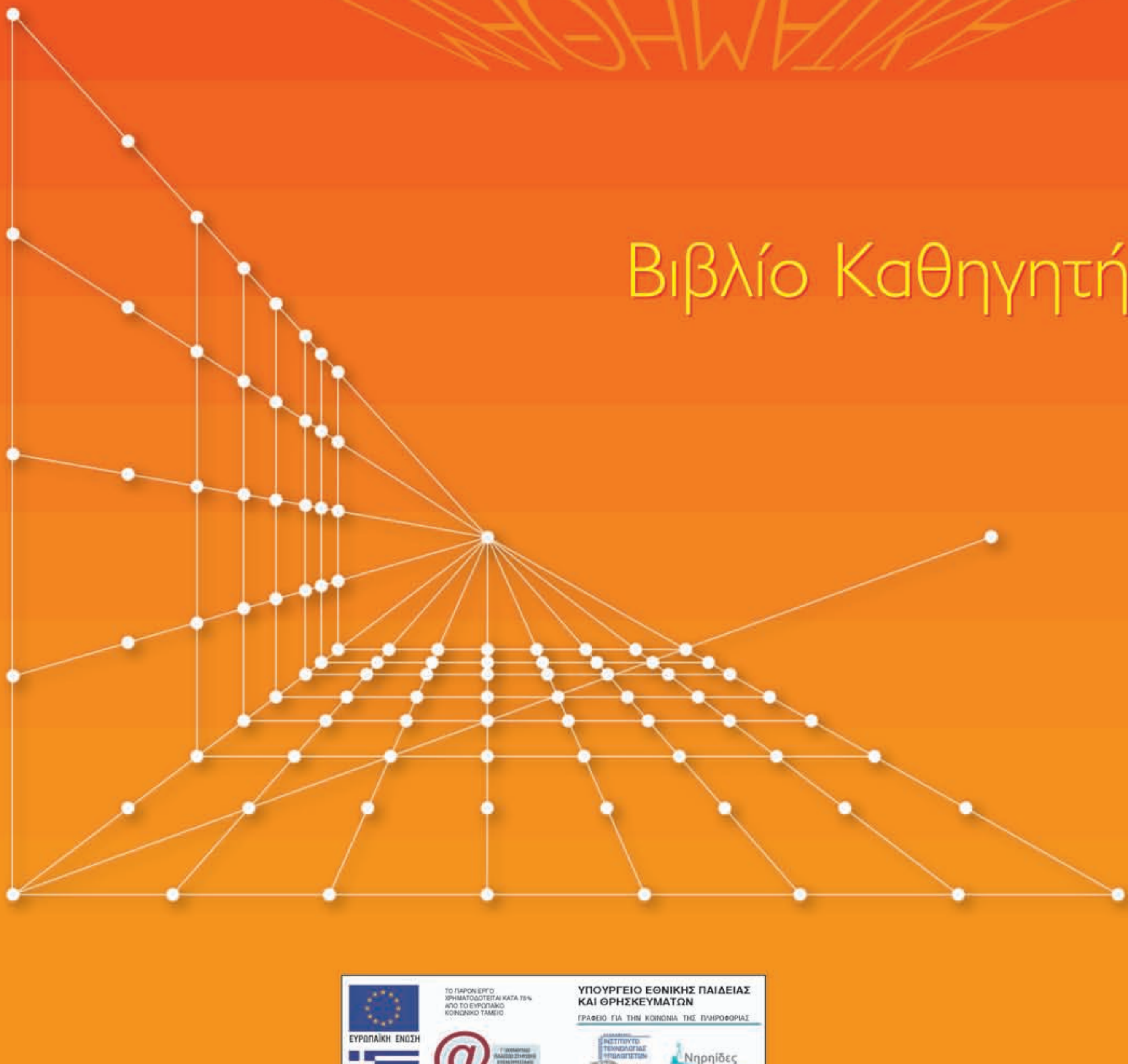
Πλειάδες

Νηρηίδες

ΡΕΑΛΙΣΤΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ



Βιβλίο Καθηγητή

ΤΟ ΠΑΡΟΝ ΕΡΓΟ ΧΡΗΜΑΤΟΔΟΤΕΙΤΑΙ ΚΑΤΑ 75% ΑΠΟ ΤΟ ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

ΕΥΡΩΠΑΪΚΗ ΕΝΩΣΗ

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΕΘΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ

ΓΡΑΦΕΙΟ ΓΙΑ ΤΗΝ ΚΟΙΝΩΝΙΑ ΤΗΣ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΑΣ

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΚΑΣΤΑΝΙΩΤΗ INTERACTIVE

ΕΚΔΟΣΗ 1.1 • ΑΠΡΙΛΙΟΣ 2008

Ανάδοχος Φορέας Έργου	*Εκδόσεις Καστανιώτη Α.Ε.* www.kastaniotis.com
Ομάδα Ανάπτυξης του Έργου «*Ρεαλιστικά Μαθηματικά*»	Συντονιστής έργου: Αγαθός Γεώργιος Εκπαιδευτική ομάδα: Κεΐσογλου Στέφανος, Λάτση Μαρία, Συκαρά Νεκταρία Τεχνική ομάδα: Ζευγώλης Παναγιώτης, Λουκιανός Μιχάλης Επιμέλεια: Κορμπάκη Γεωργία Υπεύθυνος/οι παρακολούθησης εκ μέρους του ΕΑ.ΙΤΥ: Τσίτσος Βασίλειος

Π Ε Ρ Ι Ε Χ Ο Μ Ε Ν Α

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ 3
ΤΟ ΒΑΣΙΚΟ ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ ΤΟΥ ΕΡΓΟΥ ΚΑΙ Η ΔΟΜΗ ΤΟΥ 5
Α. Η ΕΝΝΟΙΑ ΡΕΑΛΙΣΤΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ Η ΡΕΑΛΙΣΤΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ 5
Β. Η ΔΟΜΗ ΤΟΥ ΕΡΓΟΥ 9
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΕΣ ΑΝΑΦΟΡΕΣ 13
ΟΔΗΓΟΣ ΕΓΚΑΤΑΣΤΑΣΗΣ ΚΑΙ ΧΡΗΣΗΣ 14
Α. Εγκατάσταση και λειτουργία 14
Β. Προαπαιτούμενες εφαρμογές 14
Γ. Ελάχιστες απαιτήσεις συστήματος 14
ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΕΣ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ ΓΙΑ ΤΟ ΔΗΜΟΤΙΚΟ 15
1.1 Εισαγωγή 15
1.2 Επαναλαμβανόμενα ψηφοθετήματα/tessellation 15
1.3 Παιδαγωγική και διδακτική θεμελίωση των σεναρίων του δημοτικού 19
1.3.1 Ο ρόλος του εκπαιδευτικού 19
1.3.2 Ο ρόλος των μαθητών 19
1.3.3 Τα εκπαιδευτικά σενάρια για το δημοτικό 20
1.3.4 Πρόσθετη μαθησιακή αξία των εκπαιδευτικών σεναρίων 20
1.3.5 Αξιολόγηση των προτεινόμενων σεναρίων 21
1.4 Πρώτο εκπαιδευτικό σενάριο για το δημοτικό: Επαναλαμβανόμενα ψηφοθετήματα 22
1.4.1 Πρώτη δραστηριότητα: Επαναλαμβανόμενα ψηφοθετήματα/tessellations στην τέχνη 22
1.4.2 Φύλλο εργασίας πρώτης δραστηριότητας: Επαναλαμβανόμενα ψηφοθετήματα στην τέχνη 23
1.4.3 Σημειώσεις για το φύλλο εργασίας της πρώτης δραστηριότητας 25
1.4.4 Δεύτερη δραστηριότητα: Κανονικά επαναλαμβανόμενα ψηφοθετήματα/regular tessellation (1) 26
1.4.5 Φύλλο εργασίας δεύτερης δραστηριότητας: Κανονικά επαναλαμβανόμενα ψηφοθετήματα/regular tessellation (1) 28
1.4.6 Σημειώσεις για τη δεύτερη δραστηριότητα 30
1.4.7 Τρίτη δραστηριότητα: Κανονικά επαναλαμβανόμενα μοντέλα/regular tessellation (2) 31
1.4.8 Φύλλο εργασίας τρίτης δραστηριότητας: Κανονικά επαναλαμβανόμενα ψηφοθετήματα/regular tessellation (2) 33
1.4.9 Σημειώσεις για την τρίτη δραστηριότητα 34
1.5 Δεύτερο εκπαιδευτικό σενάριο για το δημοτικό: Επαναλαμβανόμενα μοντέλα πολυγώνων 35
1.5.1 Πρώτη δραστηριότητα: Τεθλασμένες γραμμές και κανονικά πολύγωνα 35
1.5.2 Φύλλο εργασίας πρώτης δραστηριότητας: Κανονικά πολύγωνα και τεθλασμένες γραμμές 36
1.5.3 Σημειώσεις πρώτης δραστηριότητας 39
1.5.4 Δεύτερη δραστηριότητα: Τα «πλακόστρωτα» του Penrose 42
1.5.5 Φύλλο εργασίας δεύτερης δραστηριότητας: Τα «πλακόστρωτα» του Penrose 43
1.5.6 Σημειώσεις δεύτερης δραστηριότητας 44
1.6 Συνοπτικές οδηγίες για τη χρήση του Αβακίου 45
1.6.1 Η ψηφίδα Χελώνα και η ψηφίδα Logo 45
1.6.2 Η ψηφίδα Καμβάς 49
1.6.3 Η ψηφίδα Μεταβολέας 49
1.7 Προγραμματισμός για τη δημιουργία επαναλαμβανόμενων ψηφοθετημάτων 51
1.7.1 Βασικές ψηφίδες προγραμμάτων 51
1.7.2 Επαναλαμβανόμενα μοντέλα 51
1.8 Διαδικασίες Μυστηρίου 52
1.8.1 Διαδικασία Mistirio1 – Κανονικά πολύγωνα 52
1.8.2 Διαδικασία Mistirio2 – Επικάλυψη με ένα είδος κανονικού πολυγώνου 53
1.8.3 Διαδικασία Mistirio3 – Επικάλυψη με διαφορετικά πολύγωνα γύρω από μια κορυφή 53
1.9 Παραπομπές 54
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΕΣ ΑΝΑΦΟΡΕΣ 55
ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΕΣ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ ΓΙΑ ΤΟ ΓΥΜΝΑΣΙΟ 57
2.1 Θεματική ενότητα: Οπτικό πεδίο – προοπτικό επίπεδο 57

2.1.1 Ιστορική αναφορά ... 59
2.1.2 Τα μαθηματικά του σεναρίου ... 60
2.1.3 Διδακτική προσέγγιση του σεναρίου ... 62

2.2 Δραστηριότητες για την Α' Γυμνασίου ... 64
1η Δραστηριότητα: ΟΠΤΙΚΗ ΓΩΝΙΑ ... 64
2η Δραστηριότητα: ΤΟ ΠΡΟΟΠΤΙΚΟ ΔΑΠΕΔΟ ... 67

2.3 Δραστηριότητες για τη Β' Γυμνασίου ... 70
1η Δραστηριότητα: ΟΠΤΙΚΗ ΓΩΝΙΑ ΤΟΥ ΘΕΑΤΗ ... 70

2.4 Δραστηριότητες για τη Γ' Γυμνασίου ... 78
1η Δραστηριότητα: ΕΡΓΑΛΕΙΑ ΜΕΤΡΗΣΗΣ ... 78
2η Δραστηριότητα: ΤΟ ΠΡΟΟΠΤΙΚΟ ΕΠΙΠΕΔΟ ... 82

2.5 PROJECT ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ – Θεματική ενότητα: Το προοπτικό μοντέλο του Alberti ... 86
2.5.1 Ιστορικό πλαίσιο του εκπαιδευτικού σεναρίου ... 88
2.5.2 Μαθηματικά του μοντέλου του Alberti ... 90
2.5.3. Διδακτική προσέγγιση του σεναρίου ... 92
2.5.4 Σχέδιο εκπαιδευτικών δραστηριοτήτων ... 94
1η Δραστηριότητα: ΟΙ ΟΠΤΙΚΕΣ ΑΚΤΙΝΕΣ ... 95
2η Δραστηριότητα: Η ΜΕΛΕΤΗ ΤΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ ΤΟΥ ALBERTI ... 99
3η Δραστηριότητα: ΜΕΛΕΤΗ ΕΡΓΩΝ ΤΕΧΝΗΣ ... 104
4η Δραστηριότητα: Ο ΠΡΟΟΠΤΙΚΟΣ ΧΩΡΟΣ ... 106

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΕΣ ΑΝΑΦΟΡΕΣ ... 110

ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΕΣ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ ΓΙΑ ΤΟ ΛΥΚΕΙΟ ... 111

3.1 Θεματική ενότητα: Μετρήσεις μέσω ακτίνων (οπτικών – φωτός) ... 111

3.2 Δραστηριότητες για την Α' Λυκείου ... 117
1η Δραστηριότητα: ΕΡΓΑΛΕΙΑ ΜΕΤΡΗΣΕΩΝ ... 117
2η Δραστηριότητα: ΚΑΤΟΠΤΡΑ ... 121

3.3. Δραστηριότητες για τη Β' Λυκείου ... 125
1η Δραστηριότητα: Ο ΠΡΟΒΟΛΕΑΣ ... 125
2η Δραστηριότητα: Η ΠΙΣΙΝΑ ... 129

3.4 Δραστηριότητες για τη Γ' Λυκείου ... 132
1η Δραστηριότητα: Η ΒΕΛΤΙΣΤΗ ΟΠΤΙΚΗ ΓΩΝΙΑ ... 133
2η Δραστηριότητα: Η ΒΕΛΤΙΣΤΗ ΘΕΣΗ ΣΤΟ ΠΟΔΟΣΦΑΙΡΟ ... 138

3.5 PROJECT ΛΥΚΕΙΟΥ – Θεματική ενότητα: Μαθηματικά μοντέλα της οπτικής μας αντίληψης ... 140
3.5.1 Σχέδιο εκπαιδευτικών δραστηριοτήτων ... 143
3.5.2 Ιστορικό πλαίσιο του εκπαιδευτικού σεναρίου ... 144
3.5.3 Μία σύγχρονη προσέγγιση στα μαθηματικά των προτάσεων 4 και 6 των *Οπτικών* του Ευκλείδη ... 146
1η Δραστηριότητα: ΜΕΛΕΤΗ ΦΩΤΟΓΡΑΦΙΑΣ ... 151
2η Δραστηριότητα: ΤΑ ΟΠΤΙΚΑ ΤΟΥ ΕΥΚΛΕΙΔΗ ... 153
3η Δραστηριότητα: Η ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ ... 156
4η Δραστηριότητα: ΔΥΝΑΜΙΚΑ ΜΟΝΤΕΛΑ ... 158

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΕΣ ΑΝΑΦΟΡΕΣ ... 164

ΤΟ ΒΑΣΙΚΟ ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ ΤΟΥ ΕΡΓΟΥ ΚΑΙ Η ΔΟΜΗ ΤΟΥ

Α. Η ΕΝΝΟΙΑ ΡΕΑΛΙΣΤΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ Η ΡΕΑΛΙΣΤΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ

Τα σενάρια και οι δραστηριότητες που περιγράφονται στα κείμενα του έργου *Ρεαλιστικά Μαθηματικά* συνιστούν μία πρόταση προς τη μαθηματική εκπαιδευτική κοινότητα, ένα διδακτικό πείραμα με στόχο τη σύνδεση των μαθηματικών με τον πραγματικό κόσμο.

Ωστόσο, κάθε διδακτική πρόταση είναι δομημένη πάνω σε γενικές θεωρητικές παραδοχές, οι οποίες και δημιουργούν το πλαίσιο ανάπτυξης, δηλαδή τη φιλοσοφία των δραστηριοτήτων που καλούνται να υλοποιήσουν οι μαθητές.

Στο παρόν έργο το βασικό θεωρητικό πλαίσιο στηρίζεται στην έννοια «ρεαλιστικά μαθηματικά» και στη Ρεαλιστική Μαθηματική Εκπαίδευση.

Τα «ρεαλιστικά μαθηματικά» αφορούν στη διδακτική μεθοδολογία η οποία αναπτύχθηκε στο Ινστιτούτο Freudenthal, στο Πανεπιστήμιο της Utrecht, και υιοθετήθηκε από το σύνολο σχεδόν των Κάτω Χωρών το 1971. Η μεθοδολογία αυτή είναι γνωστή ως Ρεαλιστική Μαθηματική Εκπαίδευση (Realistic Mathematics Education ή RME) και έχει ως βάση την καθοδηγούμενη επανακατασκευή των μαθηματικών εννοιών από τους μαθητές μέσα από μία διαδικασία προοδευτικής μαθηματικοποίησης· έννοιες που θα αποσαφηνιστούν στη συνέχεια. Η προοπτική αυτή για τη μαθηματική εκπαίδευση είναι πλέον αποδεκτή από ένα μεγάλο αριθμό χωρών, όπως η Γερμανία, η Αγγλία, η Ισπανία, οι ΗΠΑ, η Βραζιλία κ.λπ.

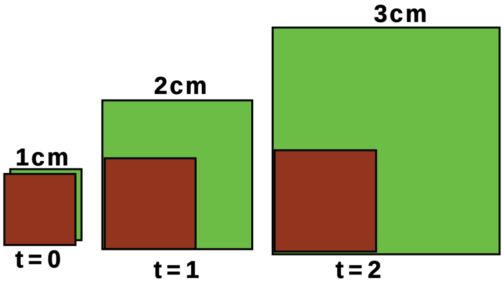
Ο όρος «ρεαλιστικά» παραπέμπει προφανώς στην ανάγκη να είναι τα μαθηματικά συνδεδεμένα με πραγματικές καταστάσεις, όμως θα πρέπει να τονιστεί ότι κυρίαρχο αίτημα στην RME είναι να έχουν νόημα για το μαθητή οι καταστάσεις που καλείται να μαθηματικοποιήσει ο ίδιος. Αυτό σημαίνει ότι οι μαθητές δεν καλούνται να λύσουν μόνο πραγματικά προβλήματα, αλλά και προβλήματα που αφορούν σε ένα μαθηματικό μοντέλο ή σε μία μαθηματική εφαρμογή, αρκεί τα προβλήματα αυτά να συνδέονται με τα ενδιαφέροντα και την εμπειρία τους, φυσική ή μαθηματική (de Lange, 1996).

