπειρίες σχετικές με την αναπαράσταση των μιγαδικών αριθμών στο μιγαδικό επίπεδο.
- Να αποκτήσουν εμπειρίες σχετικές με τη σχέση των μιγαδικών αριθμών και των μέτρων τους με τους συζυγείς τους.
- Να αποκτήσουν εμπειρίες σχετικές με τις πράξεις μεταξύ των μιγαδικών αριθμών.
- Να αποκτήσουν εμπειρίες σχετικές με τη σχέση των μέτρων του αθροίσματος και της διαφοράς των μιγαδικών αριθμών με το άθροισμα και τη διαφορά των μέτρων τους (τριγωνική ανισότητα).

7.1.3 Διδακτική πρόταση

ΟΡΓΑΝΩΣΗ ΤΗΣ ΤΑΞΗΣ

Οι δραστηριότητες αυτές ενδείκνυται να διδάσκονται στο εργαστήριο υπολογιστών και οι μαθητές να εργάζονται σε ομάδες 2-3 ατόμων με φύλλο εργασίας. Μπορούν όμως να διεξαχθούν και στην τάξη που διαθέτει μόνο έναν υπολογιστή με βιντεοπροβολέα. Σ' αυτή την περίπτωση οι μαθητές συμπληρώνουν τα φύλλα εργασίας με βάση τις παρατηρήσεις που κάνουν κατά την διερεύνηση που γίνεται απ' όλη την τάξη και κατευθύνεται από τον εκπαιδευτικό ή κάποιον μαθητή. Στο πλαίσιο αυτό κάνουν παρεμβάσεις στην διερεύνηση με τις οποίες εκφράζουν την δική τους στρατηγική στη διερεύνηση. Καθώς τέτοιες παρεμβάσεις μπορούν να γίνονται στην τάξη απ' όλους τους μαθητές ο διδάσκων πρέπει να τις υποστηρίζει και να επιδιώκει να συζητούνται όλες οι πιθανές στρατηγικές της διερεύνησης.

Σε κάθε περίπτωση ο εκπαιδευτικός πρέπει να έχει από πριν προετοιμάσει τον τρόπο που θα χειριστεί τις διαφορετικές στρατηγικές που πιθανόν να διατυπωθούν καθώς και τις πιθανές εκβάσεις τους.

Ακόμα πρέπει με τη στάση του να προκαλεί την εφαρμογή των διαφορετικών τρόπων διερεύνησης, να ενθαρρύνει κάθε μαθητή να δοκιμάζει τις ιδέες του, να εκφράζει τις εικασίες του και να διατυπώνει τα συμπεράσματά του ελεύθερα. Ακόμα πρέπει να ενθαρρύνει τους μαθητές να προσπαθούν να επαληθεύουν αλγεβρικά τα αποτελέσματα των διερευνήσεών τους.

ΟΙ ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΕΣ ΔΥΝΑΤΟΤΗΤΕΣ ΤΟΥ ΣΕΝΑΡΙΟΥ

Οι προτεινόμενες στο σενάριο δραστηριότητες αφορούν φαινόμενα τα οποία προκαλούνται από τη δράση των μαθητών σε προσχεδιασμένους υπολογιστικούς μικρόκοσμους με σκοπό την ανάδειξη των διερευνούμενων ιδιοτήτων τους. Έτσι οι απαντήσεις στα ερωτήματα που τίθενται στο πλαίσιο αυτών των διερευνήσεων αλλά και αυτών που ο διδάσκων ή οι ίδιοι οι μαθητές μπορούν να θέσουν είναι δυνατόν να αποτελέσουν ένα περιβάλλον απόκτησης και έκφρασης εμπειριών σχετικών με τους μιγαδικούς αριθμούς, τις πράξεις τους και τις σχέσεις των μέτρων τους με τα μέτρα του αθροίσματος και της διαφοράς τους. Τα εργαλεία που έχουν ενσωματωθεί στους μικρόκοσμους δίνουν τη δυνατότητα στους μαθητές,

- να κάνουν πειράματα με τον προσδιορισμό μιγαδικών αριθμών ώστε να πληρούν επιθυμητές ιδιότητες,
- να διερευνήσουν αν ιδιότητες των μιγαδικών αριθμών και των μέτρων τους ισχύουν γενικά για κάθε μιγαδικό αριθμό ή για μια κατηγορία αυτών,
- να παρατηρούν και να ερμηνεύουν τα αποτελέσματα των χειρισμών τους,
- να εκφράζουν εικασίες, να κάνουν γενικεύσεις, να διατυπώνουν υποθέσεις και θεωρήματα και να τα εκφράζουν με μαθηματικούς όρους,

Ακόμα, μπορούν να επεμβαίνουν και να επαναπροσδιορίζουν τις δυνατότητες των εργαλείων ή να επαναδιατυπώνουν τον τρόπο ορισμού των αντικειμένων και να μεταβάλλουν την εμφάνισή τους. Από αυτή την άποψη οι μικρόκοσμοι είναι επαναχρησιμοποιήσιμοι και δίνουν τη δυνατότητα στους χρήστες να διατυπώνουν και νέα ερωτήματα που αφορούν ιδιαίτερες γνωστικές πτυχές των μαθηματικών αντικειμένων.

ΠΟΡΕΙΑ ΤΗΣ ΕΦΑΡΜΟΓΗΣ ΤΟΥ ΣΕΝΑΡΙΟΥ

Το σενάριο αποτελείται από τέσσερις εργασίες. Στην πρώτη, οι μαθητές διαπραγματεύονται την αναπαράσταση των μιγαδικών αριθμών στο μιγαδικό επίπεδο καθώς των μιγαδικών αριθμών που προκύπτουν από τις συμμετρίες τους ως προς τους άξονες. Στη δεύτερη, οι μαθητές διαπραγματεύονται την εύρεση του αθροίσματος και της διαφοράς δυο μιγαδικών αριθμών μέσω της αναπαράστασής τους στο μιγαδικό επίπεδο. Στη τρίτη, οι μαθητές διαπραγματεύονται την εύρεση του γινομένου και του πηλίκου δυο μιγαδικών αριθμών μέσω της αναπαράστασής τους στο μιγαδικό επίπεδο. Στην τέταρτη, οι μαθητές διαπραγματεύονται τη σχέση που έχουν το άθροισμα και η διαφορά των μέτρων δυο μιγαδικών αριθμών με το μέτρο του αθροίσματος και της διαφοράς τους.

Η εμπλοκή των μαθητών με κάθε μια δραστηριότητα αναμένεται να αναδείξει:

- Την σχέση που έχει ένας μιγαδικός αριθμός με τον συζυγή του.
- Την σχέση που έχουν δυο μιγαδικοί αριθμοί σε σχέση με το άθροισμα, τη διαφορά, το γινόμενο και το πηλίκό τους
- Τη σχέση που έχουν τα μέτρα του αθροίσματος και της διαφοράς δυο μιγαδικών αριθμών με αυτή το άθροισμα και τη διαφορά των μέτρων τους.

Ο εκπαιδευτικός μπορεί να ζητά από τους μαθητές να επαληθεύουν αλγεβρικά τα συμπεράσματά τους σε κάθε περίπτωση.

ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

Εργασία	Περιγραφή	Τμήμα εφαρμογής	Περιεχόμενο
Εργασία 1	Οι μιγαδικοί αριθμοί και το μιγαδικό επίπεδο	ΚΑΤ/ΣΕΙΣ	Διερευνήσεις σχετικές με τον ορισμό των μιγαδικών αριθμών και του μιγαδικού επιπέδου.
Εργασία 2	Το άθροισμα και η διαφορά μιγαδικών αριθμών.	ΚΑΤ/ΣΕΙΣ	Διερευνήσεις σχετικές με το άθροισμα και τη διαφορά μιγαδικών αριθμών.
Εργασία 3	<i>Το γινόμενο και το πηλίκο δυο μιγαδικών αριθμών.</i>	ΚΑΤ/ΣΕΙΣ	Διερευνήσεις σχετικές με το γινόμενο και το πηλίκο των μιγαδικών αριθμών.
Εργασία 4	Η τριγωνική ανισότητα των μιγαδικών αριθμών	ΚΑΤ/ΣΕΙΣ	Διερευνήσεις σχετικές με την τριγωνική ανισότητα των μιγαδικών αριθμών.

7.1.4 Θέμα 1: Οι μιγαδικοί αριθμοί και το μιγαδικό επίπεδο

Στην επιφάνεια εργασίας έχει σχεδιαστεί ο μιγαδικός αριθμός z του οποίου το πραγματικό μέρος ορίζεται από τον μεταβολέα α και το φανταστικό από τον μεταβολέα β . Ακόμα, έχουν σχεδιαστεί οι μιγαδικοί αριθμοί που είναι συμμετρικοί ως προς τους δυο άξονες και το κέντρο του συστήματος. Διερευνήστε τα χαρακτηριστικά των τεσσάρων μιγαδικών αριθμούς καθώς μεταβάλλετε τους δείκτες των δυο μεταβολέων;

ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΕΙΣ

1. Τι αλλάζει στους μιγαδικούς αριθμούς όταν μεταβάλλετε τον κέρσορα του μεταβολέα που αντιστοιχεί στον συντελεστή α ;
2. Τι αλλάζει στους μιγαδικούς αριθμούς όταν μεταβάλλετε τον κέρσορα του μεταβολέα β ;
3. Τι αλλάζει στα μέτρα των μιγαδικών αριθμών όταν μεταβάλλετε τις τιμές στους δυο μεταβολείς; Υπάρχει κάποια σχέση μεταξύ των μέτρων των μιγαδικών αριθμών;
4. Ποια σχέση έχουν οι τέσσερις μιγαδικοί αριθμοί και τι σχέση έχουν τα μέτρα τους; Μπορείτε να αποδείξετε αλγεβρικά τις παρατηρήσεις σας;

ΟΔΗΓΙΕΣ ΠΡΟΣ ΤΟΝ ΔΙΔΑΣΚΟΝΤΑ

Για τη διαχείριση των εργαλείων του μικρόκοσμου

Ζητήστε από τους μαθητές:

- Να μετακινούν τους δείκτες των μεταβολέων για να ορίσουν τους μιγαδικούς αριθμούς.
- Να χρησιμοποιούν την εντολή “Ιδιότητες” για να επαναπροσδιορίζουν τα χαρακτηριστικά των αντικειμένων της επιφάνειας εργασίας.

Για τις διερευνήσεις

Ζητήστε από τους μαθητές να παρατηρούν, να προβλέπουν, να ελέγχουν και να εκφράζουν στην ομάδα τους και στην τάξη:

- Για το γράφημα:
 - ✓ Τη μορφή των τεσσάρων μιγαδικών αριθμών
 - ✓ Το σχήμα που δημιουργεί η τιμή των μεταβολέων α και β .
- Για την αλγεβρική διαπραγμάτευση:
 - ✓ Καταγράφουν με τη βοήθεια των τιμών των μεταβολέων τους τέσσερις μιγαδικούς αριθμούς.
 - ✓ Καταγράφουν την σχέση μεταξύ των τεσσάρων μιγαδικών αριθμών.

Για τις απαντήσεις

Ζητήστε από τους μαθητές να εκφράσουν στην τάξη τις απαντήσεις τους. Είναι πιθανόν οι μαθητές να δώσουν απαντήσεις όπως οι παρακάτω:

Διερεύνηση 1

Οι μαθητές διαπραγματεύονται τον ορισμό του μιγαδικού αριθμού και τον συνδέουν με τον ορισμό του διανύσματος στο αντίστοιχο καρτεσιανό επίπεδο. Αναμένεται να κάνουν τις εξής ενέργειες:

- (1) Επιλέγουν την θέση του δείκτη του μεταβολέα ώστε να έχει συγκεκριμένες τιμές.
- (2) Να παρατηρούν τις τιμές των συντεταγμένων των τεσσάρων σημείων M , M_1 , M_2 και M_3 . Αναμένεται να παρατηρήσουν ότι σε κάθε θέση των δεικτών των μεταβολέων τα τέσσερα σημεία που ανά δυο είναι συμμετρικά ως προς τους άξονες και ορίζουν μιγαδικούς αριθμούς που ο ένας είναι συζυγής του z και ο άλλος του $-z$. Ο εκπαιδευτικός πρέπει να ζητήσει από τους μαθητές να ελέγξουν και αλγεβρικά τις παρατηρήσεις τους.

Διερεύνηση 2

Οι μαθητές αναμένεται να παρατηρήσουν ότι καθώς μεταβάλλουν τον κέρσορα του μεταβολέα β μεταβάλλονται τα φανταστικά μέρη των μιγαδικών αριθμών.

Διερεύνηση 3

Οι μαθητές αναμένεται να απαντήσουν ότι τα μέτρα των τεσσάρων μιγαδικών αριθμών είναι πάντοτε ίσα και αυτό οφείλεται στη συμμετρία των τεσσάρων σημείων.

Διερεύνηση 4

Οι μαθητές αναμένεται να χρησιμοποιήσουν το Πυθαγόρειο θεώρημα για να υπολογίσουν τα μέτρα και των τεσσάρων μιγαδικών αριθμών και να διαπιστώσουν ότι αυτά είναι ίσα.

7.1.5 Θέμα 2: Το άθροισμα και η διαφορά μιγαδικών αριθμών

Στην επιφάνεια εργασίας έχουν σχεδιαστεί δυο μιγαδικοί αριθμοί z_1 και z_2 καθώς και το άθροισμα και η διαφορά αυτών. Διερευνήστε το άθροισμα και τη διαφορά των μιγαδικών αριθμών καθώς μεταβάλετε τους z_1 και z_2 .

ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΕΙΣ

1. Επιλέξτε τους μιγαδικούς αριθμούς z_1 και z_2 ώστε το άθροισμα τους να είναι ο μιγαδικός $2+3i$ και η διαφορά τους $4-i$;
2. Πώς πρέπει να ορίσετε τους z_1 και z_2 ώστε το άθροισμα τους να είναι πραγματικός αριθμός; Σε ποια περίπτωση και η διαφορά τους είναι φανταστικός αριθμός;
3. Πώς πρέπει να ορίσετε τους z_1 και z_2 ώστε η διαφορά να είναι πραγματικός αριθμός; Σε ποιά περίπτωση το άθροισμα τους είναι φανταστικός αριθμός;
4. Ποια σχέση έχει το άθροισμα και η διαφορά των μιγαδικών αριθμών όταν ο z_1 είναι πραγματικός και ο z_2 είναι φανταστικό αριθμός; Τι γωνία σχηματίζουν το άθροισμα και η διαφορά τους;

ΟΔΗΓΙΕΣ ΠΡΟΣ ΤΟΝ ΔΙΔΑΣΚΟΝΤΑ

Για τη διαχείριση των εργαλείων του μικρόκοσμου

Ζητήστε από τους μαθητές:

- Να μετακινούν τους δείκτες των μεταβολών για να ορίσουν τους μιγαδικούς αριθμούς z_1 και z_2 , το άθροισμά τους και τη διαφορά τους.
- Να χρησιμοποιούν την εντολή “Ιδιότητες” για να επαναπροσδιορίζουν τα χαρακτηριστικά των αντικειμένων της επιφάνειας εργασίας.

Για τις διερευνήσεις

Ζητήστε από τους μαθητές να παρατηρούν, να προβλέπουν, να ελέγχουν και να εκφράζουν στην ομάδα τους και στην τάξη:

- Για το γράφημα:
 - ✓ Τη μορφή των δυο μιγαδικών αριθμών
 - ✓ Τη μορφή του αθροίσματος και της διαφοράς τους.
- Για την αλγεβρική διαπραγμάτευση:
 - ✓ Καταγράφουν με τη βοήθεια των τιμών των μεταβολών τους δυο μιγαδικούς αριθμούς.
 - ✓ Καταγράφουν το άθροισμα και τη διαφορά των δυο μιγαδικών αριθμών.