Η σημασία του όρου «ρεαλιστικά»
Ο όρος «ρεαλιστικά μαθηματικά» παραπέμπει, σε πρώτη ανάγνωση, σε μαθηματικά τα οποία αναφέρονται σε προβλήματα του πραγματικού κόσμου, σε φαινόμενα που εμφανίζονται στην καθημερινή μας ζωή. Ο λόγος, όμως, για τον οποίο η συγκεκριμένη μορφή της μαθηματικής εκπαίδευσης χαρακτηρίζεται ως «ρεαλιστική» δεν είναι ακριβώς επειδή σχετίζονται με τον πραγματικό κόσμο, αλλά διότι δίνεται έμφαση σε καταστάσεις τις οποίες οι μαθητές μπορούν να φανταστούν.

Η ολλανδική μετάφραση του ρήματος «φαντάζομαι» είναι «zich REALISEren» και από αυτήν ακριβώς την απόδοση του όρου προέκυψε η ονομασία Ρεαλιστικά Μαθηματικά. Το σημαντικό επομένως είναι ότι κέντρο των Ρεαλιστικών Μαθηματικών αποτελεί η λύση προβλημάτων, τα οποία έχουν νόημα για το μαθητή με την έννοια ότι μπορεί να τα φανταστεί (van der Heuvel-Panhuizen, 2001).

Η δυνατότητα να φανταστεί ο μαθητής μία κατάσταση προβλήματος στην RME δεν περιορίζεται σε πραγματικές καταστάσεις. Ένα μαθηματικό πρόβλημα, το οποίο έχει νόημα για τους μαθητές, θα μπορούσε να αποτελέσει την αφετηρία για μία δημιουργική πορεία από την άτυπη διαισθητική γνώση μέχρι την τυπική έκφραση.

Παράδειγμα



Στην εικόνα υπάρχουν δύο τετράγωνα, ένα πράσινο και ένα καφέ. Τη χρονική στιγμή t=0 τα δύο τετράγωνα έχουν ίσα εμβαδά, αφού οι πλευρές τους είναι ίσες (1 εκ. η καθεμιά).
Το εμβαδόν των τετραγώνων αυξάνει με διαφορετικό τρόπο. Στο πράσινο η πλευρά αυξάνει 1 εκ. το λεπτό, ενώ στο καφέ η επιφάνεια αυξάνεται κατά 0,1% την ώρα. Για τα εμβαδά των δυο τετραγώνων υπάρχουν οι παρακάτω απόψεις:

α) Το πράσινο τετράγωνο θα έχει πάντα μεγαλύτερο εμβαδόν από το καφέ και μάλιστα η διαφορά τους θα αυξάνεται συνεχώς.
β) Το καφέ τετράγωνο θα έχει πάντα μικρότερο εμβαδόν από το

πράσινο, αλλά η διαφορά των εμβαδών τους θα ελαττώνεται συνεχώς. Ποια από τις δύο εκδοχές θεωρείτε ότι είναι η πιθανότερη;

Στο παραπάνω πρόβλημα ο μαθητής μπορεί να «φανταστεί» την κατάσταση, αφού η μεγέθυνση αντικειμένων ανήκει στο χώρο της εμπειρίας του. Εδώ το σημαντικό είναι ότι η λύση δεν προκύπτει άμεσα και οι μαθητές θα πρέπει να χρησιμοποιήσουν μαθηματικά μοντέλα για τις μεταβολές, τα οποία στη συνέχεια θα συγκρίνουν. Η διαδικασία αυτή αποτελεί γνώρισμα της RME και έχει το χαρακτήρα της οριζόντιας και κατακόρυφης μαθηματικοποίησης.

Επανακατασκευή και μαθηματικοποίηση
Με τη λέξη «επανακατασκευή» αποδίδουμε τον όρο «reinvention» που αποτελεί κεντρική έννοια της RME και σε μία επί λέξη μετάφραση θα αποδιδόταν ως «επανεπινόηση». Η χρήση του όρου «επανακατασκευή» έχει προταθεί από Έλληνες ερευνητές (Κολέζα, 2000) και διαθέτει μια αμεσότητα που παραπέμπει στην κατασκευαστική αντίληψη για τη γνώση.

Προφανώς υπάρχει μία λεπτή διαφορά μεταξύ της επανεπινόησης και της επανακατασκευής, αφού στην πρώτη δηλώνεται σαφώς ότι τα μαθηματικά έχουν επινοηθεί από την ανθρώπινη κοινότητα, ενώ στη δεύτερη δεν είναι σαφής η επιστημολογική αυτή νύξη.

Ας έρθουμε όμως στην ουσία του όρου που είναι η διδακτική στάση την οποία υπονοεί. Σύμφωνα με την αρχή της επανακατασκευής, ο σχεδιασμός των δραστηριοτήτων, με τις οποίες θα εμπλακεί ο μαθητής, θα πρέπει να του δίνει την ευκαιρία να βιώσει μια διαδικασία όμοια με εκείνη που φαίνεται να έχει ακολουθήσει η ανάπτυξη των μαθηματικών ιδεών. Αυτό σημαίνει ότι θα πρέπει να βασίζεται στην άτυπη, διαισθητική γνώση του μαθητή, η οποία σταδιακά θα μετασχηματιστεί σε αυστηρή, τυπική μαθηματική γνώση. Εδώ ο σχεδιασμός θα μπορούσε να στηριχτεί στην Ιστορία των Μαθηματικών, ως πηγή έμπνευσης, και στις άτυπες λύσεις των μαθητών, καθώς επιχειρούν να λύσουν προβλήματα για τα οποία δεν διαθέτουν γνώσεις ή αλγορίθμους με τους οποίους μπορούν να τα λύσουν άμεσα (Gravenmeijer, 1994).

Αφού προσδιοριστεί η κατάσταση του προβλήματος, καθορίζεται και η διδακτική πορεία ως μια διαδικασία προοδευτικής μαθηματικοποίησης. Η πορεία αυτή είναι κατευθυνόμενη (guided), με την έννοια ότι ο μαθητής εμπλέκεται σε δραστηριότητες που διαθέτουν σαφή προσανατολισμό και υλοποιούνται σε ένα συγκεκριμένο μαθησιακό περιβάλλον, το οποίο έχει σχεδιαστεί και οργανωθεί με στόχο την πρόκληση και υποστήριξη των δράσεων μαθηματικοποίησης.

Αυτό το οποίο έχει υπογραμμίσει ο Freudenthal (1991) και αποσαφηνίζει την έννοια της επανακατασκευής είναι το ότι δεν αναμένουμε ο μαθητής να κατασκευάσει τα πάντα μόνος του. Έμφαση θα πρέπει να δοθεί στο χαρακτήρα της μαθησιακής διαδικασίας και όχι στον όρο καθεαυτό. Είναι σημαντικό οι μαθητές να αντιληφθούν ότι η νέα γνώση είναι προσωπική τους υπόθεση, για την οποία και είναι υπεύθυνοι.

Ας έρθουμε τώρα στην έννοια της μαθηματικοποίησης, η οποία χαρακτηρίζει τη μαθησιακή διαδικασία στο πλαίσιο της RME. Ο Treffers πρότεινε τη διάκριση δύο μορφών μαθηματικοποίησης, την οριζόντια και την κατακόρυφη (1987).

Κατά την οριζόντια μαθηματικοποίηση οι μαθητές επιχειρούν, με τα μαθηματικά εργαλεία που διαθέτουν, να οργανώσουν και να λύσουν ένα «ρεαλιστικό» πρόβλημα. Οι δραστηριότητες που χαρακτηρίζονται ως οριζόντιες είναι: η περιγραφή της κατάστασης του προβλήματος με μαθηματικούς όρους, η διατύπωση εικασιών, η εκτέλεση πειραμάτων, η οπτικοποίηση του προβλήματος, ο εντοπισμός σχέσεων μεταξύ των παραμέτρων, ο μετασχηματισμός του πραγματικού προβλήματος σε ένα ισοδύναμο μαθηματικό πρόβλημα.
Η κατακόρυφη μαθηματικοποίηση χαρακτηρίζεται από δράσεις όπως:

η αναπαράσταση μιας σχέσης με έναν τύπο, η απόδειξη μιας σχέσης, η γενίκευση, η περιγραφή ενός μαθηματικού μοντέλου με αυστηρά μαθηματική γλώσσα.

Ο ρόλος του διδάσκοντα στην RME
Ο ρόλος του διδάσκοντα στην RME είναι να οργανώνει, να κατευθύνει και να διευκολύνει τους μαθητές. Συγχρόνως, όμως, να αξιολογεί τη διδακτική του πορεία και είναι έτοιμος να την αναθεωρήσει (de Lange, 1996· Gravenmeijer, 1994). Συγκεκριμένα, κατά τη διάρκεια μιας δραστηριότητας, ο διδάσκων:

- Προτείνει στους μαθητές προβλήματα ή, καλύτερα, καταστάσεις προβλήματος κατάλληλα επιλεγμένες.
- Επικοινωνεί με τους μαθητές, δίνοντάς τους στοιχεία και απευθύνοντάς τους ερωτήσεις οι οποίες τους βοηθούν να εστιάσουν στα σημαντικά χαρακτηριστικά της κατάστασης.

- Προτρέπει τους μαθητές να διαπραγματευτούν τις λύσεις και τις ιδέες που επεξεργάζονται.
- Ενθαρρύνει τους μαθητές να προσεγγίζουν την κατάσταση προβλήματος με το δικό τους τρόπο, να διατυπώνουν τις εικασίες τους και να προτείνουν λύσεις δικής τους επινόησης.
- Προτρέπει τους μαθητές να διερευνούν ερωτήματα τα οποία έχουν οι ίδιοι θέσει και τους προτείνει επεκτάσεις στη διερεύνηση.

Ο ρόλος και η σημασία των μοντέλων στην RME

Ως μοντέλο ορίζουμε ένα σύστημα το οποίο περιέχει στοιχειώδη αντικείμενα, διαδικασίες και κανόνες και μπορεί να χρησιμοποιηθεί, για να περιγράψει, να εξηγήσει ή να προβλέψει τη συμπεριφορά άλλων συστημάτων (Doerr & English, 2001). Το ενδιαφέρον της RME στρέφεται σε μοντέλα, των οποίων η δομή παρουσιάζει μαθηματικό ενδιαφέρον.

Τα μοντέλα θα μπορούσαν να χαρακτηριστούν ως γέφυρες μεταξύ της κατάστασης προβλήματος και της τυπικής μαθηματικής γνώσης.

Στο πλαίσιο της RME τα μοντέλα αποτελούν αναπαραστάσεις της κατάστασης του προβλήματος, οι οποίες απεικονίζουν τις ουσιαστικές πτυχές των μαθηματικών εννοιών και δομών που σχετίζονται με τη συγκεκριμένη κατάσταση. Το νόημα του όρου «μοντέλο» δεν θα πρέπει να περιορίζεται στην κυριολεξία του. Αντικείμενα, σχήματα, διαγράμματα, ακόμη και σύμβολα, θα μπορούσαν να θεωρηθούν ως μοντέλα (Treffers, 1987· Gravemeijer, 1994).

Δύο βασικά χαρακτηριστικά των μοντέλων προσδιορίζουν τη διδακτική τους αξία. Αφενός θα πρέπει να προέρχονται από ένα ρεαλιστικό πλαίσιο, στο οποίο η φαντασία του μαθητή έχει πρόσβαση, και αφετέρου θα πρέπει να είναι ευέλικτα, ώστε να μπορούν να χρησιμοποιηθούν σε όλο και πιο πολύπλοκες μαθηματικές δραστηριότητες. Από αυτή ακριβώς την ευελιξία, για χρήση σε πολλαπλά επίπεδα, αντλεί τη δυναμική του το μοντέλο (V. H. Panhuizen, 2003).

Ένα άλλο χαρακτηριστικό που θα πρέπει να διαθέτει ένα μοντέλο είναι η δυνατότητα να συμπεριφέρεται με «φυσικό» τρόπο, να διαθέτει διαφάνεια σε ό,τι αφορά τις σχεδιαστικές επιλογές του κατασκευαστή του, ώστε να δίνει στο μαθητή την αίσθηση ότι έχει κατασκευαστεί από τον ίδιο.

Η δημιουργία μαθηματικών μοντέλων μέσα από διαδικασίες μαθηματικοποίησης μας επιτρέπει την εννοιολογική διάκριση: σε μοντέλα μιας πραγματικής κατάστασης και σε μοντέλα για μία πραγματική κατάσταση (model of – model for) (Gravemeijer, 2002). Ας αποσαφηνίσουμε όμως τη διάκριση αυτή. Καθώς οι μαθητές εμπλέκονται σε δραστηριότητες μαθηματικοποίησης, δημιουργούν μαθηματικές σχέσεις οι οποίες στην αρχή προσδιορίζονται στο πλαίσιο της πραγματικής κατάστασης στην οποία αναφέρονται τα συσχετιζόμενα μεγέθη. Οι συγκεκριμένες σχέσεις-μοντέλα αντλούν το νόημά τους από την πραγματική κατάσταση. Το μοντέλο σε αυτή την περίπτωση μπορεί να χαρακτηριστεί ως ***μοντέλο της*** συγκεκριμένης κατάστασης.

Καθώς το ίδιο μοντέλο προκύπτει από τη μαθηματικοποίηση και άλλων καταστάσεων προβλήματος, αποκτά ένα γενικευμένο χαρακτήρα, αποστασιοποιείται από το αρχικό πλαίσιο και αυτονομείται ως ένα ανεξάρτητο μαθηματικό αντικείμενο, το οποίο μπορεί να χρησιμοποιηθεί για περαιτέρω μαθηματική επεξεργασία. Το μοντέλο τότε έχει την έννοια του ***μοντέλου για*** λύση προβλημάτων.

Ο μετασχηματισμός αυτός πραγματοποιείται σταδιακά, ενόσω οι μαθητές μελετούν τις σχέσεις που προσδιορίζουν το μοντέλο, το οποίο πλέον αντλεί το νόημά του από τις συγκεκριμένες συσχετίσεις των μεγεθών στα οποία αναφέρεται.

Η σημασία της χρήσης μοντέλων στην ανάπτυξη των μαθηματικών αναδεικνύεται και από τη μελέτη ιστορικών κειμένων, όπως τα *Οπτικά* του Ευκλείδη. Στο συγκεκριμένο έργο ο Ευκλείδης επιχειρεί τη δημιουργία γεωμετρικών μοντέλων της οπτικής μας αντίληψης και είναι χαρακτηριστικός ο τρόπος με τον οποίο αναπτύσσει και επεξεργάζεται τα μοντέλα του.

Στην ουσία ακολουθεί μια διαδικασία οριζόντιας και κατακόρυφης μαθηματικοποίησης. Συγκεκριμένα χρησιμοποιεί ως αφετηρία τον τρόπο με τον οποίο αντιλαμβανόμαστε το χώρο και τα αντικείμενα που υπάρχουν σε αυτόν και δημιουργεί γεωμετρικά μοντέλα για να αποσαφηνίσει την αντίληψή μας για τα αντικείμενα αυτά. Κεντρική του επιλογή η αναπαράσταση του μεγέθους ενός αντικειμένου με τη γωνία από την οποία φαίνεται το αντικείμενο αυτό. Στη συνέχεια δημιουργεί γεωμετρικά σχήματα για την περιγραφή πολύ συγκεκριμένων καταστάσεων, τα μελετά με αυστηρά μαθηματικό τρόπο και τελικά σχηματίζει μία γενική θεωρία για την οπτική μας αντίληψη.

RME και χρήση της τεχνολογίας

Η θετική συνεισφορά της χρήσης υπολογιστικών εργαλείων δεν φαίνεται να προκύπτει με σαφήνεια από τις έρευνες (Kaput, 1998· Clements, 2000). Συχνά η συζήτηση για τη χρήση της τεχνολογίας στη μαθηματική εκπαίδευση περιορίζεται και εστιάζει στο ίδιο το εργαλείο και όχι στις δραστηριότητες και στη συγκεκριμένη κατάσταση του προβλήματος με την οποία εμπλέκεται ο μαθητής.

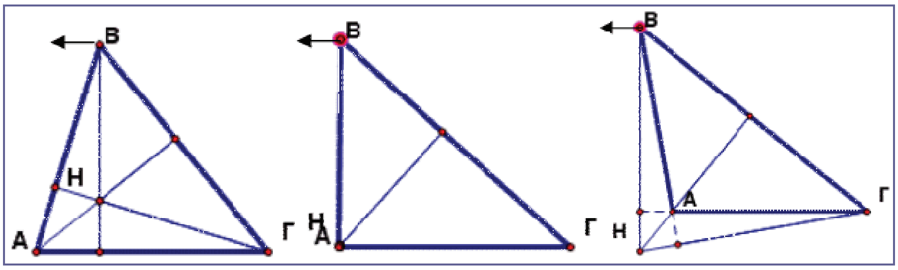
Οι αρχές πάνω στις οποίες στηρίζεται η RME συνιστούν ένα πλαίσιο στο οποίο η τεχνολογία θα μπορούσε να προσφέρει σημαντική αρωγή στη διδασκαλία και τη μάθηση των μαθηματικών.

Καταρχήν, ας δούμε τον τρόπο με τον οποίο αντιλαμβάνονται τη διδακτική αξιοποίηση της τεχνολογίας ερευνήτες που εργάζονται στο πλαίσιο της RME.