Για τις απαντήσεις

Ζητήστε από τους μαθητές να εκφράσουν στην τάξη τις απαντήσεις τους. Είναι πιθανόν οι μαθητές να δώσουν απαντήσεις όπως οι παρακάτω:

Διερεύνηση 1

Οι μαθητές διαπραγματεύονται τον ορισμό του μιγαδικού αριθμού και τον συνδέουν με τον ορισμό του διανύσματος στο αντίστοιχο καρτεσιανό επίπεδο. Αναμένεται να κάνουν τις εξής ενέργειες:

(1) Επιλέγουν την θέση του δείκτη του μεταβολέα ώστε το άθροισμα και η διαφορά των δυο μιγαδικών αριθμών να είναι ίσοι με τους ζητούμενους. Αναμένεται να βρουν ότι οι τιμές των μεταβολέων είναι $\alpha=3$, $\beta=1$, $\kappa=1$ και $\lambda=2$. Ο εκπαιδευτικός πρέπει να ζητήσει από τους μαθητές να ελέγξουν και αλγεβρικά τις παρατηρήσεις τους.

Διερεύνηση 2

Αρκεί το διάνυσμα του αθροίσματος να ανήκει στον άξονα των πραγματικών αριθμών. Και αυτό γίνεται όταν οι τιμές των μεταβολέων β και λ είναι αντίθετες (όταν οι μιγαδικοί αριθμοί είναι συζυγείς). Για να είναι και η διαφορά φανταστικός αριθμός αρκεί και οι τιμές των πραγματικών αριθμών να είναι ίσες.

Διερεύνηση 3

Οι μαθητές αναμένεται να απαντήσουν ότι η διαφορά των δυο μιγαδικών αριθμών είναι πραγματικός αριθμός όταν οι δυο μιγαδικοί αριθμοί έχουν ίσους τους φανταστικούς αριθμούς.

Διερεύνηση 4

Οι μαθητές αναμένεται να απαντήσουν ότι το πραγματικό μέρος του αθροίσματος είναι ο ένας μιγαδικός και το φανταστικό μέρος ο άλλος. Στη διαφορά ισχύει το ίδιο.

7.1.6 Θέμα 3: Το γινόμενο και το πηλίκο δυο μιγαδικών αριθμών

Στην επιφάνεια εργασίας έχουν σχεδιαστεί δυο μιγαδικοί αριθμοί z_1 και z_2 καθώς και το γινόμενο και το πηλίκο αυτών. Διερευνήστε το γινόμενο και το πηλίκο των μιγαδικών αριθμών καθώς μεταβάλετε τους z_1 και z_2 .

ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΕΙΣ

1. Επιλέξτε τους μιγαδικούς αριθμούς z_1 και z_2 ώστε το γινόμενό τους να είναι ο μιγαδικός $2+3i$. Πόσο είναι το πηλίκο τους;
2. Πώς πρέπει να ορίσετε τους z_1 και z_2 ώστε το γινόμενό τους να είναι πραγματικός αριθμός; Σε ποια περίπτωση και το γινόμενό τους είναι φανταστικός αριθμός;
3. Πώς πρέπει να ορίσετε τους z_1 και z_2 ώστε το πηλίκο τους να είναι πραγματικός αριθμός; Πότε το πηλίκο τους είναι φανταστικός αριθμός;
4. Τι ιδιότητες έχει το γινόμενο και το πηλίκο δυο συζυγών μιγαδικών αριθμών;

ΟΔΗΓΙΕΣ ΠΡΟΣ ΤΟΝ ΔΙΔΑΣΚΟΝΤΑ

Για τη διαχείριση των εργαλείων του μικρόκοσμου:

Ζητήστε από τους μαθητές:

- Να μετακινούν τους δείκτες των μεταβολέων για να ορίσουν τους μιγαδικούς αριθμούς z_1 και z_2 , το άθροισμά τους και τη διαφορά τους.
- Να χρησιμοποιούν την εντολή “Ιδιότητες” για να επαναπροσδιορίζουν τα χαρακτηριστικά των αντικειμένων της επιφάνειας εργασίας.

Για τις διερευνήσεις

Ζητήστε από τους μαθητές να παρατηρούν, να προβλέπουν, να ελέγχουν και να εκφράζουν στην ομάδα τους και στην τάξη:

- Για το γράφημα:
 - ✓ Τη μορφή των δυο μιγαδικών αριθμών
 - ✓ Τη μορφή του γινομένου και πηλίκου τους.
- Για την αλγεβρική διαπραγμάτευση:
 - ✓ Καταγράφουν με τη βοήθεια των τιμών των μεταβολέων τους δυο μιγαδικούς αριθμούς.
 - ✓ Καταγράφουν το γινόμενο και το πηλίκο των δυο μιγαδικών αριθμών.

Για τις απαντήσεις

Ζητήστε από τους μαθητές να εκφράσουν στην τάξη τις απαντήσεις τους. Είναι πιθανόν οι μαθητές να δώσουν απαντήσεις όπως οι παρακάτω:

Διερεύνηση 1

Οι μαθητές αναμένεται να βρουν διάφορους αριθμούς. Για παράδειγμα ο $z_1 = -1 + 2i$ και ο άλλος ο $z_2 = 0,8 - 1,4i$. Ο εκπαιδευτικός πρέπει να ζητήσει από τους μαθητές να ελέγξουν και αλγεβρικά τις απαντήσεις τους.

Διερεύνηση 2

Αρκεί το γινόμενο $\alpha\lambda + \beta\kappa$ να είναι ίσο με 0. Μια περίπτωση είναι η $\alpha=2$, $\beta=-1$, $\kappa=2$ και $\lambda=1$. Για να είναι φανταστικός πρέπει $\alpha\kappa - \beta\lambda = 0$.

Διερεύνηση 3

Αρκεί το γινόμενο $\beta\kappa - \alpha\lambda$ να είναι ίσο με 0. Μια περίπτωση είναι η $\alpha=2$, $\beta=1$, $\kappa=2$ και $\lambda=1$. Για να είναι φανταστικός πρέπει $\alpha\kappa + \beta\lambda = 0$.

Διερεύνηση 4

Οι μαθητές αναμένεται να απαντήσουν ότι σε κάθε περίπτωση το γινόμενο είναι πραγματικός αριθμός ενώ το πηλίκο τους μιγαδικός αριθμός.

7.1.7 Θέμα 4: Η τριγωνική ανισότητα των μιγαδικών αριθμών

Στην επιφάνεια εργασίας έχουν σχεδιαστεί οι μιγαδικοί αριθμοί z_1 και z_2 , το άθροισμά τους και η διαφορά τους καθώς και οι κύκλοι που ορίζονται με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνες τα μέτρα των z_1+z_2 και z_1-z_2 . Δυο ακόμα κύκλοι έχουν σχεδιαστεί με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνες το άθροισμα και τη διαφορά των μέτρων των z_1 και z_2 . Διερευνείστε την σχέση που έχουν τα μέτρα του αθροίσματος και της διαφοράς των z_1 και z_2 με το άθροισμα και τη διαφορά των μέτρων.

ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΕΙΣ

1. Επιλέξτε οι δείκτες των μεταβολών να δείχνουν $\alpha=2$, $\beta=2$, $\kappa=4$ και $\lambda=2$. Ποια σχέση έχουν τα μέτρα των $|z_1|+|z_2|$, $|z_1|-|z_2|$, $|z_1+z_2|$ και $|z_1-z_2|$;
2. Επιλέξτε οι δείκτες των μεταβολών να δείχνουν $\alpha=-1$, $\beta=1$, $\kappa=-4$ και $\lambda=-3$. Ποια σχέση έχουν τα μέτρα των $|z_1|+|z_2|$, $|z_1|-|z_2|$, $|z_1+z_2|$ και $|z_1-z_2|$;
3. Επιλέξτε οι δείκτες των μεταβολών να δείχνουν διάφορες τιμές. Ποια σχέση έχουν τα μέτρα των $|z_1|+|z_2|$, $|z_1|-|z_2|$, $|z_1+z_2|$ και $|z_1-z_2|$;
4. Μπορείτε να ορίσετε τους μιγαδικούς z_1 και z_2 έτσι ώστε (1) $|z_1|+|z_2|=|z_1+z_2|$ και
(2) $||z_1|-|z_2||=|z_1-z_2|$; Μπορείτε να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά την απάντησή σας;

ΟΔΗΓΙΕΣ ΠΡΟΣ ΤΟΝ ΔΙΔΑΣΚΟΝΤΑ

Για τη διαχείριση των εργαλείων του μικρόκοσμου

Ζητήστε από τους μαθητές:

- Να μετακινούν τους δείκτες των μεταβολών για να ορίσουν τους μιγαδικούς αριθμούς z_1 και z_2 , το άθροισμά τους και τη διαφορά τους.
- Να χρησιμοποιούν την εντολή “Ιδιότητες” για να επαναπροσδιορίζουν τα χαρακτηριστικά των αντικειμένων της επιφάνειας εργασίας.

Για τις διερευνήσεις

Ζητήστε από τους μαθητές να παρατηρούν, να προβλέπουν, να ελέγχουν και να εκφράζουν στην ομάδα τους και στην τάξη:

- Για το γράφημα:
 - ✓ Τη μορφή των δυο μιγαδικών αριθμών z_1 και z_2
 - ✓ Τη μορφή του αθροίσματος και της διαφοράς τους.
 - ✓ Τους κύκλους που έχουν ακτίνες τα μέτρα του αθροίσματος, της διαφοράς τους, του αθροίσματος των μέτρων και της διαφοράς των μέτρων.
- Για την αλγεβρική διαπραγμάτευση:

- ✓ Καταγράφουν με τη βοήθεια των τιμών των μεταβολών τους δυο μιγαδικούς αριθμούς.
- ✓ Καταγράφουν τα μέτρα του αθροίσματος, της διαφοράς τους, του αθροίσματος των μέτρων και της διαφοράς των μέτρων.

Για τις απαντήσεις

Ζητήστε από τους μαθητές να εκφράσουν στην τάξη τις απαντήσεις τους. Είναι πιθανόν οι μαθητές να δώσουν απαντήσεις όπως οι παρακάτω:

Διερεύνηση 1

Οι μαθητές εργάζονται με τους μιγαδικούς αριθμούς $z_1=2+2i$ και $z_2=4+2i$. Αναμένεται να διαπιστώσουν ότι:

$$|z_1|+|z_2|>|z_1+z_2| \text{ και } \left||z_1|-|z_2|\right|<|z_1\pm z_2|$$

Διερεύνηση 2

Οι μαθητές εργάζονται με τους μιγαδικούς αριθμούς $z_1=-1+i$ και $z_2=-4-3i$. Αναμένεται να διαπιστώσουν ότι:

$$|z_1|+|z_2|>|z_1+z_2| \text{ και } \left||z_1|-|z_2|\right|<|z_1\pm z_2|$$

Διερεύνηση 3

Οι μαθητές εργάζονται με διάφορους μιγαδικούς αριθμούς. Αναμένεται να διαπιστώσουν ότι σε κάθε περίπτωση:

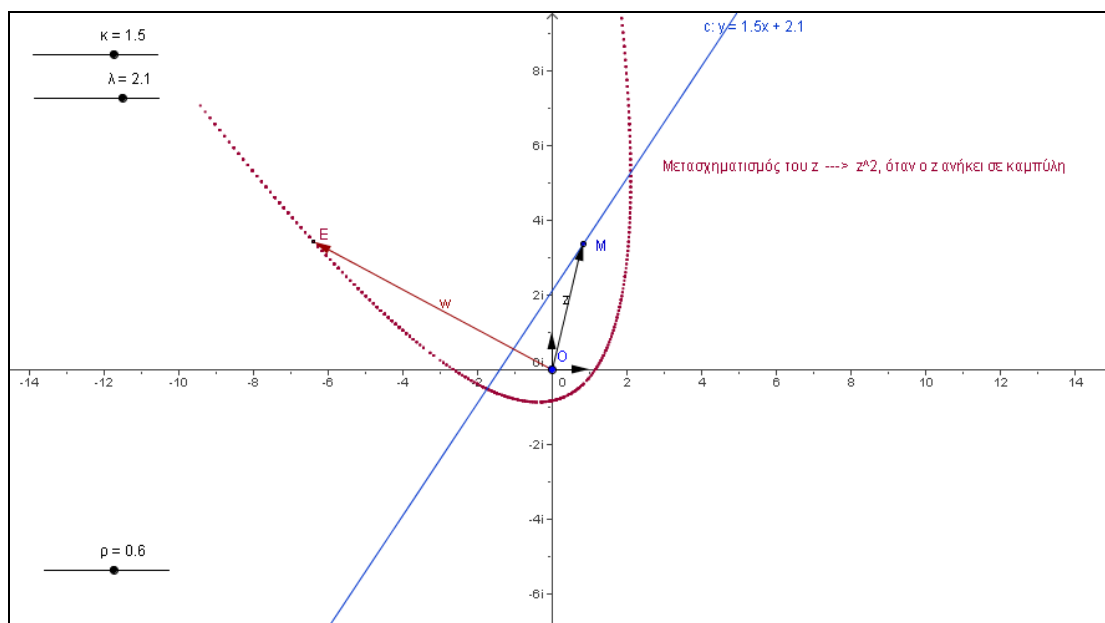
$$|z_1|+|z_2|>|z_1+z_2| \text{ και } \left||z_1|-|z_2|\right|<|z_1\pm z_2|$$

Διερεύνηση 4

Οι μαθητές αναμένεται να βρουν αριθμούς z_1 και z_2 ώστε, για το άθροισμα οι κύκλοι C_1 και K_A να ταυτίζονται και για την διαφορά οι κύκλοι C_2 και K_B επίσης να ταυτίζονται.

Σε κάθε διερεύνηση ο εκπαιδευτικός πρέπει να ζητά από τους μαθητές να δικαιολογούν και αλγεβρικά τις σχέσεις που παρατηρούν να έχουν οι αριθμοί που επιλέγουν. Επίσης παροτρύνει τους μαθητές να διατυπώνουν συμπεράσματα και θεωρήματα τα οποία αποδεικνύουν και θεωρητικά.

7.2 ΣΕΝΑΡΙΟ 17 : Μετασχηματισμοί στο μιγαδικό επίπεδο



7.2.1 Η κεντρική ιδέα του σεναρίου

Στο σενάριο αυτό οι μαθητές εμπλέκονται σε διερευνήσεις σχετικές με την έννοια του γεωμετρικού τόπου σημείων στο μιγαδικό επίπεδο καθώς και με τους μετασχηματισμούς αυτών. Το γεγονός ότι η αναπαράσταση των μιγαδικών αριθμών στο μιγαδικό επίπεδο έχει στενή σχέση με τον τρόπο αναπαράστασης των διανυσμάτων στο αντίστοιχο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων, επιτρέπει στους μαθητές να κάνουν συσχετίσεις μεταξύ των μετασχηματισμών που ορίζονται μέσω διανυσμάτων, όπως η μεταφορά και οι γραμμικοί μετασχηματισμοί, αλλά και να επεκτείνουν τις αντιλήψεις τους για τους μετασχηματισμούς καμπύλων. Στο σενάριο τους δίνεται η δυνατότητα να διερευνήσουν τους μετασχηματισμούς (1) κύκλου σε ευθεία, (2) ευθείας σε παραβολή και (3) κύκλου σε ευθύγραμμο τμήμα. Ακόμα κάνοντας επαναδιατυπώσεις του μετασχηματισμού μπορούν να προκαλέσουν πληθώρα μετασχηματισμών της ευθείας και του κύκλου υλοποιώντας τα δικά τους ερωτήματα και τις δικές τους εικασίες.