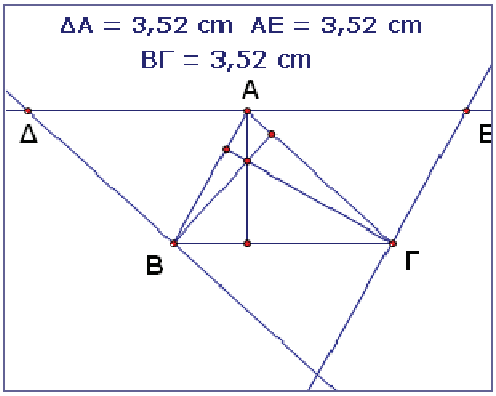
Κατά τον Paul Drijvers, τα τεχνολογικά μέσα δημιουργούν σημαντικές ευκαιρίες στη σύνδεση των αναπαραστάσεων, των διαφόρων θεματικών περιοχών και των τεχνικών που χρησιμοποιούμε. Επιπλέον τονίζει το ρόλο των εργαλείων αυτών στην κατακόρυφη μαθηματικοποίηση. Για παράδειγμα, η χρήση συμβόλων –σημαντική «κατακόρυφη» μαθηματική δραστηριότητα– διευκολύνεται και κυρίως αποσαφηνίζεται (Kynigos, Alexopoulou & Latsi, 2007). Ένα ακόμη παράδειγμα: Ένας μεταβολέας τιμών δίνει την ευκαιρία στους μαθητές να χειριστούν μία παράμετρο με δυναμικό τρόπο και με αυτό τον τρόπο βοηθά τις δραστηριότητες γενίκευσης.

Μία άλλη δυνατότητα που μας παρέχει η τεχνολογία είναι ότι οι μαθητές διευκολύνονται να κάνουν εικασίες και να τις ελέγξουν, εκτελώντας κατά βούληση πειράματα. Ένα δυναμικό τρίγωνο, στο οποίο έχουμε φέρει τα ύψη, για παράδειγμα, δημιουργεί ένα φαινομενολογικό χώρο, όπου οι αναλλοίωτες σχέσεις μεταξύ των μεγεθών που μεταβάλλονται είναι εμφανείς και ελέγξιμες.

Καθώς οι μαθητές μεταβάλλουν το σχήμα του τριγώνου, τα γεωμετρικά αντικείμενα συμμετέχουν σε ένα φαινόμενο κατά το οποίο μεταβάλλονται τα γραμμικά και γωνιακά του μεγέθη. Τα ύψη που παραμένουν συντρέχοντα, σε μία πολύ μεγάλη «συλλογή» τριγώνων, επιτρέπουν στους μαθητές να εξάγουν άτυπα συμπεράσματα για τη συγκεκριμένη ιδιότητα του ύψους, αλλά και για τη θέση του ορθόκεντρου, όταν το τρίγωνο είναι οξυγώνιο, ορθογώνιο ή αμβλυγώνιο.



Τα άτυπα αυτά συμπεράσματα θα μπορούσαν με την καθοδήγηση του διδάσκοντα να μετασχηματιστούν σε αυστηρά μαθηματικά, όταν οι μαθητές κατασκευάσουν παράλληλες από τις κορυφές προς τις απέναντι πλευρές, εκτελέσουν μετρήσεις των τμημάτων που δημιουργούνται και διαπιστώσουν την ύπαρξη παραλληλογράμμων στο σχήμα. Από το σημείο αυτό αρχίζει η απόδειξη της εικασίας που έχουν διατυπώσει.



Οι δυνατότητες οπτικοποίησης και δυναμικής αναπαράστασης δημιουργούν τις κατάλληλες συνθήκες για την κατασκευή μοντέλων και τη μελέτη τους.

Εδώ ίσως εντοπίζεται ένα κεντρικό σημείο συνάντησης της τεχνολογίας με την RME. Η κατασκευή δυναμικών μοντέλων και προσομοιώσεων δημιουργεί ένα ευνοϊκό περιβάλλον για την εκδήλωση και των δύο μορφών μαθηματικοποίησης (Keisoglou & Kynigos, 2006). Καταρχήν δίνονται στους μαθητές πολλαπλές ευκαιρίες να ανταλλάξουν ιδέες και να διαπραγματευτούν τα φαινόμενα που παρουσιάζονται στην οθόνη, καθώς μελετούν την προσομοίωση. Η δυνατότητα να μετασχηματίσουν την αρχική κατασκευή κατά βούληση επιτρέπει τη μελέτη της μαθηματικής δομής, την ανακατασκευή και τη γενικευμένη χρήση της.

Σύνοψη
Τα «ρεαλιστικά μαθηματικά» είναι μία ανθρώπινη δραστηριότητα η οποία εξελίσσεται σε δύο κατευθύνσεις, την οριζόντια και την κατακόρυφη. Η Ρεαλιστική Μαθηματική Εκπαίδευση (RME) θέτει τους μαθητές στο κέντρο των δραστηριοτήτων, δίνει έμφαση στις άτυπες και διαισθητικές τους προσεγγίσεις και θεωρεί το διδάσκοντα ως οργανωτή και καθοδηγητή των μαθητών στην πορεία τους προς την ανακατασκευή της μαθηματικής γνώσης σε προσωπικό επίπεδο. Η χρήση της τεχνολογίας έχει πολλά να προσφέρει, όταν είναι ενταγμένη στο πλαίσιο της RME, αφού αναδεικνύει διάφορες πτυχές της, όπως η δημιουργία και η μελέτη μοντέλων και προσομοιώσεων.

B. Η ΔΟΜΗ ΤΟΥ ΕΡΓΟΥ

Η τέχνη και τα μαθηματικά αποτελούν δύο πολιτιστικά προϊόντα τα οποία συχνά αλληλοσυνδέονται και εμπλέκονται με τον ένα ή τον άλλο τρόπο.

Το γεγονός αυτό προσδίδει μια ιδιαίτερη σημασία στη χρήση της τέχνης ως ένα διδακτικό εργαλείο, ένα μέσο για κινητοποίηση των μαθητών προς την κατεύθυνση της διερεύνησης μαθηματικών μοντέλων που συνδέονται με πραγματικές καταστάσεις.

Το παραπάνω πλαίσιο αναφοράς είναι η βάση πάνω στην οποία θα αρθρωθούν οι δραστηριότητες, τόσο στο δημοτικό όσο και στο γυμνάσιο και το λύκειο. Γενικός στόχος είναι οι μαθητές να αναδείξουν-αναδύσουν τα μαθηματικά που βρίσκονται ενσωματωμένα στη διακόσμηση των επιφανειών και στην οπτική μας αντίληψη που αφορά στο χώρο. Η ανάδυση αυτή θα πραγματοποιηθεί, σε κάθε βαθμίδα, έπειτα από διαδικασίες μαθηματικοποίησης φαινομένων και καταστάσεων που σχετίζονται με την τέχνη της διακόσμησης και της προοπτικής.

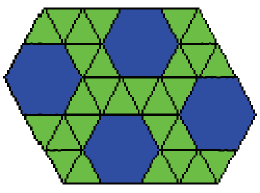
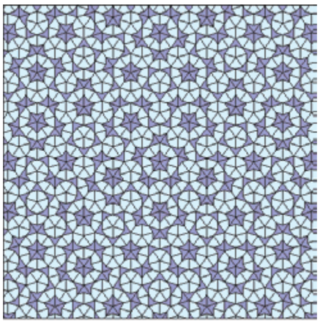
Η βασική ιδέα ολόκληρου του έργου και η διδακτική του ατζέντα συνοψίζεται στην ακολουθία: *παρατήρηση - αναπαραγωγή - δημιουργία*.

Συγκεκριμένα, η *παρατήρηση* αφορά στην αρχική προσέγγιση διακοσμητικών μοτίβων (δημοτικό), έργων τέχνης που σχετίζονται με την προοπτική (γυμνάσιο) και φαινομένων που σχετίζονται με τις ιδιαιτερότητες της οπτικής μας αντίληψης (λύκειο).

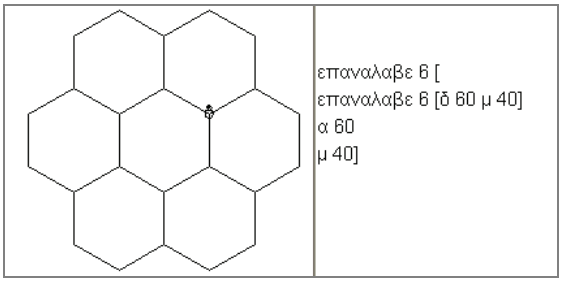
Η *αναπαραγωγή* θα βασιστεί στις δυνατότητες του υπολογιστή και κυρίως σε επιλεγμένα εκπαιδευτικά λογισμικά, όπως το *Αβάκιο*, το *Function Probe* και το *The Geometer's Sketchpad*. Οι μαθητές επίσης θα μελετήσουν και τα Μαθηματικά που είναι ενσωματωμένα στις κατασκευές τις οποίες καλούνται να υλοποιήσουν.

Τέλος η *δημιουργία* θα επιτρέψει στους μαθητές να εκφράσουν τις ιδέες τους και να τις υλοποιήσουν με βάση τα μαθηματικά εργαλεία που έχουν δημιουργήσει.

- Ειδικότερα στο δημοτικό, η παρατήρηση αναφέρεται σε δραστηριότητες με τις οποίες οι μαθητές θα έχουν μία πρώτη επαφή με μοτίβα τα οποία στο εξής θα αποκαλούνται «ψηφοθετήματα» και θα είναι απλά ή περισσότερο πολύπλοκα.

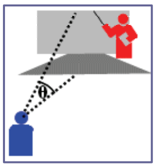
 

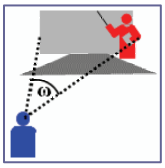
Στόχος είναι οι μαθητές να διαπραγματευτούν τη δομή, να αναπαράγουν ορισμένα μοτίβα με τη βοήθεια του υπολογιστή και τελικά να δημιουργήσουν τις δικές τους συνθέσεις.



- Στο γυμνάσιο η παρατήρηση αναφέρεται σε δύο μορφές δραστηριοτήτων:

α) Σε δραστηριότητες που σχετίζονται με την οπτική μας γωνία με την οποία παρατηρούμε τα αντικείμενα και σε δραστηριότητες που σχετίζονται με την αντίληψη του προοπτικού χώρου.

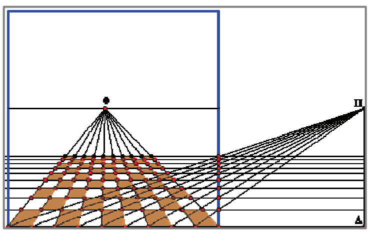


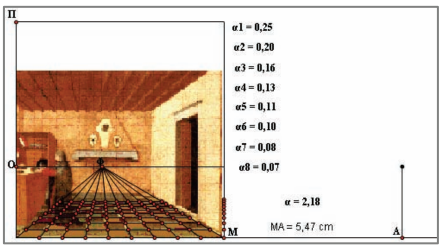


Οι δραστηριότητες αυτές δομούνται με τρόπο που επιτρέπει στο διδάσκοντα να τις χρησιμοποιεί άμεσα στη διδασκαλία εννοιών που αναφέρονται στο Αναλυτικό Πρόγραμμα του σχολείου. Βρίσκονται συγκεντρωμένες σε ένα σενάριο και διακρίνονται σε εκείνες που προορίζονται για την Α΄ Τάξη, σε εκείνες που προορίζονται για τη Β΄ Τάξη και σε εκείνες που προορίζονται για την Γ΄ Τάξη.

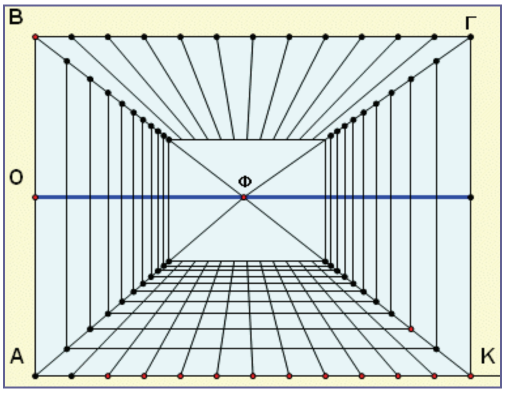
β) Σε δραστηριότητες που σχετίζονται με την προοπτική και τη χρήση στην τέχνη. Οι δραστηριότητες αυτές αποτελούν το υλικό ενός διαθεματικού project που μπορεί να υλοποιηθεί ως «Μαθηματικά και τέχνη».
Οι μαθητές θα μελετήσουν πίνακες στους οποίους η προοπτική δεν στηρίζεται σε συγκεκριμένα μαθηματικά μοντέλα, αλλά και πίνακες στους οποίους χρησιμοποιούνται μαθηματικά μοντέλα.

Η αναπαραγωγή στο γυμνάσιο δεν αναφέρεται ασφαλώς σε κατασκευή πινάκων, αλλά ενός μοντέλου δημιουργίας του προοπτικού δαπέδου και κατ' επέκταση του προοπτικού χώρου. Το μοντέλο αυτό έχει ιστορική σημασία, διότι είναι το πρώτο ολοκληρωμένο που έχει διασωθεί γραπτώς, αλλά κυρίως γιατί είναι απλό και μπορεί να γίνει κατανοητό από τους μαθητές. Το μοντέλο αυτό κατασκευάστηκε από τον Alberti και θα χρησιμοποιηθεί από τους μαθητές για τη μελέτη έργων τέχνης με τη βοήθεια του λογισμικού.



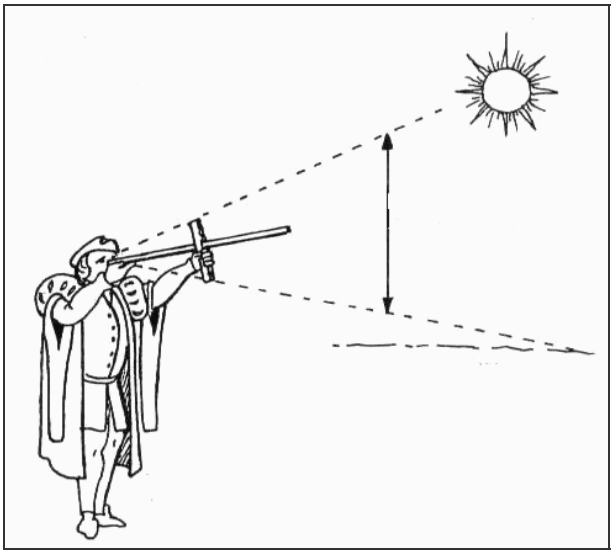


Τέλος, στη φάση της δημιουργίας θα επεκτείνουν το μοντέλο του Alberti, που αναφέρεται στην κατασκευή του προοπτικού δαπέδου, ώστε να κατασκευάσουν τον προοπτικό χώρο και να μελετήσουν τις ιδιότητές του.



- Στο λύκειο η παρατήρηση αναφέρεται σε δύο μορφές δραστηριοτήτων:

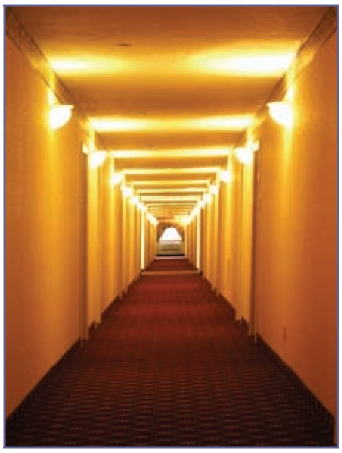
α) Σε δραστηριότητες με τις οποίες οι μαθητές, κατά τη φάση της παρατήρησης, θα μελετήσουν προσομοιώσεις εργαλείων μέτρησης, τα οποία αξιοποιούν την οπτική μας γωνία.



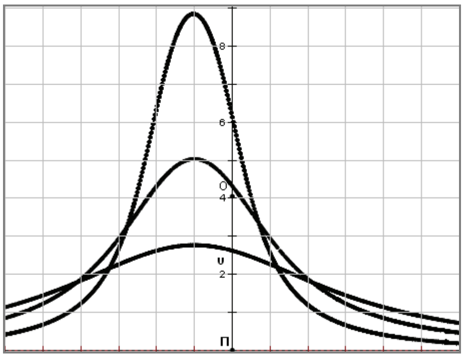
Επιπλέον, οι δραστηριότητες αυτές αναφέρονται σε συγκεκριμένες μαθηματικές έννοιες και προτάσεις, οι οποίες προβλέπονται από το Αναλυτικό Πρόγραμμα του σχολείου. Αυτός είναι και ο λόγος για τον οποίο οι δραστηριότητες αυτές βρίσκονται συγκεντρωμένες σε ένα σενάριο και μπορούν άμεσα να υποστηρίξουν τη διδασκαλία συγκεκριμένων εννοιών που περιέχονται στα σχολικά εγχειρίδια.

β) Σε δραστηριότητες με τις οποίες οι μαθητές θα πειραματιστούν με την οπτική της αντίληψη και θα μελετήσουν τον τρόπο με τον οποίο ο Ευκλείδης μαθηματικοποιεί την αντίληψη αυτή σε δύο προτάσεις στο έργο του *Οπτικά*.

Τα δύο βασικά οπτικά φαινόμενα που θα μελετήσουν είναι η σύγκλιση των παράλληλων γραμμών, που κατευθύνονται από τον παρατηρητή προς το βάθος του ορίζοντα, και η ελάττωση του μεγέθους των αντικειμένων που βρίσκονται σε απόσταση από τον παρατηρητή.



Τα γεωμετρικά μοντέλα που έχει χρησιμοποιήσει ο Ευκλείδης θα αποτελέσουν τη βάση για τη μελέτη της οπτικής της αντίληψης μέσα από δυναμικές υπολογιστικές κατασκευές. Το λογισμικό θα επιτρέψει στους μαθητές να διερευνήσουν μαθηματικά μοντέλα τα οποία στηρίζονται στην έννοια της συνάρτησης και προκύπτουν από τη συσχέτιση των μεγεθών που μεταβάλλονται μέσα στα δυναμικά υπολογιστικά μοντέλα.



Οι συγκεκριμένες δραστηριότητες περιλαμβάνονται σε ένα σενάριο το οποίο θα μπορούσε να υλοποιηθεί σε ένα project διαθεματικού χαρακτήρα, καθώς εμπλέκει και την Ιστορία των Μαθηματικών.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΕΣ ΑΝΑΦΟΡΕΣ

Clements, D. (2000): "From exercises and tasks to problems and projects. Unique contributions of computers to innovative mathematics education", *Journal of mathematical behaviour*, 19, 9-47, Pergamon Press

Doerr. H, English. L. D (2001), "A modelling perspective on students' learning through data analysis", *Proceedings of the 24th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education Utrecht,* The Netherlands

Freudenthal, H. (1991), *Revisiting mathematics education*, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers

Gravemeijer, K. (1994), "Educational development and developmental research in mathematics education", *Journal for Research in Mathematics Education*, 25(5), 443-471

Gravemeijer, K.P.E. (2002), "Emergent modeling as the basis for an instructional sequence on data analysis", *Proceedings of the International Conference of Teaching Statistics*, Cape Town, South-Africa, July 7-12, 2002

Heuvel-Panhuizen, M. van der (2001), "Realistic Mathematics Education as work in progress" in F. L. Lin (Ed.), *Common Sense in Mathematics Education*, 1-40, *Proceedings of 2001 The Netherlands and Taiwan Conference on Mathematics Education*, Taipei, Taiwan, November 19-23, 2001

Heuvel-Panhuizen, M. van der (2003), "The didactical use of models in realistic mathematics education: an example from a longitudinal trajectory on percentage", *Educational Studies in Mathematics*, 54, 9-35, Kluwer Academic Publishers. Netherlands

Kaput, J. (1998), "Technology as a Transformative force in education. What else is needed to make it work", paper for the N.C.T.M 2000 technology working group in May 1998

Keisoglou, S., Kynigos, C. (2006), "Measurements with a physical and a virtual quadrant: students' understandings of trigonometric tangent", *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Prague

Kynigos, C., Alexopoulou, E. & Latsi, M. (2007), "Three dimensional constructions using a co-ordinate system of reference in a computer simulated 3D space", *Proceedings of the 5th CERME Conference (European Society for Research in Mathematics Education)*, Larnaca, Cyprus, February 22-26, 2007

Lange, J. de (1996), "Using and Applying Mathematics in Education" in A.J. Bishop, et al. (eds), 1996, *International handbook of mathematics education*, Part one, 49-97, Kluwer academic publisher

Streefland, Ed. (2000), *Ρεαλιστικά Μαθηματικά στην Πρωτοβάθμια Εκπαίδευση*, επιστημονική επιμέλεια Ευγενία Κολέζα, Leader Books

Treffers, A. (1987), *Three dimensions. A model of goal and theory description in mathematics education: The Wiskobas project*, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers

Paul Drijvers (Τον 1/2008 η διεύθυνση είναι: www.fi.uu.nl/en/fius/materials/drijvers.ppt)

Ο Δ Η Γ Ο Σ Ε Γ Κ Α Τ Α Σ Τ Α Σ Η Σ Κ Α Ι Χ Ρ Η Σ Η Σ

Α. Εγκατάσταση και λειτουργία

Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε το εκπαιδευτικό πακέτο άμεσα, αφού δεν απαιτούνται άλλα λογισμικά για να λειτουργήσει.

- Εισάγετε το CD-ROM στη μονάδα ανάγνωσης CD ή DVD του προσωπικού σας υπολογιστή. Η εφαρμογή θα ξεκινήσει αυτόματα (στην περίπτωση που η δυνατότητα Autorun είναι ενεργοποιημένη).
- Σε περίπτωση που η εφαρμογή δεν ξεκινήσει αυτόματα:
    - Κάντε διπλό κλικ στο εικονίδιο «Ο Υπολογιστής μου»/(My Computer) που βρίσκεται στην επιφάνεια εργασίας (desktop).
    - Στο παράθυρο που θα εμφανιστεί κάντε διπλό κλικ στο εικονίδιο του CD. Στο καινούριο παράθυρο που θα εμφανιστεί κάντε διπλό κλικ στο αρχείο index.html για να ξεκινήσει η εφαρμογή.
- Σε περίπτωση που θέλετε να τρέξετε την εφαρμογή από το σκληρό δίσκο του υπολογιστή σας και όχι από τη μονάδα του CD ή DVD θα πρέπει να αντιγράψετε όλα τα αρχεία και τους φακέλους που περιέχονται στο CD-ROM σε ένα φάκελο στο σκληρό δίσκο του υπολογιστή σας και από εκεί να κάνετε διπλό κλικ στο αρχείο index.html. Μπορείτε, αν θέλετε, να δημιουργήσετε στην επιφάνεια εργασίας μια συντόμευση της εφαρμογής «Ρεαλιστικά Μαθηματικά» (αρχείο index.html), ώστε να έχετε ευκολότερη πρόσβαση στο πρόγραμμα.

Β. Προαπαιτούμενες εφαρμογές

Για να μπορέσετε να δείτε και να εκτυπώσετε τα συνοδευτικά εγχειρίδια (συμπεριλαμβάνονται και τα φύλλα εργασίας) θα χρειαστείτε τον Adobe Reader (έκδοση 5.0 ή μεταγενέστερη). Το λογισμικό αυτό διατίθεται ελεύθερα κι έχει συμπεριληφθεί στο φάκελο Other του CD-ROM.

Τα σενάρια των εκπαιδευτικών δραστηριοτήτων του πακέτου χρησιμοποιούν αρχεία που έχουν κατασκευαστεί με τα λογισμικά: «Περιβάλλον E-SLATE» (Αβάκιο) και «The Geometer's Sketchpad» της Key Curriculum Press. Το πρώτο από τα λογισμικά έχει συμπεριληφθεί στο φάκελο Other του CD-ROM (έκδοση 2.011), ενώ το δεύτερο είναι ήδη διαθέσιμο σε όλα τα σχολεία.

Γ. Ελάχιστες απαιτήσεις συστήματος

- Λειτουργικό σύστημα: Windows 98/NT/2000/Me/XP/Vista
- Επεξεργαστής: Pentium III 500Mhz
- Μνήμη RAM: 32MB
- CD-ROM: 4x
- Πρόγραμμα περιήγησης στο διαδίκτυο: Internet Explorer ή Mozilla Firefox
- Ελεύθερος χώρος στο σκληρό δίσκο για την εγκατάσταση: -

ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΕΣ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ ΓΙΑ ΤΟ ΔΗΜΟΤΙΚΟ

1.1 Εισαγωγή

Η διδασκαλία στα σχολεία σήμερα είναι συχνά μετωπική και στατική. Επιπλέον, η παραδοσιακή εκπαίδευση έχει αποτύχει στο να καλλιεργήσει στους μαθητές μια ενεργητική - διερευνητική στάση απέναντι στη μάθηση. Η γνώση που παρέχεται είναι αποστασιοποιημένη και φορμαλιστική, ενώ απουσιάζουν ουσιαστικές προσπάθειες εποικοδομητικής σύνδεσης διαισθήσεων και άμεσης καθημερινής εμπειρίας με τις τυπικές μεθόδους και τις αφηρημένες μαθηματικές - συμβολικές αναπαραστάσεις.

Παράλληλα, ο τρόπος με τον οποίο ορίζουμε τη γνώση και τους μηχανισμούς ανάπτυξής της έχει άμεσες επιπτώσεις στις παιδαγωγικές, διδακτικές και ερευνητικές μας επιλογές. Για παράδειγμα, σήμερα η ιδέα ότι τα παιδιά κατασκευάζουν τα δικά τους μαθηματικά θεωρείται δεδομένη στη μαθηματική εκπαιδευτική έρευνα και γενικότερα στη μαθηματική εκπαίδευση, γεγονός που παλιότερα δεν ίσχυε. Σε έναν κόσμο που οι βεβαιότητες σπανίζουν, η γνώση θεωρείται ότι προκύπτει μέσω μιας κυκλικής διαδικασίας που περιλαμβάνει εικασίες, υποθέσεις, απορρίψεις και επαληθεύσεις. Ταυτόχρονα, προωθείται μια «φαλιμπιλιστική» θεώρηση της επιστημονικής γνώσης, σύμφωνα με την οποία η επιστημονική αλήθεια έχει αναπόφευκτα λανθασμένες διαστάσεις και υπόκειται ανά πάσα στιγμή σε διορθώσεις.

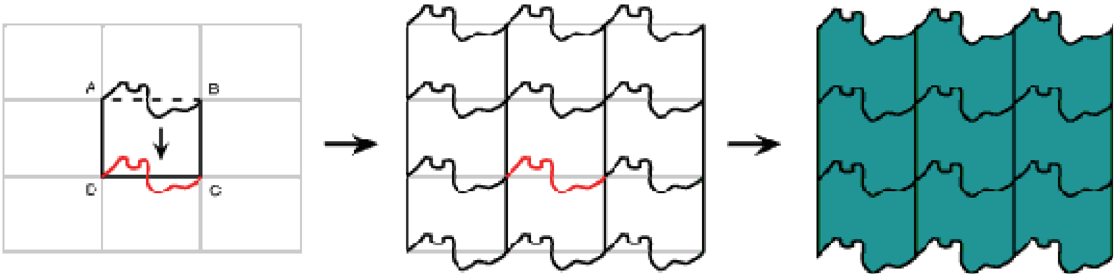
Με τα εκπαιδευτικά σενάρια για το δημοτικό, που θα παρουσιαστούν αναλυτικά στη συνέχεια, στοχεύουμε όχι στην παροχή αφηρημένης - πληροφορικής γνώσης, αλλά στη δημιουργία ενός εναλλακτικού περιβάλλοντος μάθησης για την ανάδειξη, την εφαρμογή και τον έλεγχο των διαισθήσεων των μαθητών και στην ενεργητική κατασκευή της γνώσης. Οι σύγχρονες τεχνολογίες μπορούν να προσφέρουν στην εκπαίδευση υπολογιστικά εργαλεία με μοναδικά καινοτόμα χαρακτηριστικά και να διευκολύνουν την ενασχόληση των μαθητών με μαθηματικά μοντέλα, δομές και προσομοιώσεις που βρίσκουν εφαρμογή και σε εξω-μαθηματικές περιοχές. Τα σενάρια που αναπτύχθηκαν για το δημοτικό προσεγγίζουν πολυδιάστατα τη Γεωμετρία και ειδικότερα τα κανονικά πολύγωνα και τις εμπλεκόμενες έννοιες (π.χ. είδη γωνιών, μέγεθος γωνιών, μήκη πλευρών κ.λπ.), έχοντας ως πλαίσιο αναφοράς μια μορφή τέχνης που είναι διεθνώς γνωστή με τον όρο «tessellation», ενώ στα ελληνικά έχει αποδοθεί με τον όρο «επαναλαμβανόμενα ψηφοθετήματα».

Στο παρόν εγχειρίδιο που απευθύνεται στον εκπαιδευτικό γίνεται αρχικά μια σύντομη εισαγωγή στην έννοια και στις διάφορες εκφάνσεις των επαναλαμβανόμενων ψηφοθετημάτων/tessellations στην τέχνη και την καθημερινή ζωή, καθώς και στον τρόπο που συνδέονται με τη γεωμετρία. Στη συνέχεια, τα εκπαιδευτικά σενάρια για το δημοτικό θεμελιώνονται διδακτικά και παιδαγωγικά και αναδεικνύεται η πρόσθετη διδακτική τους αξία. Ακολουθεί αναλυτική περιγραφή των δραστηριοτήτων κάθε σεναρίου που περιλαμβάνει: α) συνοπτική παρουσίαση διδακτικών στόχων και φάσεων της διδακτικής πορείας, β) φύλλο εργασίας που προορίζεται για τους μαθητές, γ) σημειώσεις πάνω στο φύλλο εργασίας που απευθύνονται στο διδάσκοντα. Τέλος, παρατίθενται ένας οδηγός χρήσης του *Αβακίου*, προσαρμοσμένος στις ανάγκες εφαρμογής των σεναρίων του δημοτικού και στα προγράμματα σε γλώσσα Logo, που αναμένεται να κατασκευάσουν οι μαθητές, καθώς και όσα χρησιμοποιούνται έτοιμα στις διαδικασίες *Μυστηρίου*. (πρόκειται για τα τρία αρχεία Mistirio1, Mistirio2 και Mistirio3 του συνοδευτικού λογισμικού).

1.2 Επαναλαμβανόμενα ψηφοθετήματα / tessellation

Με τον όρο «tessellation» αναφερόμαστε σε κάθε επαναλαμβανόμενο πρότυπο (pattern) από αλληλεμπλεκόμενα σχήματα. Πρόκειται για μια επικάλυψη επιφάνειας με επαναλαμβανόμενα πολύγωνα ή άλλα σχήματα, με τέτοιον τρόπο, ώστε να μην υπάρχουν κενά ή αλληλεπικαλύψεις. Ο όρος αυτός συχνά χρησιμοποιείται ως συνώνυμος του όρου «tiling», ο οποίος αναφέρεται στη χρήση πολυγώνων για την επικάλυψη επιφανειών και αποτελεί υποκατηγορία των επαναλαμβανόμενων μοντέλων/tessellations. Ο όρος «tessellate» προέρχεται από την ελληνική λέξη «τέσσερα» και αρχικά αναφερόταν στη διάταξη μικρών τετραγώνων ή κυβικών πλακιδίων με τρόπο που να δημιουργείται ένα μωσαϊκό. Προφανώς, η προέλευση του όρου συνδέεται με το γεγονός ότι είναι πιο εύκολο να συνταιριαστούν πλακίδια σε σχήμα τετραγώνου.

Για τη δημιουργία tessellation έχουν χρησιμοποιηθεί διάφορες τεχνικές, όπως εκείνη της συμμετρίας ως προς άξονα, της ανάκλασης, της περιστροφής ή της παράλληλης μετατόπισης.



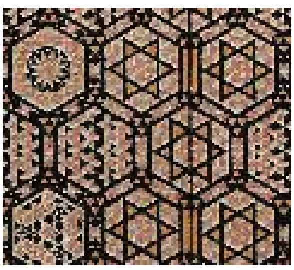
Εικόνα 1: Παράδειγμα δημιουργίας tessellation με την τεχνική της μετατόπισης.

Εξαιρετικής αισθητικής διακοσμητικά επαναλαμβανόμενα μοντέλα από γεωμετρικά σχήματα συναντά κανείς στην ισλαμική τέχνη, λόγω της απαγόρευσης αναπαράστασης σκηνών από το φυσικό κόσμο στο Ισλάμ. Εξαιτίας αυτής της απαγόρευσης, οι καλλιτέχνες του Ισλάμ είναι ασύγκριτοι στη χρήση επαναλαμβανόμενων γεωμετρικών σχεδίων και μωσαϊκών.

Ο Ολλανδός M. C. Escher είναι ένας από τους καλλιτέχνες που έγιναν ιδιαίτερα διάσημοι για τις δημιουργίες tessellations. Στην πρώτη επίσκεψή του στην Alhambra[1] της Ισπανίας το 1922, ο Escher εντυπωσιάστηκε από τα μαυριτανικά μωσαϊκά. Ο Escher έδωσε τη δική του προοπτική στα αφηρημένα γεωμετρικά σχήματα που είχε δει. Συνδυάζοντας τη δημιουργικότητα με τη βαθιά γνώση των μαθηματικών, άρχισε να πειραματίζεται με σχήματα και αντικατοπτρισμούς ειδώλων. Σταδιακά οι καλλιτεχνικές του δημιουργίες άρχισαν να αλλάζουν: αντί να ζωγραφίζει αυτό που έβλεπε, ο Escher άρχισε να εκφράζει τις ιδέες που είχε στο μυαλό του και να δημιουργεί οπτικές απάτες και περίτεχνα επαναλαμβανόμενα μοντέλα (tessellations) με τη μορφή ψαριών, πουλιών, εντόμων κ.λπ.

Εικόνα 2: Τρία δείγματα της δουλειάς του Escher.

Στις δραστηριότητες του δημοτικού θα ασχοληθούμε με τη δημιουργία επαναλαμβανόμενων μοντέλων, με βασική ψηφίδα τα κανονικά πολύγωνα. Η πιο απλή περίπτωση είναι η χρήση ενός και μόνο κανονικού πολυγώνου. Το είδος αυτό του επαναλαμβανόμενου μοντέλου είναι γνωστό με τον όρο «regular tessellation». Μπορεί όμως κάθε είδος κανονικού πολυγώνου να δημιουργήσει επαναλαμβανόμενο μοντέλο; Μέσα από διαδικασίες δοκιμής και πλάνης θα διαπιστώσουμε ότι τα τετράγωνα και τα ισοσκελή τρίγωνα μπορούν να δημιουργήσουν επαναλαμβανόμενα μοντέλα, ενώ, για παράδειγμα, τα πεντάγωνα και τα επτάγωνα δεν μπορούν.

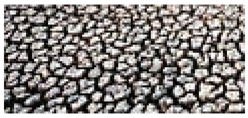


Εικόνα 3(α): Κανονικά εξάγωνα από μωσαϊκό σε σπίτι του Καΐρου.

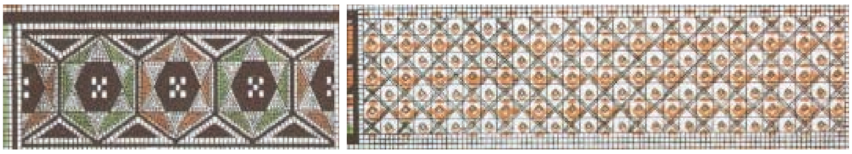
Εικόνα 3(β): Βυζαντινό: κάθε ισοσκελές τρίγωνο έχει χωριστεί σε μικρότερα ισοσκελή τρίγωνα.

[1] Τον 1/2008 η διεύθυνση του παλατιού Αλάμπρα (Γρανάδα, Ισπανία) είναι: http://library.thinkquest.org/16661/gallery/26.html, όπως αυτός παρουσιάζεται στη βιβλιοθήκη του μαθητικού διαγωνισμού ThinkQuest της Oracle.

Εικόνα 4: Η ίδια η φύση δημιουργεί επαναλαμβανόμενα μοντέλα. Κηρήθρα, ένα επαναλαμβανόμενο μοντέλο από κανονικά εξάγωνα.

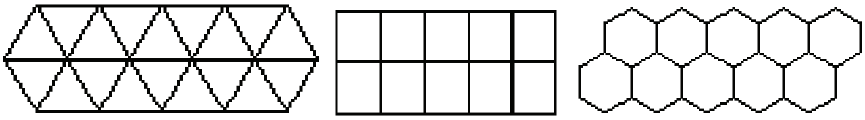


Εικόνα 5: Ένα μη κανονικά επαναλαμβανόμενο μοντέλο, ξερής λάσπης. Σε αντίθεση με όλα τα προηγούμενα μοντέλα, εδώ κάθε ψηφίδα είναι διαφορετική.