7.2.2 Στόχοι

- Να αποκτήσουν εμπειρίες σχετικές με τη δημιουργία γεωμετρικών τόπων στο μιγαδικό επίπεδο.
- Να αποκτήσουν εμπειρίες σχετικές με το μετασχηματισμό μιας ευθείας ή ενός κύκλου.
- Να αποκτήσουν εμπειρίες σχετικές με την αλγεβρική επεξεργασία των μετασχηματισμών.

7.2.3 Διδακτική πρόταση

ΟΡΓΑΝΩΣΗ ΤΗΣ ΤΑΞΗΣ

Οι δραστηριότητες αυτές ενδείκνυται να διδάσκονται στο εργαστήριο υπολογιστών και οι μαθητές να εργάζονται σε ομάδες 2-3 ατόμων με φύλλο εργασίας. Μπορούν όμως να διεξαχθούν και στην τάξη που διαθέτει μόνο έναν υπολογιστή με βιντεοπροβολέα. Σ' αυτή την περίπτωση οι μαθητές συμπληρώνουν τα φύλλα εργασίας με βάση τις παρατηρήσεις που κάνουν κατά την διερεύνηση που γίνεται απ' όλη τη τάξη και κατευθύνεται από τον εκπαιδευτικό ή κάποιον μαθητή. Στο πλαίσιο αυτό κάνουν παρεμβάσεις στη διερεύνηση με τις οποίες εκφράζουν την δική τους στρατηγική στη διερεύνηση. Καθώς τέτοιες παρεμβάσεις μπορούν να γίνονται στην τάξη απ' όλους τους μαθητές ο διδάσκων πρέπει να τις υποστηρίζει και να επιδιώκει να συζητούνται όλες οι πιθανές στρατηγικές της διερεύνησης.

Σε κάθε περίπτωση ο εκπαιδευτικός πρέπει να έχει από πριν προετοιμάσει τον τρόπο που θα χειριστεί τις διαφορετικές στρατηγικές που πιθανόν να διατυπωθούν καθώς και τις πιθανές εκβάσεις τους.

Ακόμα πρέπει με τη στάση του να προκαλεί την εφαρμογή των διαφορετικών τρόπων διερεύνησης, να ενθαρρύνει κάθε μαθητή να δοκιμάζει τις ιδέες του, να εκφράζει τις εικασίες του και να διατυπώνει τα συμπεράσματά του ελεύθερα. Ακόμα πρέπει να ενθαρρύνει τους μαθητές να προσπαθούν να επαληθεύουν αλγεβρικά τα αποτελέσματα των διερευνήσεών τους.

ΟΙ ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΕΣ ΔΥΝΑΤΟΤΗΤΕΣ ΤΟΥ ΣΕΝΑΡΙΟΥ

Οι προτεινόμενες στο σενάριο δραστηριότητες αφορούν φαινόμενα τα οποία προκαλούνται από την δράση των μαθητών σε προσχεδιασμένους υπολογιστικούς μικρόκοσμους με σκοπό την ανάδειξη των διερευνούμενων ιδιοτήτων τους. Έτσι οι απαντήσεις στα ερωτήματα που τίθενται στο πλαίσιο αυτών των διερευνήσεων αλλά και αυτών που ο διδάσκων ή οι ίδιοι οι μαθητές μπορούν να θέσουν είναι δυνατόν να αποτελέσουν ένα περιβάλλον απόκτησης και έκφρασης εμπειριών σχετικών με τους την έννοια του γεωμετρικού τόπου στο μιγαδικό επίπεδο καθώς και με τον μετασχηματισμό ευθείας ή κύκλου σ' αυτό. Τα εργαλεία που έχουν ενσωματωθεί στους μικρόκοσμους δίνουν την δυνατότητα στους μαθητές,

- να κάνουν πειράματα με τον προσδιορισμό των γεωμετρικών τόπων μέσω προκαθορισμένων ιδιοτήτων,
- να κάνουν πειράματα με τον μετασχηματισμό του κύκλου και της ευθείας,
- να διερευνήσουν τις ιδιότητες των εικόνων των μετασχηματισμών στο μιγαδικό επίπεδο,
- να παρατηρούν και να ερμηνεύουν τα αποτελέσματα των χειρισμών τους,
- να εκφράζουν εικασίες, να κάνουν γενικεύσεις, να διατυπώνουν υποθέσεις και θεωρήματα και να τα εκφράζουν με μαθηματικούς όρους,

Ακόμα, μπορούν να επεμβαίνουν και να επαναπροσδιορίζουν τις δυνατότητες των εργαλείων ή να επαναδιατυπώνουν τον τρόπο ορισμού των αντικειμένων και να μεταβάλλουν την εμφάνισή τους. Από αυτή την άποψη οι μικρόκοσμοι είναι επαναχρησιμοποιήσιμοι και δίνουν τη δυνατότητα στους χρήστες να διατυπώνουν και

νέα ερωτήματα που αφορούν ιδιαίτερες γνωστικές πτυχές των μαθηματικών αντικειμένων.

ΠΟΡΕΙΑ ΤΗΣ ΕΦΑΡΜΟΓΗΣ ΤΟΥ ΣΕΝΑΡΙΟΥ

Το σενάριο αποτελείται από τέσσερις εργασίες. Στην πρώτη, οι μαθητές διαπραγματεύονται τη δημιουργία γεωμετρικού τόπου από σημείο που κινείται στον άξονα των πραγματικών αριθμών. Στη δεύτερη, οι μαθητές διαπραγματεύονται τον μετασχηματισμό του μοναδιαίου κύκλου. Στη τρίτη, οι μαθητές διαπραγματεύονται τον μετασχηματισμό μιας ευθείας. Στην τέταρτη, οι μαθητές διαπραγματεύονται τον μετασχηματισμό του μοναδιαίου κύκλου σε ένα ευθύγραμμο τμήμα.

Η εμπλοκή των μαθητών με κάθε μια δραστηριότητα αναμένεται να αναδειξεί:

- Την έννοια του γεωμετρικού τόπου σημείων στο μιγαδικό επίπεδο.
- Την σχέση που έχουν οι ιδιότητες της καμπύλης - πρότυπο και της καμπύλης – εικόνα που προκύπτει από ένα συγκεκριμένο μετασχηματισμό.

Ο εκπαιδευτικός μπορεί να ζητά από τους μαθητές να επαληθεύουν αλγεβρικά τα συμπεράσματά τους σε κάθε περίπτωση.

ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

Εργασία	Περιγραφή	Τμήμα εφαρμογής	Περιεχόμενο
Εργασία 1	Γεωμετρικοί τόποι μιγαδικών αριθμών	ΚΑΤ/ΣΕΙΣ	Διερευνήσεις σχετικές με γεωμετρικούς τόπους που δημιουργούνται στο μιγαδικό επίπεδο.
Εργασία 2	Μετασχηματισμός του μιγαδικού αριθμού z με $ z =1$	ΚΑΤ/ΣΕΙΣ	Διερευνήσεις σχετικές με τον μετασχηματισμό κύκλου στο μιγαδικό επίπεδο.
Εργασία 3	Ο γεωμετρικός τόπος των $w=f(z)$ όταν z ανήκει σε ευθεία	ΚΑΤ/ΣΕΙΣ	Διερευνήσεις σχετικές με τον μετασχηματισμό ευθείας στο μιγαδικό επίπεδο.
Εργασία 4	Ο γεωμετρικός τόπος των $w=f(z)$ όταν z ανήκει σε κύκλο	ΚΑΤ/ΣΕΙΣ	Διερευνήσεις σχετικές με τον μετασχηματισμό κύκλου στο μιγαδικό επίπεδο.

7.2.4 Θέμα 1: Γεωμετρικοί τόποι μιγαδικών αριθμών

Στην επιφάνεια εργασίας ο μιγαδικός αριθμός z ορίζεται ως συνάρτηση της τετμημένης λ του σημείου M . Επίσης ο μιγαδικός αριθμός w ορίζεται ως συνάρτηση του z και του αριθμού $k+li$.

Διερευνήστε τον γεωμετρικό τόπο των δυο μιγαδικών αριθμών καθώς το σημείο M κινείται στον $\chi\chi$.

ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΕΙΣ

1. Τι μορφή έχει ο γεωμετρικός τόπος του z ; Τι μορφή έχει ο γεωμετρικός τόπος του w ; Μπορείτε να αποδείξετε τους ισχυρισμούς σας;
2. Επαναλάβετε την προηγούμενη διερεύνηση επιλέγοντας τις τιμές $\alpha=3$, $\beta=2$ και $\rho=1$. Τι μορφή έχουν τώρα οι δυο γεωμετρικοί τόποι; Τι επαναλαμβάνεται σε σχέση με τους προηγούμενους γεωμετρικούς τόπους; Μπορείτε να αποδείξετε τους ισχυρισμούς σας;
3. Επαναλάβετε τις προηγούμενες διερευνήσεις για την περίπτωση που έχετε $\alpha=0$, $\beta=0$ και $\rho=2$;
4. Επιλέξτε την εντολή «Επαναπροσδιορισμός» και επαναλάβετε τις προηγούμενες διερευνήσεις ορίζοντας διαφορετικά τα διανύσματα z και w .

Επιλέξτε για παράδειγμα ο z να είναι ίσος με $z=(\lambda^2+2)u+(3\lambda^2-1)v$

ΟΔΗΓΙΕΣ ΠΡΟΣ ΤΟΝ ΔΙΔΑΣΚΟΝΤΑ

Για τη διαχείριση των εργαλείων του μικρόκοσμου

Ζητήστε από τους μαθητές:

- Να μετακινούν τους δείκτες των μεταβολών α , β και ρ για να ορίσουν τους μιγαδικούς αριθμούς z και w .
- Να κινούν το σημείο M ώστε να μεταβάλουν τους μιγαδικούς αριθμούς z και w .
- Να επιλέγουν και να ενεργοποιούν ή όχι την εντολή «Ίχνος on».
- Να χρησιμοποιούν την εντολή “Properties” για να επαναπροσδιορίζουν τα χαρακτηριστικά των αντικειμένων της επιφάνειας εργασίας.

Για τις διερευνήσεις

Ζητήστε από τους μαθητές να παρατηρούν, να προβλέπουν, να ελέγχουν και να εκφράζουν στην ομάδα τους και στην τάξη:

- Για το γράφημα:
 - ✓ Τη μορφή των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z και w .
 - ✓ Το σχήμα που δημιουργεί το ίχνος των z και w καθώς μεταβάλλεται το σημείο M .
- Για την αλγεβρική διαπραγμάτευση:

- ✓ Καταγράφουν με τη βοήθεια των τιμών των μεταβολών τους μιγαδικούς αριθμούς z και w .
- ✓ Καταγράφουν τους μιγαδικούς αριθμούς z και w σε σχέση με την θέση του σημείου M .

Για τις απαντήσεις

Ζητήστε από τους μαθητές να εκφράσουν στην τάξη τις απαντήσεις τους. Είναι πιθανόν οι μαθητές να δώσουν απαντήσεις όπως οι παρακάτω:

Διερεύνηση 1

Οι μαθητές διαπραγματεύονται την καμπύλη που γράφει κάθε μιγαδικός αριθμός z και w . Αναμένεται να κάνουν τις εξής ενέργειες:

(1) Επιλέγουν την θέση των δεικτών των μεταβολών ώστε να έχει συγκεκριμένες τιμές. (2) Επιλέγουν την εντολή «Ιχνος on». (3) Μετακινούν το σημείο M και να παρατηρούν την καμπύλη που γράφει η εικόνα των μιγαδικών αριθμών z και w . Ο εκπαιδευτικός πρέπει να ζητήσει από τους μαθητές να ελέγξουν και αλγεβρικά τις παρατηρήσεις τους και τα συμπεράσματά τους. Αναμένεται να βρουν ότι η εικόνα του z είναι ευθεία με τύπο $y=3x-7$. Η εικόνα του w είναι ευθεία με εξίσωση $y=3x-3\alpha+\beta-6\rho$ για κάθε τιμή των α, β και ρ . Άρα οι δυο ευθείες είναι παράλληλες.

Διερεύνηση 2

Οι μαθητές αναμένεται να κάνουν ανάλογες παρατηρήσεις με αυτές που έκαναν στην προηγούμενη διερεύνηση

Διερεύνηση 3

Οι μαθητές αναμένεται να παρατηρήσουν ότι στην περίπτωση αυτή οι εικόνες των δυο διανυσμάτων είναι συγγραμμικά σημεία και επίσης ότι οι δυο ευθείες που γράφουν είναι παράλληλες.

Διερεύνηση 4

Οι μαθητές αναμένεται να κάνουν τις ίδιες παρατηρήσεις με τις προηγούμενες διερευνήσεις. Ωστόσο έχουν να εξηγήσουν επιπλέον το φαινόμενο οι δυο καμπύλες να μην είναι πλήρεις ευθείες αλλά ημιευθείες. Στην περίπτωση του z η εικόνα του γράφει την ευθεία $y=3x-7$ αλλά με τον περιορισμό $x \geq 2, y \geq -1$. Έτσι αναμένεται να εξηγηθεί γιατί είναι ημιευθεία και όχι ευθεία. Οι μαθητές μπορούν να ερευνήσουν και άλλες περιπτώσεις μιγαδικών z και w , όπως $z=(\lambda^2+2)u+(3\lambda^3-1)v$, $z=(\lambda^4+2)u+(3\lambda^2-1)v$, $z=(\lambda^2-2)u+(3\lambda-4)v$ κ.ο.κ.

7.2.5 Θέμα 2: Μετασχηματισμός του μιγαδικού αριθμού z με $|z|=1$

Στην επιφάνεια εργασίας έχει σχεδιαστεί ο κύκλος ακτίνας 1 στον οποίο ανήκουν οι μιγαδικοί αριθμοί z με μέτρο $|z|=1$. Ο μιγαδικός αριθμός w ορίζεται από τη σχέση $w=\kappa \cdot z+\lambda+\mu i$. Διερευνήστε τον γεωμετρικό τόπο του w όταν ο z διατρέχει τον μοναδιαίο κύκλο.

ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΕΙΣ

1. Επιλέξτε $\kappa=1$, $\lambda=1$ και $\mu=0$. Τι μορφή έχει ο γεωμετρικός τόπος του w ; Μπορείτε να αποδείξετε τους ισχυρισμούς σας;
2. Επιλέξτε $\kappa=2$, $\lambda=0$ και $\mu=1$. Τι μορφή έχει ο γεωμετρικός τόπος του w ; Ποια είναι η σχέση των δυο γεωμετρικών τόπων; Μπορείτε να αποδείξετε τους ισχυρισμούς σας;
3. Επιλέξτε $\kappa=0$, $\lambda=1$ και $\mu=1$. Τι μορφή έχει ο γεωμετρικός τόπος του w ; Ποια είναι η σχέση των δυο γεωμετρικών τόπων; Μπορείτε να αποδείξετε τους ισχυρισμούς σας;
4. Επαναλάβετε τις προηγούμενες διερευνήσεις και για άλλες τιμές των α , β και ρ . Ποια σχέση έχουν οι γεωμετρικοί τόποι των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z και w ;

ΟΔΗΓΙΕΣ ΠΡΟΣ ΤΟΝ ΔΙΔΑΣΚΟΝΤΑ

Για τη διαχείριση των εργαλείων του μικρόκοσμου

Ζητήστε από τους μαθητές:

- Να μετακινούν τους δείκτες των μεταβολών κ , λ και μ για να ορίσουν τους μιγαδικούς αριθμούς z και w .
- Να κινούν το σημείο M ώστε να μεταβάλουν τους μιγαδικούς αριθμούς z και w .
- Να επιλέγουν και να ενεργοποιούν ή όχι την εντολή «Ίχνος on».
- Να επιλέγουν την εντολή ««Επαναπροσδιορισμός»» και να επαναδιατυπώνουν τον ορισμό του μιγαδικού αριθμού w .
- Να χρησιμοποιούν την εντολή “Properties” για να επαναπροσδιορίζουν τα χαρακτηριστικά των αντικειμένων της επιφάνειας εργασίας.