Εικόνα 6: Τμήματα από ψηφιδωτό δάπεδο της Πομπηίας με εξάγωνα και τετράγωνα.

Σε μια επικάλυψη με κανονικά πολύγωνα γύρω από μια κορυφή, χωρίς κενά ή αλληλοεπικαλύψεις, όπου χρησιμοποιούμε ένα μόνο είδος κανονικών πολυγώνων, η εσωτερική γωνία πρέπει να είναι διαιρέτης του 360. Ο τύπος που ισχύει για τον υπολογισμό της εσωτερικής γωνίας ενός κανονικού πολυγώνου είναι: [(n-2)*180]/n ή [n*180-360]/n, όπου n ο αριθμός των πλευρών του πολυγώνου. Τα μόνα κανονικά σχήματα που δημιουργούν tessellations είναι το ισόπλευρο τρίγωνο, το τετράγωνο και το κανονικό εξάγωνο.



Εικόνα 7: Κανονικά επαναλαμβανόμενα ψηφοθετήματα – regular tessellations.

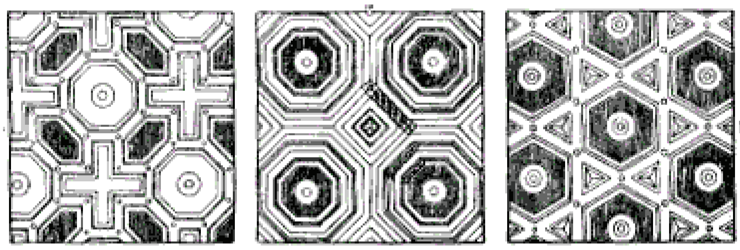
Παρατηρώντας τις παραπάνω εικόνες, διαπιστώνουμε ότι ενώ τα τετράγωνα δημιουργούν το ένα με το άλλο σειρές, τα τρίγωνα και τα εξάγωνα δημιουργούν ένα επαναλαμβανόμενο μοτίβο, μέσω μετατόπισης. Επίσης, έξι τρίγωνα δημιουργούν ένα εξάγωνο. Έτσι, λοιπόν, τα κανονικά επαναλαμβανόμενα μοντέλα με ισόπλευρα τρίγωνα και κανονικά εξάγωνα είναι στην ουσία παρόμοια.

Επόμενο βήμα είναι να διερευνήσουμε ποιοι συνδυασμοί κανονικών πολυγώνων μπορούν να δημιουργήσουν επαναλαμβανόμενα μοντέλα. Με τον όρο «semiregular tessellations» αναφερόμαστε σε επαναλαβανόμενα μοντέλα που χρησιμοποιούν περισσότερα από ένα είδος κανονικών πολυγώνων με τέτοιον τρόπο, ώστε η διευθέτηση των πολυγώνων γύρω από κάθε κορυφή να παραμένει η ίδια. Για να βρούμε ποιοι συνδυασμοί κανονικών πολυγώνων μπορούν να δημιουργήσουν επαναλαμβανόμενα ψηφοθετήματα για επικάλυψη επιφανειών, θα πρέπει πρώτα να βρούμε ποιοι συνδυασμοί κανονικών πολυγώνων έχουν άθροισμα 360^o γύρω από μια κορυφή.

αριθμός πλευρών	εσωτερικές γωνίες (μοίρες)
3	60
4	90
5	108
6	120
7	128
8	135
9	140
10	144
11	150
…	…
N	180(n-2)/n

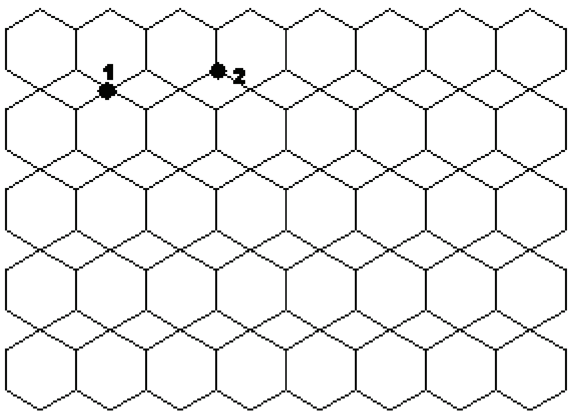
Εικόνα 8: Οι εσωτερικές γωνίες κανονικών πολυγώνων.

Δεδομένου ότι οι εσωτερικές γωνίες των κανονικών πολυγώνων είναι πάντα μικρότερες των 180^o, προκύπτει ότι σε κάθε κορυφή πρέπει να συναντώνται τρία τουλάχιστον διαφορετικά πολύγωνα.



Εικόνα 9: Tessellations με περισσότερα του ενός πολύγωνα.

Επαναλαμβανόμενα μοντέλα, χωρίς κενά και αλληλοεπικαλύψεις, μπορούν να δημιουργηθούν και από συνδυασμούς κανονικών πολυγώνων που η διευθέτησή τους διαφέρει από κορυφή σε κορυφή. Για παράδειγμα, στην παρακάτω εικόνα γύρω από την κορυφή 1 υπάρχουν: ένα εξάγωνο, ένας ρόμβος, ένα εξάγωνο και ένας ρόμβος, ενώ στην κορυφή 2 η σειρά έχει αλλάξει και έχουμε ένα εξάγωνο, ένα εξάγωνο και ένα ρόμβο. Αυτού του είδους τα επαναλαμβανόμενα μοντέλα, όπου υπάρχουν δύο ή τρεις διαφορετικές διευθετήσεις γύρω από μια κορυφή, είναι γνωστά με τον όρο «demiregular tessellations».



Εικόνα 10: Demiregular tessellation.

Υπάρχουν δεκατέσσερις τουλάχιστον συνδυασμοί demiregular tessellations, ενώ ο τρόπος και η διαδικασία προσδιορισμού τους είναι κυρίως μέσω δοκιμής και πλάνης.

Ένας εν ζωή μαθηματικός με αρκετή δουλειά στο χώρο είναι ο Roger Penrose, ο οποίος στα φοιτητικά του χρόνια είχε εντυπωσιαστεί από τη γεωμετρία της κάλυψης επιπέδων. Άρχισε, λοιπόν, να διερευνεί συνδυασμούς σχημάτων που θα δημιουργούσαν επαναλαμβανόμενα μοντέλα, καταλήγοντας στην έρευνα μοντέλων που δεν επαναλαμβάνονται. Ασχολήθηκε με μοντέλα για την επικάλυψη επιφανειών με γεωμετρικά σχήματα που, ενώ σου δίνουν την εντύπωση επαναλαμβανόμενου μοντέλου, στην πραγματικότητα δεν υπάρχει μια βασική επαναλαμβανόμενη ψηφίδα. Αρχικά βρήκε κάποιους συνδυασμούς που αποτελούνταν από πολλά σχήματα. Σιγά σιγά περιόρισε σε έξι τα σχήματα που χρησιμοποιούσε και τέλος σε δύο. Τα σχέδιά του είναι εντυπωσιακά σε ομορφιά και απλότητα. Στο παρακάτω σχέδιο χρησιμοποιεί δύο τετράπλευρα, γνωστά με την ονομασία «a kite and a dart», τα οποία επαναλαμβάνονται, χωρίς όμως να συνδέονται με «κανονικό» τρόπο. Αξιοσημείωτο είναι το γεγονός ότι οι αναλογίες των πλευρών των τετραπλεύρων αυτών ακολουθούν το χρυσό κανόνα. Η δουλειά του Penrose είναι αντιπροσωπευτική αυτού του είδους tessellation, η οποία είναι γνωστή με τον όρο ψευδο-περιοδικά (quasi-periodic).

Εικόνα 11: Δείγμα από τη δουλειά του R. Penrose, πάτωμα στο Carleton College των ΗΠΑ.

1.3 Παιδαγωγική και διδακτική θεμελίωση των σεναρίων του δημοτικού

1.3.1 Ο ρόλος του εκπαιδευτικού

Στο πλαίσιο των δραστηριοτήτων που θα παρουσιαστούν παρακάτω, ο ρόλος του εκπαιδευτικού δεν είναι εκείνος του δασκάλου-παντογνώστη, ο οποίος θα μεταδώσει τις γνώσεις του στους αδαείς μαθητές· παραμένει ωστόσο κομβικός. Έρευνες έχουν δείξει ότι οι νέες τεχνολογίες δεν μπορούν να χρησιμοποιηθούν αποτελεσματικά, χωρίς την ενεργό παρουσία του δασκάλου, οι διδακτικές παρεμβάσεις του οποίου είναι καθοριστικής σημασίας για την εξέλιξη των μαθησιακών δραστηριοτήτων (J. Olive, 2000, De Corte E. et all, 1996). Ο δάσκαλος κατευθύνει τις «παιγνιώδεις δραστηριότητες» προς τις προσδοκώμενες και προσχεδιασμένες δραστηριότητες (Hoyles & Sutherland, 1989), παρέχοντας στο μαθητή την κατάλληλη συναισθηματική και διανοητική υποστήριξη.

Ο δάσκαλος δεν νοείται απλά ως διευκολυντής, αλλά ως ένας καταλυτικός παράγοντας στη μαθησιακή διαδικασία, όπου συμμετέχει ενεργά ως πιο ικανός συνεργάτης στη Ζώνη της Επικείμενης Ανάπτυξης (Vygotsky, 1973), παρέχοντας στους μαθητές του νοητικές σκαλωσιές (Wood, 1988). Ιδιαίτερη έμφαση δίνεται στο λόγο που χρησιμοποιεί ο δάσκαλος, ο οποίος φαίνεται να έχει μοναδικά χαρακτηριστικά που συντελούν στη σημειωτική διαμεσολάβηση, στην ενοποίηση, στη νοηματοδότηση και στην εσωτερίκευση της γνώσης (Crook, 1994, Littleton, 1999). Ο δάσκαλος φροντίζει ώστε η κατασκευή της γνώσης να ξεπερνά την προσωπική, εμπειρική διερεύνηση, δίνοντας πρόσβαση στις έννοιες και στα μοντέλα της συμβατικής επιστήμης. Ταυτόχρονα, πρέπει να επισημανθεί ότι η έναρξη και το κλείσιμο μιας δραστηριότητας που αξιοποιεί τις υπολογιστικές τεχνολογίες δεν ταυτίζεται με την έναρξη και το κλείσιμο του υπολογιστή. Η διασύνδεση μιας τέτοιας δραστηριότητας, με σχετικές δραστηριότητες που προηγήθηκαν και ακολουθούν με απλά τυχαία περιστατικά που ανακύπτουν στη διάρκεια του μαθήματος, κρίνεται σκόπιμη.

1.3.2 Ο ρόλος των μαθητών

Το σύνολο των γνώσεων των διαφόρων επιστημονικών κλάδων έχει προκύψει από την έρευνα, ενώ η σύγχρονη ερευνητική μεθοδολογία στηρίζεται όλο και περισσότερο στην ομαδική εργασία. Οι μαθητές πρέπει να αποκτήσουν επίγνωση του εξελικτικού χαρακτήρα της επιστήμης, των ερευνητικών μεθόδων που χρησιμοποιεί και της συστηματικότητας που τη χαρακτηρίζει. Αυτό μπορεί να γίνει μόνο μέσα από την εξάσκηση των παιδιών στην ομαδοσυνεργατική προσέγγιση των εννοιών διαφόρων γνωστικών πεδίων, μέσα από την εναλλαγή ρόλων και καθηκόντων και από τη χρήση συγκεκριμένων εργαλείων. Στο πλαίσιο των σεναρίων που θα περιγραφούν, οι μαθητές δρουν και παράλληλα συζητούν και επιχειρηματολογούν.

Στα ερωτήματα που ανακύπτουν αυθόρμητα ή που θέτει ο εκπαιδευτικός, οι μαθητές συζητούν πρώτα στο πλαίσιο των ομάδων και κατόπιν γίνεται συζήτηση σε επίπεδο τάξης, για να διαμορφωθούν τα τελικά συμπεράσματα.

Ο λόγος που αναπτύσσουν οι μαθητές θεωρείται ισχυρότατο διαμεσολαβητικό εργαλείο που ενεργοποιεί τη σκέψη και συμβάλλει καθοριστικά στην απόδοση νοήματος στις ενέργειες των μαθητών, αναδεικνύοντας τις ερμηνείες που δίνουν στα φαινόμενα. Παράλληλα, συνειδητοποιούν το εύρος των διαφορετικών ιδεών που οι συμμαθητές τους μπορεί να χρησιμοποιούν στην προσπάθειά τους να εξηγήσουν τα ίδια φαινόμενα και αναπτύσσουν τη συνήθεια να ελέγχουν και να αξιολογούν αυτές τις εξηγήσεις. Τα λάθη των μαθητών «αποποινικοποιούνται» και θεωρούνται αφετηρία για τη μελέτη αυτού που συνέβη, την κατανόηση του λάθους και, μέσα από την κατανόηση, τη διόρθωσή του.

1.3.3 Τα εκπαιδευτικά σενάρια για το δημοτικό

Για το δημοτικό έχουν αναπτυχθεί δύο εκπαιδευτικά σενάρια. Το πρώτο εκπαιδευτικό σενάριο με τίτλο «Επαναλαμβανόμενα Ψηφοθετήματα» απευθύνεται σε μαθητές των δύο τελευταίων τάξεων του δημοτικού και υλοποιείται μέσα από μια σειρά τριών εκπαιδευτικών δραστηριοτήτων, οι οποίες, παρά την αυτοτέλειά τους, είναι την ίδια στιγμή στενά συνδεδεμένες με τις άλλες δραστηριότητες που υλοποιούν το σενάριο. Στο πρώτο εκπαιδευτικό σενάριο οι μαθητές έρχονται σε επαφή (μέσα από διάφορες πηγές, ηλεκτρονικές και μη) με μια μορφή τέχνης που είναι διεθνώς γνωστή με τον όρο tessellation. Αυτή η μορφή τέχνης γίνεται η αφορμή και το πλαίσιο μέσα στο οποίο θα προσεγγιστούν έννοιες συναφείς με τα κανονικά πολύγωνα. Θα χρησιμοποιηθεί το *Αβάκιο* και η γλώσσα Logo για την κατασκευή και εικαστική επεξεργασία επαναλαμβανόμενων μοντέλων από τετράγωνα και ισόπλευρα τρίγωνα. Για την υλοποίηση του σεναρίου απαιτούνται έξι τουλάχιστον διδακτικές ώρες. Καλό θα ήταν, επίσης, οι μαθητές να έχουν μια πρώτη επαφή με τον τρόπο που «καθοδηγούμε» τη Χελώνα με απλές εντολές, πριν από την υλοποίηση του πρώτου εκπαιδευτικού σεναρίου.

Το δεύτερο εκπαιδευτικό σενάριο με τίτλο «Επαναλαμβανόμενα μοντέλα πολυγώνων» απευθύνεται σε μαθητές των δύο τελευταίων τάξεων του δημοτικού και υλοποιείται μέσα από δύο εκπαιδευτικές δραστηριότητες. Η τέχνη των επαναλαμβανόμενων ψηφοθετημάτων (tessellations) εξακολουθεί να αποτελεί την αφόρμηση και το πλαίσιο στο οποίο θα διερευνηθούν περαιτέρω ιδιότητες των κανονικών πολυγώνων (π.χ. εσωτερικές και εξωτερικές γωνίες πολυγώνων). Σε αυτό το σενάριο ο υπολογιστής χρησιμοποιείται κυρίως για να εμπλέξει τους μαθητές σε μια διαδικασία διερεύνησης και πειραματισμού, μέσω ειδικά κατασκευασμένων προγραμμάτων. Για την υλοποίηση του παρόντος σεναρίου απαιτούνται έξι τουλάχιστον διδακτικές ώρες.

Καθένα από τα εκπαιδευτικά σενάρια συνάδει με τους στόχους του ΑΠΠΣ για τα μαθηματικά, σε ό,τι αφορά άμεσα στη γεωμετρία (π.χ. αναγνώριση σχημάτων σε ένα σύνθετο περιβάλλον ή ανάλυση ενός σύνθετου γεωμετρικού σχήματος), αλλά και σε ό,τι αφορά στην καλλιέργεια ενός επιστημονικού τρόπου σκέψης που έχει να κάνει, για παράδειγμα, με την αναγνώριση σχέσεων μεταξύ των μαθηματικών και άλλων γνωστικών περιοχών ή με τη συσχέτιση πραγματικών αντικειμένων με μαθηματικές έννοιες.

1.3.4 Πρόσθετη μαθησιακή αξία των εκπαιδευτικών σεναρίων

Τα εκπαιδευτικά σενάρια για το δημοτικό που θα αναπτυχθούν παρακάτω, συνδυάζοντας τα καινοτόμα χαρακτηριστικά και τις δυνατότητες των νέων τεχνολογιών με το κατάλληλο παιδαγωγικό και διδακτικό πλαίσιο, δίνουν έμφαση και αξιοποιούν μια σειρά πτυχών της μαθησιακής διαδικασίας που, αν και είναι ιδιαίτερα σημαντικές για τη μάθηση στην εκπαιδευτική πράξη, στην τάξη είναι υποβαθμισμένες.

- **Δράση – Βίωμα**

Οι μαθητές καλούνται σε όλες τις δραστηριότητες να δράσουν: να παρατηρήσουν έργα τέχνης, να εντοπίσουν τη βασική επαναλαμβανόμενη ψηφίδα, να δημιουργήσουν τα δικά τους επαναλαμβανόμενα ψηφοθετήματα κ.λπ.

- **Πειραματισμός**

Οι μαθητές πειραματίζονται σε όλες τις επιμέρους δραστηριότητες. Για παράδειγμα, με τις διαδικασίες *Μυστηρίου* του δεύτερου σεναρίου προσπαθούν να καταλήξουν σε συμπεράσματα σχετικά με το πότε ένα είδος κανονικών πολυγώνων ή ένας συνδυασμός κανονικών πολυγώνων μπορεί να δημιουργήσει ένα επαναλαμβανόμενο μοντέλο γύρω από μια κορυφή.

- **Έρευνα – Αναζήτηση**

Ο πειραματισμός εντάσσεται σε αυτή την ευρύτερα διατυπωμένη πτυχή, στην οποία δίνεται έμφαση στη στάση του μαθητή απέναντι στη γνώση. Η μετάδοση ενός μεθοδολογικού πλαισίου, διερευνητικού χαρακτήρα, είναι ιδιαίτερα σημαντική. Οι μαθητές χρησιμοποιούν το διαδίκτυο για την εύρεση επαναλαμβανόμενων ψηφοθετημάτων, αναζητούν τη βασική επαναλαμβανόμενη ψηφίδα κ.λπ.

- **Δημιουργία – «Μαστόρεμα»**

Πρόκειται για τη μάθηση μέσα από την κατασκευή (Resnick et al., 1996). Οι μαθητές μπορούν να επεξεργάζονται τις κατασκευές τους εν είδει μαστορέματος. Η γλώσσα Logo που θα χρησιμοποιηθεί για την κατασκευή απλών επαναλαμβανόμενων μοντέλων επιτρέπει στους μαθητές να δημιουργήσουν τις δικές τους κατασκευές, συνδυάζοντας τον προγραμματισμό με το μαθηματικό φορμαλισμό.

- **Διάλογος – Επιχειρηματολογία**

Στόχος των εκπαιδευτικών σεναρίων που αναπτύχθηκαν είναι να αποτελέσουν αφορμή για εποικοδομητικό και εστιασμένο διάλογο στο πλαίσιο της συνεργατικής μάθησης. Οι μαθητές δουλεύουν σε ομάδες, συζητούν σε επίπεδο ομάδας, αλλά και τάξης, καταλήγουν σε συμπεράσματα και παρουσιάζουν τη δουλειά τους στους συμμαθητές τους.

- **Δημιουργία νοημάτων και Σύγχρονες Τεχνολογίες**

Η πτυχή αυτή αφορά στη διαδικασία δημιουργίας νοημάτων από το μαθητή. Η μάθηση, έτσι κι αλλιώς, συνίσταται στη δημιουργία νοημάτων και όχι στην απομνημόνευση έτοιμων και αφηρημένων πληροφοριών. Με τα εργαλεία ψηφιακής τεχνολογίας μπορεί να δημιουργηθεί ένα μαθησιακό περιβάλλον, όπου οι μαθητές θα έχουν πολύ περισσότερες και συχνότερες ευκαιρίες να αναπτύξουν νοήματα. Οι σημάνσεις του υπολογιστικού εργαλείου που χρησιμοποιείται, του *Αβακίου* (π.χ. ο κιναισθητικός χειρισμός των μεταβλητών ενός προγράμματος, η γραφική ανατροφοδότηση κ.λπ.) και η δυνατότητα πρόσβασης στη βαθιά δομή, μέσω της γλώσσας προγραμματισμού Logo (Kynigos, 1995), δίνει τη δυνατότητα συγκερασμού, συμβολικής και διαισθητικής μορφής, έκφρασης της σκέψης. Οι μαθητές ξεκινούν, καθοδηγώντας τη Χελώνα με απλές εντολές της γλώσσας Logo, που μοιάζουν πολύ με τη φυσική καθημερινή γλώσσα, π.χ. δεξιά, αριστερά, μπροστά, πίσω, ενώ, συγχρόνως, συντονίζουν το σώμα τους με τη θέση και την κατεύθυνση της Χελώνας στο δισδιάστατο χώρο του Καμβά. Σταδιακά δημιουργούν μικρά υπολογιστικά προγράμματα με επαναλαμβανόμενες διαδικασίες και μεταβλητές. Έτσι, η κατασκευή ενός σχήματος παρουσιάζεται μέσα από δύο διαφορετικές αναπαραστάσεις, τη γεωμετρική και τη συμβολική. Το *Αβάκιο* προσθέτει τη δυνατότητα δυναμικού χειρισμού των γεωμετρικών κατασκευών, μέσω του άμεσου κιναισθητικού χειρισμού με το Μεταβολέα των μεταβλητών του συμβολικού κώδικα που καθοδηγεί την κίνηση της Χελώνας.

Επιπλέον, οι διαδικασίες *Μυστηρίου* του δεύτερου σεναρίου μπορούν να αντιμετωπιστούν ως ειδικές μορφές εξωτερικών δυναμικών αναπαραστάσεων που καθιστούν δυνατή την αλληλεπίδραση ανάμεσα στις δράσεις του μαθητή και στα μοντέλα που έχουν ενσωματωθεί στο πρόγραμμα (Edwards, 1998), προκαλώντας αλλαγές στον τρόπο επίλυσης προβλημάτων, αφού παρέχουν στους μαθητές αυξημένες δυνατότητες δοκιμής και πλάνης (Noss, Heally & Hoyles, 1997). Οι δυνατότητες που δίνονται στους μαθητές και ο τρόπος που αυτοί αλληλεπιδρούν με τα αναπαραστασιακά χαρακτηριστικά ενός υπολογιστικού εργαλείου επηρεάζουν σαφώς τη δραστηριότητα που θα αναπτύξουν ατομικά και συλλογικά, άρα και την κατασκευή της γνώσης.

1.3.5 Αξιολόγηση των προτεινόμενων σεναρίων

Διαμορφωτική αξιολόγηση

Οι δραστηριότητες που προτείνονται σε κάθε σενάριο και τα φύλλα εργασίας που τις συνοδεύουν είναι ενδεικτικά. Ο εκπαιδευτικός μπορεί και πρέπει να τα προσαρμόσει στις ιδιαιτερότητες της τάξης του. Η διαμορφωτική αξιολόγηση διεξάγεται καθ' όλη τη διάρκεια των δραστηριοτήτων και στοχεύει στον εντοπισμό των αδύναμων σημείων, ώστε να γίνουν οι αναγκαίες τροποποιήσεις στη δομή και στο περιεχόμενο των διδακτικών ενεργειών και των μαθητικών δραστηριοτήτων. Ο εκπαιδευτικός κρατά προσωπικές σημειώσεις. Η μαγνητοφώνηση ή βιντεοσκόπηση μπορούν να βοηθήσουν στην κατεύθυνση αυτή. Επιπλέον, σημαντική πηγή πληροφοριών είναι οι σημειώσεις των ίδιων των μαθητών και οι απαντήσεις που θα καταγραφούν στα φύλλα εργασίας.

Η αλληλόδραση των μαθητών και ο λόγος που θα αρθρώσουν στο πλαίσιο των δραστηριοτήτων και γύρω από τον υπολογιστή χρήζει λεπτομερούς διερεύνησης, καθώς αναμένεται να δείξει το επίπεδο της κατανόησης. Ο εκπαιδευτικός θα πρέπει να ελέγξει αν ο λόγος που αρθρώνεται στο πλαίσιο των ομάδων συντελεί στο συντονισμό των απόψεων και στην κατασκευή κοινά αποδεκτών νοημάτων ή αν απλά πρόκειται για ένα λόγο «αθροιστικό»[2] ή, στη χειρότερη περίπτωση, «εριστικό»[3] (Mercer, 1996). Ο

[2] «Αθροιστικός» θεωρείται ο λόγος που αναπτύσσουν οι συνομιλητές, όταν προσθέτουν κάτι στα σχόλια του προηγούμενου ομιλητή, χωρίς να έχουν επεξεργαστεί κριτικά ό,τι έχει ειπωθεί.

[3] «Εριστικός» θεωρείται ο λόγος που χαρακτηρίζεται από διαφωνία, χωρίς διάθεση εποικοδομητικής κριτικής και συγκερασμού απόψεων.

εντοπισμός των γνωστικών συγκρούσεων –από τις οποίες αναπόφευκτα περνά κάθε γόνιμη εκπαιδευτική διαδικασία– και ο τρόπος που οι μαθητές τις χειρίστηκαν (αφομοίωση της νέας γνώσης ή συμμόρφωση των γνωστικών δομών) είναι καίριας σημασίας. Αυτό που ενδιαφέρει δεν είναι η γνώση ξερών γεγονότων (factual knowledge), αλλά η αναλυτική σκέψη και η απόκτηση δεξιοτήτων για την κατασκευή γνώσης. Παράλληλα αξιολογούνται οι ψυχοκινητικές και συναισθηματικές συνιστώσες: οι δράσεις που οι μαθητές ανέλαβαν και το πόσο ευχαριστήθηκαν την όλη δραστηριότητα. Υπήρξε, λοιπόν, ενδιαφέρον; Τα παιδιά συνεργάστηκαν κατά τη διάρκεια της εφαρμογής, κατά τη συμπλήρωση των φυλλαδίων και κατά την τελική παρουσίαση της δουλειάς τους;

Αθροιστική αξιολόγηση

Όπως υπογραμμίζει ο Wood (Becta, 1998), το ενδιαφέρον δεν επικεντρώνεται στο αν οι μαθητές μαθαίνουν, αλλά στο τι και στον τρόπο με τον οποίο το μαθαίνουν. Η ενεργητική μάθηση και η εφαρμογή της σε ολιστικά, διαθεματικά και πραγματιστικά περιβάλλοντα δεν μπορεί να μετρηθεί με τα παραδοσιακά τεστ. Άλλωστε, οι μέχρι τώρα έρευνες (McFarlane, 2001) δείχνουν ότι οι νέες τεχνολογίες δεν υποστηρίζουν την εκμάθηση «πληροφοριακών γνώσεων» (factual knowledge) καλύτερα από τις παραδοσιακές μεθόδους (πολλές φορές μάλιστα συμβαίνει ακριβώς το αντίθετο). Η συμβολή τους εστιάζεται στην ανάπτυξη δεξιοτήτων και ικανοτήτων που χαρακτηρίζουν την ενεργητική μάθηση, π.χ. κατανόηση εννοιών, επίλυση προβλημάτων, κριτική ικανότητα, διαχείριση πληροφοριών.

Οι στρατηγικές επίλυσης προβλημάτων που ακολούθησαν οι μαθητές, καθώς και οι δράσεις που ανέλαβαν, δεν μπορούν να αξιολογηθούν, ανεξάρτητα από τον υπολογιστικό εργαλείο που τις διαμεσολάβησε. Ιδιαίτερα ενδιαφέρον έχει το να δούμε πώς οι μαθητές χειρίστηκαν και προσάρμοσαν το *Αβάκιο* και τις λειτουργικότητές του στους δικούς τους στόχους και ανάγκες και πώς τα νοήματα δομήθηκαν από τα διαθέσιμα εργαλεία. Όπως τονίζει ο diSessa (2000), δεν έχουμε ιδέες τις οποίες κατόπιν εκφράζουμε με τη βοήθεια κάποιου μέσου. Αναπτύσσουμε ιδέες με το συγκεκριμένο μέσο. Ο δάσκαλος μπορεί να εξαγάγει τα συνολικά του συμπεράσματα με βάση τις πληροφορίες που έχει συλλέξει από διαφορετικές πηγές (σημειώσεις, αρχικές και τελικές ιδέες των μαθητών κ.λπ.), καθώς και από τις διαφορετικές μορφές έκφρασης των μαθητών (προφορικός και γραπτός λόγος, κατασκευή παιχνιδιού, επέμβαση στον κώδικα κ.λπ.).

1.4 Πρώτο εκπαιδευτικό σενάριο για το δημοτικό: Επαναλαμβανόμενα ψηφοθετήματα

1.4.1 Πρώτη δραστηριότητα: Επαναλαμβανόμενα ψηφοθετήματα / tessellations στην τέχνη

Στην πρώτη δραστηριότητα οι μαθητές χρησιμοποιούν συγκεκριμένες ιστοσελίδες του διαδικτύου, όπωςκαι διάφορα βιβλία τέχνης, παρατηρούν επαναλαμβανόμενα μοτίβα και εντοπίζουν τη βασική επαναλαμβανόμενη «ψηφίδα». Ταυτόχρονα, μέσα από τις δράσεις που θα αναλάβουν, γίνεται αποσαφήνιση των όρων που θα χρησιμοποιηθούν στη συνέχεια: επαναλαμβανόμενο μοντέλο, tessellation, γεωμετρική τέχνη κ.λπ.

Τάξεις: Ε΄ και ΣΤ΄ Δημοτικού
Υπολογιστικά Εργαλεία: Διαδίκτυο
Προαπαιτούμενα: Ικανότητα χειρισμού παραθυρικού περιβάλλοντος
Διάρκεια: 2 διδακτικές ώρες

Στόχοι ως προς το γνωστικό αντικείμενο[4]
Οι μαθητές:
- Να εξοικειωθούν με τα επαναλαμβανόμενα σχέδια (μοτίβα) σε διάφορες περιόδους και μορφές τέχνης.
- Να αναγνωρίσουν μέσα από την τέχνη γεωμετρικά σχήματα και μοτίβα.
- Να συνδέσουν τα μαθηματικά με διάφορες μορφές τέχνης.
- Να αναζητήσουν και να αναγνωρίσουν διάφορα επαναλαμβανόμενα μοντέλα στο άμεσο περιβάλλον τους.
- Να χρησιμοποιήσουν εξειδικευμένη μαθηματική ορολογία (π. χ. ορολογία σχετική με τα κανονικά πολύγωνα κ.λπ.), για να περιγράψουν διάφορα επαναλαμβανόμενα ψηφοθετήματα.

[4] Οι στόχοι της πρώτης δραστηριότητας συμπίπτουν σε μεγάλο βαθμό με τους στόχους του Κεφαλαίου 24, Ενότητα 41, του εγχειριδίου των Μαθηματικών της Ε΄ Δημοτικού, καθώς και με τους στόχους των κεφαλαίων 53 και 56, Θεματική Ενότητα 5 και 6, αντίστοιχα, του Εγχειριδίου Μαθηματικών της ΣΤ΄ Δημοτικού.

Στόχοι ως προς τη χρήση νέων τεχνολογιών
Οι μαθητές:
- Να χρησιμοποιήσουν τον υπολογιστή για αναζήτηση επαναλαμβανόμενων μοντέλων και έργων τέχνης σε κατάλληλα επιλεγμένες διευθύνσεις.

Στόχοι ως προς τη μαθησιακή διαδικασία
- Συνεργασία και ομαδική δουλειά τόσο σε επίπεδο μικρών ομάδων όσο και σε επίπεδο τάξης.
- Εξάσκηση στο διάλογο και στην επιχειρηματολογία.

Η προτεινόμενη πορεία διδασκαλίας συνοπτικά

Η προτεινόμενη πορεία εφαρμογής της δραστηριότητας περικλείει τέσσερις φάσεις:

Α΄ Φάση: Επαναλαμβανόμενα μοντέλα σε έργα τέχνης
Οι μαθητές παρατηρούν διάφορα έργα τέχνης σε βιβλία, καθώς και στο διαδίκτυο, και προσπαθούν να αναγνωρίσουν τη βασική επαναλαμβανόμενη ψηφίδα. Κατά την επιλογή των δικτυακών τόπων και των βιβλίων τέχνης δόθηκε έμφαση σε έργα τέχνης που ως βασική επαναλαμβανόμενη ψηφίδα έχουν κανονικά πολύγωνα. Αυτό έγινε γιατί η πρώτη δραστηριότητα θεωρείται στο σύνολό της εισαγωγική των δραστηριοτήτων που θα ακολουθήσουν. Οι μαθητές αναγνωρίζουν τα γεωμετρικά σχήματα, χρησιμοποιούν τη σχετική ορολογία και με κατάλληλες παρεμβάσεις του εκπαιδευτικού ανακαλούν συναφείς γνώσεις.

Β΄ Φάση: Επαναλαμβανόμενα σχήματα και επαναλαμβανόμενα ψηφοθετήματα (tessellations)
Σε αυτή τη φάση εστιάζουμε σε έργα τέχνης που μπορούν να θεωρηθούν επαναλαμβανόμενα ψηφοθετήματα (tessellations). Ο όρος αποσαφηνίζεται, σημασιολογικά και ετυμολογικά, ενώ η έννοια κατακτάται μέσα από συγκεκριμένα παραδείγματα και αντιπαραδείγματα που περιλαμβάνονται στα φύλλα εργασίας.

Γ΄ Φάση: Επαναλαμβανόμενα ψηφοθετήματα (tessellations) γύρω μας
Οι μαθητές εφαρμόζουν όσα έμαθαν στις δύο προηγούμενες φάσεις, προσπαθώντας να «ανακαλύψουν» γύρω τους επαναλαμβανόμενα ψηφοθετήματα: στη φύση, στο σχολείο, στο σπίτι. Ένας τοίχος κτισμένος με τούβλα, το σκάκι, το καβούκι της χελώνας είναι μερικά μόνο παραδείγματα που μπορούν να αναφέρουν.

Δ΄ Φάση: Παρουσίαση
Η μαθητές ζωγραφίζουν ένα επαναλαμβανόμενο ψηφοθέτημα και το παρουσιάζουν στους συμμαθητές τους. Με αυτό τον τρόπο τους δίνεται η δυνατότητα να ενιαιοποιήσουν τη γνώση που κατέκτησαν και να χρησιμοποιήσουν το σχετικό λεξιλόγιο.

1.4.2 Φύλλο εργασίας πρώτης δραστηριότητας: Επαναλαμβανόμενα ψηφοθετήματα στην τέχνη

1) Παρατήρησε σε βιβλία τέχνης και στο διαδίκτυο διάφορα έργα τέχνης με επαναλαμβανόμενα σχήματα και κατόπιν συμπλήρωσε τον παρακάτω πίνακα:

Αντικείμενο τέχνης (πίνακας, λιθόστρωτο, μωσαϊκό κ.λπ.)	**Γεωμετρικά σχήματα** που επαναλαμβάνονται

2) Ποια από τα παρακάτω έργα τέχνης έχουν απλά επαναλαμβανόμενα σχήματα και ποια μπορούν να θεωρηθούν επαναλαμβανόμενα ψηφοθετήματα (tessellations);

Με τον όρο tessellation αναφερόμαστε σε κάθε επαναλαμβανόμενο μοτίβο (pattern) από αλληλεμπλεκόμενα σχήματα με τέτοιον τρόπο, ώστε να καλύπτεται μια επιφάνεια χωρίς να υπάρχουν κενά ή επικαλύψεις.