Για τις διερευνήσεις

Ζητήστε από τους μαθητές να παρατηρούν, να προβλέπουν, να ελέγχουν και να εκφράζουν στην ομάδα τους και στην τάξη:

- Για το γράφημα:
 - ✓ Τη μορφή της εικόνας του μιγαδικού αριθμού w .
 - ✓ Το σχήμα που δημιουργεί το ίχνος του w καθώς μεταβάλλεται το σημείο M .
- Για την αλγεβρική διαπραγμάτευση:

- ✓ Καταγράφουν με τη βοήθεια των τιμών των μεταβολών τον μιγαδικό αριθμό w .
- ✓ Καταγράφουν τις συντεταγμένες του μιγαδικού αριθμού w σε σχέση με την θέση του σημείου M .

Για τις απαντήσεις

Ζητήστε από τους μαθητές να εκφράσουν στην τάξη τις απαντήσεις τους. Είναι πιθανόν οι μαθητές να δώσουν απαντήσεις όπως οι παρακάτω:

Διερεύνηση 1

Οι μαθητές διαπραγματεύονται την καμπύλη που γράφει κάθε μιγαδικός αριθμός z και w . Αναμένεται να κάνουν τις εξής ενέργειες:

(1) Επιλέγουν την θέση των δεικτών των μεταβολών ώστε να έχει συγκεκριμένες τιμές. (2) Επιλέγουν την εντολή «Ιχνος on». (3) Μετακινούν το σημείο M και παρατηρούν την καμπύλη που γράφει η εικόνα του μιγαδικού αριθμού w . Ο εκπαιδευτικός πρέπει να ζητήσει από τους μαθητές να ελέγξουν και αλγεβρικά τις παρατηρήσεις τους και τα συμπεράσματά τους. Οι μαθητές διαπραγματεύονται τον μιγαδικό $w=z+1$. Αναμένεται να βρουν ότι η εικόνα του z είναι κύκλος με τύπο $(x-1)^2+y^2=1$.

Διερεύνηση 2:

Οι μαθητές διαπραγματεύονται τον μιγαδικό $w=2z+i$. Αναμένεται να κάνουν ανάλογες παρατηρήσεις με αυτές που έκαναν στην προηγούμενη διερεύνηση και να βρουν ότι ο κύκλος έχει εξίσωση $x^2+(y-1)^2=1$.

Διερεύνηση 3

Οι μαθητές αναμένεται να παρατηρήσουν ότι στην περίπτωση αυτή η εικόνα του w είναι ένα σημείο εικόνα του μιγαδικού $w=1+i$ καθώς η τιμή του $k=0$.

Διερεύνηση 4

Οι μαθητές αναμένεται να κάνουν τις ίδιες παρατηρήσεις με τις προηγούμενες διερευνήσεις και να διαπιστώσουν ότι σε κάθε περίπτωση η εικόνα του w ανήκει σε κύκλο.

7.2.6 Θέμα 3: Ο γεωμετρικός τόπος των $w=f(z)$ όταν z ανήκει σε ευθεία

Στην επιφάνεια εργασίας έχει σχεδιαστεί ο μιγαδικός αριθμός z και η ευθεία $\psi=kx+\lambda$ στην οποία ανήκει. Διερευνείτε τον γεωμετρικό τόπο που γράφει η εικόνα του $w=z^2$ όταν ο z διατρέχει την ευθεία.

ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΕΙΣ

1. Επιλέξτε $k=1$, $\lambda=1$ και $\rho=0.3$. Τι μορφή έχει ο γεωμετρικός τόπος του w ; Μπορείτε να αποδείξετε τους ισχυρισμούς σας;
2. Επιλέξτε $k=1$, $\lambda=-1$ και $\rho=0.4$. Τι μορφή έχει ο γεωμετρικός τόπος του w ; Ποια είναι η σχέση των δυο γεωμετρικών τόπων; Μπορείτε να αποδείξετε τους ισχυρισμούς σας;
3. Επιλέξτε $k=1$, $\lambda=0$ και $\rho=0.4$. Τι μορφή έχει ο γεωμετρικός τόπος του w ; Ποια είναι η σχέση των δυο γεωμετρικών τόπων; Μπορείτε να αποδείξετε τους ισχυρισμούς σας;
4. Επιλέξτε $k=0$, $\lambda=1$ και $\rho=0.4$. Τι μορφή έχει ο γεωμετρικός τόπος του w ; Ποια είναι η σχέση των δυο γεωμετρικών τόπων; Μπορείτε να αποδείξετε τους ισχυρισμούς σας;

ΟΔΗΓΙΕΣ ΠΡΟΣ ΤΟΝ ΔΙΔΑΣΚΟΝΤΑ

Για τη διαχείριση των εργαλείων του μικρόκοσμου

Ζητήστε από τους μαθητές:

- Να μετακινούν τους δείκτες των μεταβολών k , λ και ρ για να ορίσουν τους μιγαδικούς αριθμούς z και w .
- Να κινούν το σημείο M ώστε να μεταβάλουν την εικόνα του μιγαδικού αριθμού w .
- Να επιλέγουν και να ενεργοποιούν ή όχι την εντολή «Ίχνος on».
- Να επιλέγουν την εντολή «Επαναπροσδιορισμός» και να επαναδιατυπώνουν τον ορισμό του μιγαδικού αριθμού w .
- Να χρησιμοποιούν την εντολή “Properties” για να επαναπροσδιορίζουν τα χαρακτηριστικά των αντικειμένων της επιφάνειας εργασίας.

Για τις διερευνήσεις

Ζητήστε από τους μαθητές να παρατηρούν, να προβλέπουν, να ελέγχουν και να εκφράζουν στην ομάδα τους και στην τάξη:

- Για το γράφημα:
 - ✓ Τη μορφή της εικόνας του μιγαδικού αριθμού w .
 - ✓ Το σχήμα που δημιουργεί το ίχνος του w καθώς μεταβάλλεται το σημείο M .
- Για την αλγεβρική διαπραγμάτευση:

- ✓ Καταγράφουν με τη βοήθεια των τιμών των μεταβολών τον μιγαδικό αριθμό w .
- ✓ Καταγράφουν τις συντεταγμένες του μιγαδικού αριθμού w σε σχέση με την θέση του σημείου M .

Για τις απαντήσεις

Ζητήστε από τους μαθητές να εκφράσουν στην τάξη τις απαντήσεις τους. Είναι πιθανόν οι μαθητές να δώσουν απαντήσεις όπως οι παρακάτω:

Διερεύνηση 1

Οι μαθητές διαπραγματεύονται την καμπύλη που γράφει ο μιγαδικός αριθμός $w=z^2$. Αναμένεται να κάνουν τις εξής ενέργειες:

(1) Επιλέγουν την θέση των δεικτών των μεταβολών ώστε να έχει συγκεκριμένες τιμές. (2) Επιλέγουν την εντολή «Ιχνος on». (3) Μετακινούν το σημείο M και να παρατηρούν την καμπύλη που γράφει η εικόνα του μιγαδικού αριθμού w . Ο εκπαιδευτικός πρέπει να ζητήσει από τους μαθητές να ελέγξουν και αλγεβρικά τις παρατηρήσεις τους και τα συμπεράσματά τους. Αναμένεται να βρουν ότι η εικόνα του z είναι παραβολή με τύπο $\psi = \frac{1}{2\rho}(\rho^2 - x^2)$ όπου $\rho=0,3$.

Διερεύνηση 2

Οι μαθητές διαπραγματεύονται τον μιγαδικό $w=z^2$. Αναμένεται να κάνουν ανάλογες παρατηρήσεις με αυτές που έκαναν στην προηγούμενη διερεύνηση και να βρουν ότι η ευθεία μετασχηματίζεται στην παραβολή, $\psi = \frac{1}{2\rho}(x^2 - \rho^2)$ με $\rho=0,4$

Διερεύνηση 3

Οι μαθητές αναμένεται να παρατηρήσουν ότι στην περίπτωση αυτή η εικόνα του w είναι ο θετικός ημιάξονας $\psi\psi'$.