....

....

....

....

....

....

3) Ποιο από τα επαναλαμβανόμενα ψηφοθετήματα/tessellations σου άρεσε περισσότερο και γιατί;

....
....
....

4) Μπορείς να σκεφτείς κάποια επαναλαμβανόμενα ψηφοθετήματα/tessellations που συναντάς καθημερινά στη φύση, στο σπίτι ή στο σχολείο;

....
....
....

5) Μπορείς να ζωγραφίσεις στο παρακάτω πλαίσιο ένα επαναλαμβανόμενο ψηφοθέτημα;

1.4.3 Σημειώσεις για το φύλλο εργασίας της πρώτης δραστηριότητας

Ερώτηση 1: Ενδεικτικά βιβλία που μπορούν να χρησιμοποιηθούν από το δάσκαλο:

1. Σηφουνάκης, Ν., *Τα λιθόστρωτα, Αιγαιοπελαγίτικα και στεριανά,* Αθήνα: Καστανιώτης, 1998.
2. Λουκιανός, Γ., *Οι βοτσαλωτές αυλές των κυκλάδων,* Αθήνα, 1998.
3. Νάκου, Ε., *Εθνικό Αρχαιολογικό Μουσείο,* Αθήνα: Dian Books, 1993.
4. Field, R., *Geometric Patterns: From Islamic Art and Architecture*, Tarquin, 1998.
5. Gerdes, P., *Geometry from Africa: Mathematical and Educational Exploration: The Mathematical Association of America*, 1999.
6. Dueching, H., *Καντίσκυ*, Αθήνα: Γνώση, 2005.
7. Warncke, C., *Πικάσο*, Αθήνα: Γνώση, 2006.
8. Escher, M., *Έσσερ*, Αθήνα: Γνώση, 2005.
9. Fiedl, G., *Κλιμπτ*, Αθήνα: Γνώση, 2006.
10. Πινακοθήκη Νέου Ελληνισμού: Οι Μεγάλοι Έλληνες Ζωγράφοι, *Νίκος Χατζηκυριάκος-Γκίκας*, Αθήνα: Ελληνικά Γράμματα.

Ενδιαφέρουσες ηλεκτρονικές διευθύνσεις (5/2008):

- o http://library.thinkquest.org/16661/gallery
  - a. http://library.thinkquest.org/16661/gallery/grammar/13.html
  - b. http://library.thinkquest.org/16661/gallery/18.html
  - c. http://library.thinkquest.org/16661/gallery/14.html
  - d. http://library.thinkquest.org/16661/gallery/grammar/17.html
  - e. http://library.thinkquest.org/16661/gallery/grammar/10.html
  - f. http://library.thinkquest.org/16661/gallery/grammar/24.html
  - g. http://library.thinkquest.org/16661/gallery/handbook/2.html
  - h. http://library.thinkquest.org/16661/gallery/grammar/25.html

Η πρώτη ηλεκτρονική διεύθυνση που δίνεται παραπάνω είναι η κεντρική διεύθυνση του δικτυακού τόπου Thinkquest που χρηματοδοτείται από το Oracle Educational Foundation με πληθώρα εικόνων από δάπεδα, μωσαϊκά και τάπητες με επαναλαμβανόμενα πρότυπα από τη ρωμαϊκή, την αραβική, την περσική και τη βυζαντινή τέχνη. Οι υπο-διευθύνσεις δίνονται για διευκόλυνση.

- o http://www2.spsu.edu/math/tile/grammar/egypt.htm

  Πρόκειται για μια ενδιαφέρουσα διεύθυνση του Southern Polytechnic State University με επαναλαμβανόμενα πρότυπα από την αιγυπτιακή τέχνη (5/2008).

- o http://www.greatbuildings.com/cgi-bin/gbi.cgi/The_Alhambra.html/cid_2343497.gbi

  Πρόκειται για ένα δικτυακό τόπο της εταιρείας Great Buildings που μας ξεναγεί στα περίφημα μαυριτανικά μωσαϊκά της Αλάμπρα στην Ισπανία (5/2008).

Στόχος της πρώτης ερώτησης είναι να αναγνωρίσουν οι μαθητές γεωμετρικά σχήματα, με έμφαση στα κανονικά πολύγωνα, σε διάφορες μορφές τέχνης και να ανακαλέσουν συναφείς γεωμετρικούς όρους. Τα γεωμετρικά σχήματα που θα εντοπιστούν στα έργα τέχνης μπορεί να επαναλαμβάνονται είτε με τυχαίο τρόπο, όπως συμβαίνει στα έργα του Κλιμτ, είτε με βάση κάποιο συγκεκριμένο πρότυπο-μοτίβο, όπως συμβαίνει στα αγγεία της γεωμετρικής εποχής, είτε να δημιουργούν επαναλαμβανόμενα ψηφοθετήματα/tessellations, όπως συμβαίνει στην αραβική τέχνη. Τόσο τα έργα των κυβιστών Πικάσο και Μπρακ όσο και κάποια του Χατζηκυριάκου-Γκίκα μπορούν πολύ εύκολα να αποτελέσουν τον ενδιάμεσο κρίκο μεταξύ των αφηρημένων γεωμετρικών σχημάτων και των σχημάτων που συναντάμε καθημερινά στο άμεσο περιβάλλον μας.

Ερώτηση 2: Η δεύτερη ερώτηση έχει στόχο την εστίαση σε έργα που μπορούν να θεωρηθούν επαναλαμβανόμενα ψηφοθετήματα/tessellations μέσα από παραδείγματα και αντι-παραδείγματα. Στο φύλλο εργασίας των μαθητών δίνεται ένας σύντομος ορισμός, όμως ο δάσκαλος μπορεί να εμπλουτίσει την αναφορά αυτή, δίνοντας στους μαθητές επιπλέον πληροφορίες (βλ. παρ. 1.2).

1η Εικόνα: Πρόκειται για τον πίνακα με τίτλο «Ερπετά» του Ολλανδού ζωγράφου M. Escher. Γνωστό είναι το λογοπαίγνιο πάνω στον αγγλικό του τίτλο «Rep-tiles», ο οποίος θεωρείται συντόμευση του όρου repeat tiles, δηλαδή επανάληψη πλακιδίων. Ο πίνακας αυτός μπορεί να θεωρηθεί επαναλαμβανόμενο ψηφοθέτημα/tessellation, με βασική επαναλαμβανόμενη φηφίδα το ερπετό το οποίο επαναλαμβάνεται με τέτοιον τρόπο που να μην αφήνει κενά ή να δημιουργεί αλληλοεπικαλύψεις.

2η Εικόνα: Πρόκειται για κοντινή φωτογραφία μιας κηρήθρας. Είναι σαφώς ένα επαναλαμβανόμενο ψηφοθέτημα/tessellation, με βασική ψηφίδα το κανονικό εξάγωνο· ένα έργο τέχνης φτιαγμένο από τη φύση!

3η Εικόνα: Στη φωτογραφία με την ξερή λάσπη δεν έχουμε tessellation, δεν υπάρχει ένα κανονικά επαναλαμβανόμενο σχήμα, καθώς κάθε ψηφίδα έχει διαφορετικό σχήμα.

4η Εικόνα: Πρόκειται για τον πίνακα με τίτλο «Various Circles» του Καντίσκυ. Η επανάληψη κύκλων σε διάφορα μεγέθη γίνεται με τυχαίο τρόπο, οι κύκλοι αλληλοπεπικαλύπτονται, ενώ υπάρχουν και τεράστια κενά μεταξύ τους. Σαφώς, λοιπόν, δεν μπορεί να θεωρηθεί επαναλαμβανόμενο ψηφοθέτημα.

5η Εικόνα: Πρόκειται για αναπαράσταση τμήματος βυζαντινού δαπέδου, αποτελούμενο από ισοσκελή τρίγωνα – κλασική περίπτωση επαναλαμβανόμενου ψηφοθετήματος.

6η Εικόνα: Πρόκειται για τον πίνακα με τίτλο «Μεγάλη Σύνθεση της Ύδρας» του Ν. Χατζηκυριάκου-Γκίκα. Εδώ ο ζωγράφος είναι επηρεασμένος από τις αρχές του κυβισμού. Η επιφάνεια καλύπτεται από γεωμετρικά σχήματα, το έργο όμως δεν μπορεί να θεωρηθεί επαναλαμβανόμενο ψηφοθέτημα, καθώς δεν υπάρχει μια βασική επαναλαμβανόμενη ψηφίδα.

Ερώτηση 3: Η ερώτηση αυτή είναι ανοικτή και στοχεύει στο να εμπλέξει το προσωπικό στοιχείο. Οι μαθητές θα εκφράσουν τη γνώμη τους και θα επιχειρηματολογήσουν σχετικά. Αυτό μπορεί να αποτελέσει αφορμή για έμμεση επανάληψη γεωμετρικών όρων και ιδιοτήτων των γεωμετρικών σχημάτων.

Ερώτηση 4: Οι μαθητές θα πρέπει να εφαρμόσουν τις γνώσεις τους και να αναζητήσουν επαναλαμβανόμενα ψηφοθετήματα/tessellations στο άμεσο περιβάλλον τους. Το σκάκι, ο τοίχος από τούβλα μιας οικοδομής, το καβούκι της χελώνας, το κουκουνάρι, το χαλί, το κέντημα της γιαγιάς είναι μόνο μερικά από τα επαναλαμβανόμενα ψηφοθετήματα που μπορεί να αναφέρουν.

Ερώτηση 5: Στην ερώτηση αυτή οι μαθητές εμπλέκονται περισσότερο βιωματικά και δημιουργούν ένα δικό τους επαναλαμβανόμενο ψηφοθέτημα. Η συγκεκριμένη δραστηριότητα μπορεί να πραγματοποιηθεί στην ώρα των Καλλιτεχνικών, αρκεί ο δάσκαλος να έχει φροντίσει ώστε να υπάρχει χρονική εγγύτητα με την εκτέλεση των υπόλοιπων τμημάτων της δραστηριότητας.

1.4.4 Δεύτερη δραστηριότητα: Κανονικά επαναλαμβανόμενα ψηφοθετήματα / regular tessellation (1)

Από τη δεύτερη δραστηριότητα και στο εξής, και έχοντας πάντα ως δείγματα συγκεκριμένα έργα τέχνης, οι μαθητές εστιάζουν σε επαναλαμβανόμενα μοντέλα με κανονικά πολύγωνα. Αναγνωρίζουν τη βασική επαναλαμβανόμενη ψηφίδα και, χρησιμοποιώντας, το υπολογιστικό περιβάλλον του *Αβακίου*, προσπαθούν να αναπαραγάγουν το επαναλαμβανόμενο μοντέλο. Στόχος της δεύτερης δραστηριότητας είναι να κατασκευάσουν ένα μοντέλο από επαναλαμβανόμενα τετράγωνα.

Τάξεις: Ε΄ και ΣΤ΄ Δημοτικού
Υπολογιστικά Εργαλεία: *Αβάκιο*
Προαπαιτούμενα: Γνώση βασικών εντολών Logo που αφορούν στον έλεγχο κίνησης της Χελώνας
Διάρκεια: 2 διδακτικές ώρες

Στόχοι ως προς το γνωστικό αντικείμενο[5]
Οι μαθητές:
- Να κατασκευάσουν ένα απλό επαναλαμβανόμενο μοντέλο με βασική ψηφίδα ένα τετράγωνο.

[5] Οι στόχοι της δεύτερης δραστηριότητας συμπίπτουν σε μεγάλο βαθμό με τους στόχους του Κεφαλαίου 56, Θεματική Ενότητα 6, του εγχειριδίου των Μαθηματικών της ΣΤ΄ Δημοτικού. Στο εν λόγω κεφάλαιο προτείνεται η χρήση υπολογιστή για το σχεδιασμό πολυγώνων.

- Να έχουν την ευκαιρία να χρησιμοποιήσουν και να επαναλάβουν συναφείς με την κατασκευή γεωμετρικούς όρους, να διατυπώσουν ή να ανακαλύψουν ιδιότητες των σχημάτων που κατασκευάζουν.
- Να συνδυάσουν την καλλιτεχνική δημιουργία με τα μαθηματικά και τον προγραμματισμό.

Στόχοι ως προς τη χρήση νέων τεχνολογιών

- Άμεσος (bodysyntonic) χειρισμός της Χελώνας, μέσω της γλώσσας προγραμματισμού Logo, για κατασκευή συγκεκριμένου γεωμετρικού σχήματος.
- Δημιουργία προγράμματος (για…τέλος) με επαναλαμβανόμενες διαδικασίες.
- Δημιουργία προγράμματος με παραμετρικές διαδικασίες.
- Χρήση του υπολογιστή για εικαστική επεξεργασία των κατασκευών.
- Εκμάθηση υπολογιστικών εργαλείων, σχετικών με τα μαθηματικά, μέσα από τη χρήση τους.

Ως προς τη μαθησιακή διαδικασία

- Συνεργασία και ομαδική δουλειά τόσο σε επίπεδο μικρών ομάδων όσο και σε επίπεδο τάξης.
- Εξάσκηση στο διάλογο και στην επιχειρηματολογία.

Η προτεινόμενη πορεία διδασκαλίας συνοπτικά

Η προτεινόμενη πορεία εφαρμογής της δραστηριότητας περικλείει πέντε φάσεις:

Α΄ Φάση: Η Χελώνα κατασκευάζει ένα τετράγωνο

Με αφορμή ένα συγκεκριμένο έργο τέχνης, οι μαθητές «καθοδηγούν» τη Χελώνα, ώστε να κατασκευάσει ένα τετράγωνο. Οι εντολές που δίνονται σε αυτή τη φάση είναι απλές και δημιουργούν με τον απλούστερο τρόπο το σχήμα. Οι εντολές αναμένεται να είναι της μορφής:

```
μπροστά 60
δεξιά 90
μπροστά 60
δεξιά 90
μπροστά 60
δεξιά 90
μπροστά 60
δεξιά 90
```

Β΄ Φάση: Δημιουργία τετραγώνου μέσω προγράμματος με επαναλαμβανόμενες διαδικασίες

Οι μαθητές διδάσκονται την έννοια του προγράμματος (για…τέλος) και των επαναλαμβανόμενων διαδικασιών. Ο δάσκαλος τους εισάγει στην έννοια του προγραμματισμού και στη δυνατότητα που μας παρέχει να κατασκευάζουμε με την ίδια διαδικασία το σχήμα μας όσες φορές θέλουμε. Το πρόγραμμα αναμένεται να είναι της μορφής:

```
για τετράγωνο
μπροστά 60
δεξιά 90
μπροστά 60
δεξιά 90
μπροστά 60
δεξιά 90
μπροστά 60
δεξιά 90
τέλος
```

Κατόπιν, και αφού γράψουν στον πίνακα το παραπάνω πρόγραμμα (ή κάποια παραλλαγή αυτού), οι μαθητές καλούνται να εντοπίσουν τι είναι αυτό που επαναλαμβάνεται και να εισάγουν την εντολή «επανάλαβε». Τα προγράμματα που θα δημιουργήσουν αναμένεται να είναι της μορφής:

```
για τετράγωνο
επανάλαβε 4[μπροστά 60 δεξιά 90]
τέλος
```

Γ΄ Φάση – Δημιουργία τετραγώνου μέσω προγράμματος με παραμετρικές διαδικασίες
Στη συνέχεια ο δάσκαλος θέτει στους μαθητές το ερώτημα αν με τα συγκεκριμένα προγράμματα που κατασκεύασαν μπορούν να φτιάξουν τετράγωνα σε διάφορα μεγέθη. Τους ρωτάει επίσης τι θα ήταν αυτό που θα άλλαζε στο προηγούμενο πρόγραμμα, αν ήθελαν να φτιάξουν ένα μεγαλύτερο ή ένα μικρότερο τετράγωνο. Μπορεί επίσης να γράψει στον πίνακα μερικά από τα προγράμματα που δημιούργησαν οι ομάδες στην προηγούμενη φάση και να τους ζητήσει να εντοπίσουν τι είναι αυτό που αλλάζει κάθε φορά. Με αυτό τον τρόπο οι μαθητές εισαγόνται στην έννοια της μεταβλητής και στο συμβολισμό που πρέπει να χρησιμοποιηθεί στη Logo. Το πρόγραμμα που θα προκύψει αναμένεται να είναι της μορφής:

```
για τετράγωνο :πλευρά
επανάλαβε 4[μπροστά :πλευρά δεξιά 90]
τέλος
```

Δ΄ Φάση – Δημιουργία επαναλαμβανόμενου ψηφοθετήματος
Ανάλογα με την ωριμότητα των μαθητών και την προϋπάρχουσα εμπειρία τους, προχωράμε στην κατασκευή επαναλαμβανόμενων ψηφοθετημάτων από τετράγωνα. Οι μαθητές μπορούν να δημιουργήσουν επαναλαμβανόμενα ψηφοθετήματα, κατασκευάζοντας σειρές τετραγώνων, ή να καλύψουν το χώρο γύρω από ένα σημείο (π.χ. το σημείο εκκίνησης της Χελώνας). Τα βήματα που θα ακολουθήσουμε εδώ είναι ανάλογα των τριών πρώτων φάσεων: Αρχικά οι μαθητές τοποθετούν τη Χελώνα, μέσω δοκιμής και πλάνης, στην κατάλληλη θέση, ώστε να επανεκτελέσουν τη διαδικασία «τετράγωνο», ενώ στη συνέχεια μπορούν με τη χρήση μεταβλητών να κατασκευάσουν είτε μια ολόκληρη σειρά τετραγώνων είτε πολλές σειρές τετραγώνων – εφόσον βέβαια έχουν επιλέξει αυτή τη στρατηγική κάλυψης του επιπέδου.