Διερεύνηση 4

Οι μαθητές διαπραγματεύονται τον μιγαδικό $w=z^2$. Αναμένεται να κάνουν ανάλογες παρατηρήσεις με αυτές που έκαναν στην προηγούμενη διερεύνηση και να βρουν ότι η ευθεία μετασχηματίζεται στην παραβολή, $\psi^2 = 4\rho(x+1)$ με $\rho=0,4$

Είναι φανερό ότι ο εκπαιδευτικός έχει να εξετάσει μαζί με τους μαθητές του μια μεγάλη ομάδα θεμάτων μετασχηματισμού της ευθείας σε παραβολή. Μάλιστα σε όλες τις περιπτώσεις που έχει $a=1$ η παραβολή είναι γνωστής μορφής για τους μαθητές της Γ' Λυκείου. Στις άλλες περιπτώσεις η αλγεβρική εξήγηση έχει αρκετές δυσκολίες αλλά ταυτόχρονα αποτελεί και μια πρόκληση για όλους.

7.2.7 Θέμα 4: Ο γεωμετρικός τόπος των $w=f(z)$ όταν z ανήκει σε κύκλο

Στην επιφάνεια εργασίας έχει σχεδιαστεί ο μιγαδικός αριθμός z με $|z|=ρ$. Διερευνήστε για τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων των $w=αz^2+βz+γ$.

ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΕΙΣ

1. Επιλέξτε $α=1$, $β=1$ και $ρ=1$. Τι μορφή έχει ο γεωμετρικός τόπος του w ; Μπορείτε να τον περιγράψετε και να βρείτε κάποια αλγεβρική του μορφή;
2. Επιλέξτε $α=1$, $β=0$ και $ρ=1$. Τι μορφή έχει ο γεωμετρικός τόπος του w ;
3. Μπορείτε να τον περιγράψετε και να βρείτε κάποια αλγεβρική του μορφή;
4. Επιλέξτε $α=0$, $β=1$ και $ρ=1$. Τι μορφή έχει ο γεωμετρικός τόπος του w ; Μπορείτε να τον περιγράψετε και να βρείτε κάποια αλγεβρική του μορφή;
5. Επιλέξτε $α=1$, $β=0$ και $ρ=1$. Τι μορφή έχει ο γεωμετρικός τόπος του w ; Τι αλλάζει καθώς μετακινείτε τον δείκτη του μεταβολέα $β$; Μπορείτε να τον περιγράψετε και να βρείτε κάποια αλγεβρική του μορφή;

ΟΔΗΓΙΕΣ ΠΡΟΣ ΤΟΝ ΔΙΔΑΣΚΟΝΤΑ

Για τη διαχείριση των εργαλείων του μικρόκοσμου

Ζητήστε από τους μαθητές:

- Να μετακινούν τους δείκτες των μεταβολέων $α$, $β$ και $ρ$ για να ορίσουν τους μιγαδικούς αριθμούς z και w .
- Να κινούν το σημείο M ώστε να μεταβάλουν την εικόνα του μιγαδικού αριθμού w .
- Να επιλέγουν και να ενεργοποιούν ή όχι την εντολή «Ίχνος on».
- Να επιλέγουν την εντολή «Επαναπροσδιορισμός» και να επαναδιατυπώνουν τον ορισμό του μιγαδικού αριθμού w .
- Να χρησιμοποιούν την εντολή “Properties” για να επαναπροσδιορίζουν τα χαρακτηριστικά των αντικειμένων της επιφάνειας εργασίας.

Για τις διερευνήσεις

Ζητήστε από τους μαθητές να παρατηρούν, να προβλέπουν, να ελέγχουν και να εκφράζουν στην ομάδα τους και στην τάξη:

- Για το γράφημα
 - ✓ Τη μορφή της εικόνας του μιγαδικού αριθμού w .
 - ✓ Το σχήμα που δημιουργεί το ίχνος του w καθώς μεταβάλλεται το σημείο M .
- Για την αλγεβρική διαπραγμάτευση:
 - ✓ Καταγράφουν με τη βοήθεια των τιμών των μεταβολέων τον μιγαδικό αριθμό w .

- ✓ Καταγράφουν τις συντεταγμένες του μιγαδικού αριθμού w σε σχέση με την θέση του σημείου M .

Για τις απαντήσεις

Ζητήστε από τους μαθητές να εκφράσουν στην τάξη τις απαντήσεις τους. Είναι πιθανόν οι μαθητές να δώσουν απαντήσεις όπως οι παρακάτω:

Διερεύνηση 1

Οι μαθητές διαπραγματεύονται την καμπύλη που γράφει ο μιγαδικός αριθμός $w = \left[\alpha \operatorname{Re}(z)^2 + \beta \right] + \left[\alpha \operatorname{Im}(z)^2 + \beta \right] i$. Αναμένεται να κάνουν τις εξής ενέργειες:

(1) Επιλέγουν την θέση των δεικτών των μεταβολών ώστε να έχει συγκεκριμένες τιμές. (2) Επιλέγουν την εντολή «Ιχνος on». (3) Μετακινούν το σημείο M και να παρατηρούν την καμπύλη που γράφει η εικόνα του μιγαδικού αριθμού w . Ο εκπαιδευτικός πρέπει να ζητήσει από τους μαθητές να ελέγξουν και αλγεβρικά τις παρατηρήσεις τους και τα συμπεράσματά τους. Αναμένεται να βρουν ότι η εικόνα του z είναι ευθύγραμμο τμήμα ευθείας με τύπο $\chi + \psi = \alpha + 2\beta$ για τις διάφορες τιμές των α , β και ρ με $|\alpha| \leq \rho$ και $|\beta| \leq \rho$.

Διερεύνηση 2

Οι μαθητές αναμένεται να κάνουν ανάλογες παρατηρήσεις με αυτές που έκαναν στην προηγούμενη διερεύνηση και να βρουν ότι ο κύκλος μετασχηματίζεται σε ένα ευθύγραμμο τμήμα.

Διερεύνηση 3

Οι μαθητές αναμένεται να κάνουν ανάλογες παρατηρήσεις με αυτές που έκαναν στην προηγούμενη διερεύνηση και να βρουν ότι ο κύκλος μετασχηματίζεται σε ένα σημείο.

Διερεύνηση 4

Οι μαθητές αναμένεται να κάνουν ανάλογες παρατηρήσεις με αυτές που έκαναν στην προηγούμενη διερεύνηση και να βρουν ότι καθώς μετακινούν τον δείκτη του μεταβολέα β το ευθύγραμμο τμήμα μεταφέρεται παράλληλα στον εαυτόν του.

Είναι φανερό ότι ο εκπαιδευτικός έχει να εξετάσει μαζί με τους μαθητές του μια μεγάλη ομάδα θεμάτων μετασχηματισμού ενός κύκλου.

Τεχνική Υποστήριξη

Δικτυακός Τόπος : www.intracom-schools.gr και

Ηλεκτρονικό ταχυδρομείο : support_it@intracom-it.gr

Τηλέφωνο : 210-6679105

Fax : 210-6679106

Υπεύθυνη : κα Μπερτσά Όλγα

ΥΠΕΠΘ / ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ «ΚΟΙΝΩΝΙΑ ΤΗΣ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΑΣ»



Γ' ΚΟΙΝΟΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ ΣΤΗΡΙΞΗΣ
ΕΡΓΟ ΣΥΓΧΡΗΜΑΤΟΔΟΤΟΥΜΕΝΟ ΚΑΤΑ 80% ΑΠΟ ΤΟ ΕΚΤ
ΚΑΙ ΚΑΤΑ 20% ΑΠΟ ΕΘΝΙΚΟΥΣ ΠΟΡΟΥΣ
«Ολοκληρωμένη Αξιοποίηση των Τ.Π.Ε. στην Εκπαιδευτική Διαδικασία»