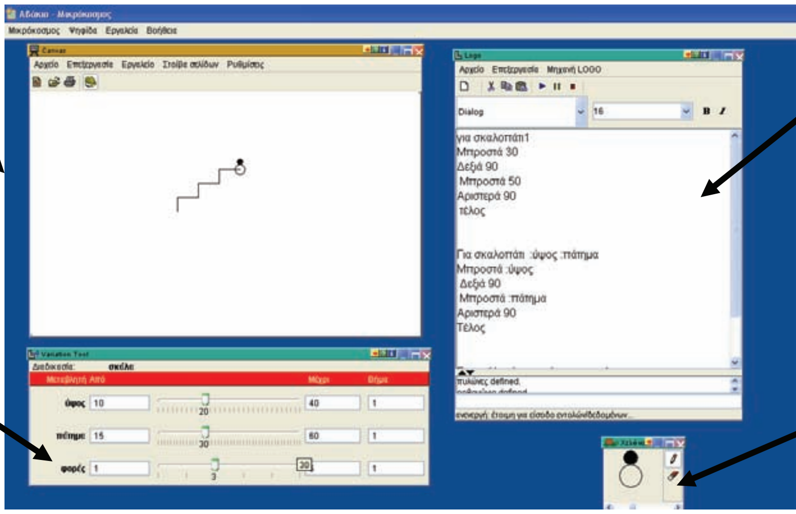
Ε΄ Φάση – Εικαστική επεξεργασία
Οι μαθητές μεταφέρουν τα κατασκευάσματά τους στη σελίδα ζωγραφικής του *Αβακίου* και τα επεξεργάζονται εικαστικά, χρησιμοποιώντας τα διαθέσιμα εργαλεία.

1.4.5 Φύλλο εργασίας δεύτερης δραστηριότητας: Κανονικά επαναλαμβανόμενα ψηφοθετήματα / regular tessellation (1)

Στις δραστηριότητες που ακολουθούν θα δουλέψουμε με το *Αβάκιο*. Ας κάνουμε, όμως, πρώτα μια σύντομη περιήγηση στο περιβάλλον του.

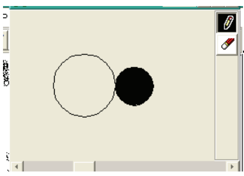
Ψηφίδα Καμβάς
Εδώ ζωγραφίζει η Χελώνα.

Ψηφίδα Logo
Εδώ γράφουμε τις εντολές σε γλώσσα Logo και βλέπουμε τη χελώνα να ζωγραφίζει στον καμβά.



Ψηφίδα Μεταβολέας
Σύρουμε με το ποντίκι την μπάρα και βλέπουμε να αλλάζει το σχήμα στον Καμβά!

Ψηφίδα χελώνα



Για να γράφει η Χελώνα στον Καμβά θα πρέπει να είναι πατημένο το κουμπί με το μαύρο.

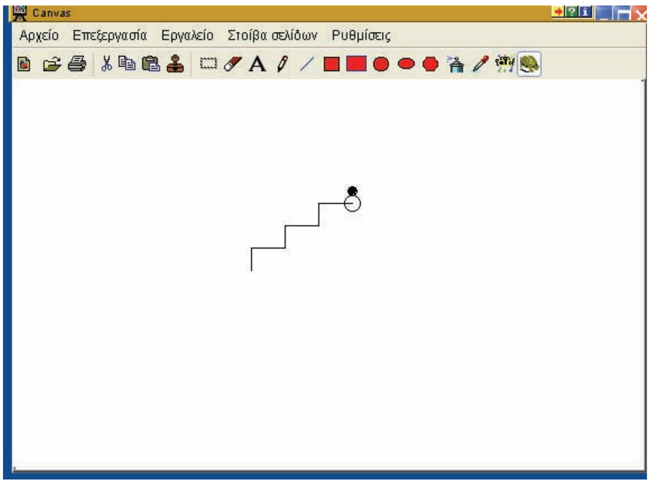
Πίνακας εντολών που μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε στην ψηφίδα Logo

Διαδικασία	**Αποτέλεσμα – γεγονός**
Σβήσεγραφικά	Καθαρίζει τον Καμβά και επαναφέρει τη χελώνα στην αρχική της θέση
Καθάρισε	Καθαρίζει τον Καμβά και αφήνει τη Χελώνα στη θέση που βρίσκεται
Στηναρχή	Επαναφέρει τη Χελώνα στην αρχική της θέση, χωρίς να σβήσει τα γραφικά
Μπροστά α	Μετακινεί τη Χελώνα α βήματα μπροστά κατά τη διεύθυνση της κεφαλής της
Πίσω α	Μετακινεί τη Χελώνα α βήματα προς την αντίθετη κατεύθυνση που δείχνει η κεφαλή της
Δεξιά α	Στρίβει την κεφαλή της Χελώνας α μοίρες δεξιά
Αριστερά α	Στρίβει την κεφαλή της Χελώνας α μοίρες αριστερά
Στυλόπάνω	Ανεβάζει τη γραφίδα της Χελώνας
Στυλόκάτω	Κατεβάζει τη γραφίδα της Χελώνας
Γόμα	Σβήνει τις ήδη σχεδιασμένες γραμμές, αρκεί να ακολουθήσει την εντολή του τύπου (μπροστά 50)

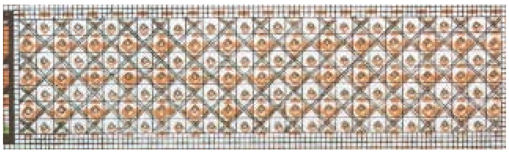
Για να εκτελέσεις μια από τις παραπάνω εντολές, θα πρέπει να πατήσεις το πλήκτρο Enter ή το κουμπί που βρίσκεται στην γραμμή εργαλείων της ψηφίδας Logo.

Το γραφικό αποτέλεσμα στον Καμβά μπορούμε να το επεξεργαστούμε, ακολουθώντας τα παρακάτω βήματα:

- Ορίζουμε «Νέα Σελίδα Ζωγραφικής», πατώντας το πρώτο από αριστερά κουμπί της γραμμής εργαλείων.
- Από το μενού «Στοίβα σελίδων» επιστρέφουμε στη σελίδα χελώνων που ήμασταν προηγουμένως. Στην μπάρα εργαλείων παρατηρούμε ότι έχουν εμφανιστεί νέα εργαλεία. Με το εργαλείο «σφραγίδα» μπορούμε να «σφραγίσουμε» ό,τι κάναμε στην αντίστοιχη σελίδα ζωγραφικής.
- Από το μενού «Στοίβα σελίδων» πηγαίνουμε πάλι στη σελίδα ζωγραφικής. Η Χελώνα παύει να υπάρχει και μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τα εργαλεία ζωγραφικής για να επεξεργαστούμε το σχέδιό μας.



Στην παρακάτω εικόνα βλέπεις τμήμα ενός μωσαϊκού από την Πομπηία. Ποιο γεωμετρικό σχήμα αποτελεί τη βασική επαναλαμβανόμενη ψηφίδα;



....
....
....

1) Μπορείς να χρησιμοποιήσεις τον υπολογιστή σου και το λογισμικό *Αβάκιο*, για να κατασκευάσεις και εσύ ένα παρόμοιο επαναλαμβανόμενο ψηφοθέτημα (tessellation):
   α) Άνοιξε το *Αβάκιο*.
   β) Οδήγησε τη Χελώνα, δίνοντας τις κατάλληλες εντολές στην ψηφίδα Logo, ώστε να σχηματίσει ένα τετράγωνο.
   γ) Στη συνέχεια οδήγησε τη Χελώνα, ώστε να «ζωγραφίσει» ένα επαναλαμβανόμενο ψηφοθέτημα από τετράγωνα.
   δ) Άνοιξε τη σελίδα ζωγραφικής του *Αβακίου* και επεξεργάσου καλλιτεχνικά το επαναλαμβανόμενο ψηφοθέτημα (tessellation) που κατασκεύασες.

2) Εκτύπωσε, κόψε και κόλλησε στο παρακάτω πλαίσιο το επαναλαμβανόμενο ψηφοθέτημά σου.

1.4.6 Σημειώσεις για τη δεύτερη δραστηριότητα

Ερώτηση 1: Η βασική επαναλαμβανόμενη ψηφίδα είναι το τετράγωνο. Κάποιοι μαθητές ενδέχεται να πουν ότι είναι ο ρόμβος, λόγω του «μη συμβατικού» τρόπου παρουσίασης του τετραγώνου. Το γεγονός αυτό μπορεί να αποτελέσει αφορμή για συζήτηση πάνω στις ιδιότητες του τετραγώνου και του ρόμβου.

Ερώτηση 2: Οι μαθητές ανοίγουν το *Αβάκιο* και προσπαθούν να δώσουν εντολές στη Χελώνα να κατασκευάσει ένα τετράγωνο. Ο δάσκαλος εδώ τους εισάγει στην έννοια του προγράμματος και των εντολών «για ονομαδιαδικασίας…τέλος», καθώς και στις έννοιες των επαναλαμβανόμενων και των παραμετρικών διαδικασιών. (Για περισσότερες λεπτομέρειες σχετικά με τις διδακτικές ενέργειες και τα βήματα διδασκαλίας δείτε την παράγραφο 1.4.4. Επίσης, για περισσότερες λεπτομέρειες σχετικά με τον προγραμματισμό με Logo δείτε την παράγραφο 1.6.1.)

Οι μαθητές αναμένεται να δυσκολευτούν στη δημιουργία ενός επαναλαμβανόμενου ψηφοθετήματος από τετράγωνα. Έτσι, ο δάσκαλος θα προχωρήσει όσο επιτρέπει η προϋπάρχουσα γνώση των μαθητών σχετικά με τον προγραμματισμό με τη γλώσσα Logo. Όπως αναφέρεται και στη Φάση Δ΄, παρ. 1.4.4, οι μαθητές μπορούν να δημιουργήσουν, για παράδειγμα σειρές από τετράγωνα, είτε χρησιμοποιώντας την παραμετρική διαδικασία του τετραγώνου, που θα έχουν κατασκευάσει, και τοποθετώντας με απλές εντολές τη Χελώνα στην κατάλληλη θέση, πριν επανεκτελέσουν τη διαδικασία, είτε δημιουργώντας μια νέα παραμετρική διαδικασία, της οποίας υποδιαδικασία θα είναι η διαδικασία που κατασκευάζει τη βασική ψηφίδα, δηλαδή το τετράγωνο. Ενδεικτικά, στις παραγράγους 1.7.1 και 1.7.2, δίνονται οι παραμετρικές διαδικασίες για την κατασκευή των βασικών επαναλαμβανόμενων ψηφίδων και των επαναλαμβανόμενων μοντέλων που χρησιμοποιούνται στο σενάριο αυτό.

Στο τέλος οι μαθητές επεξεργάζονται εικαστικά το επαναλαμβανόμενο ψηφοθέτημα/tessellation που κατασκεύασαν. Ανοίγουν μια καινούρια σελίδα ζωγραφικής και με το σχετικό εργαλείο «σφραγίζουν» το σχέδιό τους στη σελίδα και το επεξεργάζονται εικαστικά με τα διαθέσιμα εργαλεία. (Για περισσότερες λεπτομέρειες σχετικά με την εικαστική επεξεργασία σχεδίων στο *Αβάκιο* δείτε την παράγραφο 1.6.2.) Ο δάσκαλος τους προτρέπει να πειραματιστούν με τη χρήση όσο το δυνατόν περισσότερων εργαλείων της σελίδας ζωγραφικής. Η ενασχόλησή τους με έργα τέχνης στην πρώτη δραστηριότητα μπορεί να αποτελέσει πηγή έμπνευσης. Στη συνέχεια οι μαθητές εκτυπώνουν το σχέδιό τους και το κολλούν στον αντίστοιχο χώρο του φύλλου εργασίας. Αν υπάρχει χρόνος, καλό είναι κάθε ομάδα να δείξει τη δουλειά της στο σύνολο της τάξης.

1.4.7 Τρίτη δραστηριότητα: Κανονικά επαναλαμβανόμενα μοντέλα / regular tessellation (2)

Στην τρίτη δραστηριότητα οι μαθητές εξακολουθούν να κατασκευάζουν επαναλαμβανόμενα μοντέλα με βασική ψηφίδα το ισόπλευρο τρίγωνο. Εδώ προβληματίζονται με έννοιες και ανακαλούν γνώσεις σχετικά με τα είδη τριγώνων ως προς τις γωνίες και ως προς τις πλευρές τους.

Τάξεις: Ε΄ και ΣΤ΄ Δημοτικού
Διάρκεια: 2 διδακτικές ώρες
Λογισμικό: *Αβάκιο*
Προαπαιτούμενα: Γνώση βασικών εντολών Logo που αφορούν στον έλεγχο της κίνησης της Χελώνας

Στόχοι ως προς το γνωστικό αντικείμενο[6]
Οι μαθητές:
- Να κατασκευάσουν ένα απλό επαναλαμβανόμενο μοντέλο με βασική ψηφίδα το ισόπλευρο τρίγωνο.
- Να έχουν την ευκαιρία να χρησιμοποιήσουν και να επαναλάβουν συναφείς με την κατασκευή γεωμετρικούς όρους (π.χ. είδη γωνιών, είδη τριγώνων ως προς τις πλευρές, είδη τριγώνων ως προς τις γωνίες, άθροισμα γωνιών ενός τριγώνου).
- Να ανακαλέσουν ή να ανακαλύψουν διάφορες ιδιότητες των σχημάτων που κατασκευάζουν (π.χ. το μέγεθος των γωνιών, την πρόσθεση και αφαίρεση γωνιών, τις εσωτερικές και εξωτερικές γωνίες), βασιζόμενοι στις γνώσεις τους για την ευθεία γωνία.
- Να συνδυάσουν την καλλιτεχνική δημιουργία με τα μαθηματικά και τον προγραμματισμό.

Στόχοι ως προς τη χρήση νέων τεχνολογιών
- Άμεσος κιναισθητικός (bodysyntonic) χειρισμός της Χελώνας, μέσω της γλώσσας προγραμματισμού Logo για κατασκευή συγκεκριμένου γεωμετρικού σχήματος.
- Δημιουργία προγράμματος (για...τέλος) με επαναλαμβανόμενες διαδικασίες.
- Δημιουργία προγράμματος με παραμετρικές διαδικασίες.
- Χρήση του υπολογιστή για εικαστική επεξεργασία των κατασκευών των μαθητών.
- Εκμάθηση υπολογιστικών εργαλείων, σχετικών με τα μαθηματικά, μέσα από τη χρήση τους.

Στόχοι ως προς τη μαθησιακή διαδικασία
- Συνεργασία και ομαδική δουλειά τόσο σε επίπεδο μικρών ομάδων όσο και σε επίπεδο τάξης.
- Εξάσκηση στο διάλογο και στην επιχειρηματολογία.

Η προτεινόμενη πορεία διδασκαλίας συνοπτικά

Η προτεινόμενη πορεία εφαρμογής της δραστηριότητας περικλείει πέντε φάσεις:

Α΄ Φάση: Η Χελώνα κατασκευάζει ένα ισόπλευρο τρίγωνο
Με αφορμή ένα συγκεκριμένο έργο τέχνης, οι μαθητές προσπαθούν να «καθοδηγήσουν» τη Χελώνα, ώστε να κατασκευάσει ένα ισόπλευρο τρίγωνο. Ωστόσο, είναι πιθανόν να προβληματιστούν σχετικά με τις μοίρες που

[6] Οι εκπαιδευτικοί στόχοι της παρούσας δραστηριότητας συμπίπτουν σε μεγάλο βαθμό με τους στόχους των κεφαλαίων 24, ενότητα 4η, και 41,42,43, ενότητα 7η, του εγχειριδίου των Μαθηματικών της Ε΄ Δημοτικού, καθώς και με τα κεφάλαια 57 και 58, 6η Θεματική Ενότητα της ΣΤ΄ Δημοτικού.

πρέπει να στρίβει κάθε φορά η Χελώνα. Ο προβληματισμός αυτός θα αποτελέσει αφορμή να ανακαλέσουν οι μαθητές τις γνώσεις τους σχετικά με το μέγεθος των εσωτερικών γωνιών ενός ισόπλευρου τριγώνου (διαφορετικά πρέπει να γίνει μικρή εισήγηση από το δάσκαλο). Για να υπολογίσουν σωστά τις μοίρες που πρέπει να στρίβει κάθε φορά η Χελώνα, θα πρέπει να κάνουν τη διάκριση ανάμεσα στις εσωτερικές και εξωτερικές γωνίες ενός σχήματος, καθώς και στον τρόπο υπολογισμού των παραπληρωματικών γωνιών, χωρίς όμως να δώσουν έμφαση στη σχετική ορολογία. Οι εντολές που δίνονται σε αυτή τη φάση είναι απλές και κατασκευάζουν το σχήμα με τον απλούστερο τρόπο. Αναμένεται να είναι της μορφής:

```
μπροστά 40
δεξιά 120
μπροστά 40
δεξιά 120
μπροστά 40
δεξιά 120
```

Β΄ Φάση: Δημιουργία ισόπλευρου τριγώνου μέσω προγράμματος με επαναλαμβανόμενες διαδικασίες

Οι μαθητές έχουν ήδη εισαχθεί από την προηγούμενη δραστηριότητα στην έννοια του προγραμματισμού με επαναλαμβανόμενες διαδικασίες. Ο δάσκαλος μπορεί και πάλι να τους βοηθήσει, γράφοντας στον πίνακα μερικά παραδείγματα των προγραμμάτων που δημιούργησαν οι διάφορες ομάδες και να τους ζητήσει να εντοπίσουν τι είναι αυτό που επαναλαμβάνεται. Τα προγράμματα που θα δημιουργήσουν οι μαθητές αναμένεται να είναι της μορφής:

```
για ισόπλευρο_τρίγωνο
επανάλαβε 3[μπροστά 40 δεξιά 120]
τέλος
```

Γ΄ Φάση – Δημιουργία ισόπλευρου τριγώνου μέσω προγράμματος με παραμετρικές διαδικασίες

Στη συνέχεια ο δάσκαλος θέτει στους μαθητές το ερώτημα αν με τα συγκεκριμένα προγράμματα που κατασκεύασαν μπορούν να φτιάξουν ισόπλευρα τρίγωνα σε διάφορα μεγέθη. Τους ρωτάει επίσης τι θα ήταν αυτό που θα άλλαζαν στο προηγούμενο πρόγραμμα, αν ήθελαν να φτιάξουν ένα μεγαλύτερο ή ένα μικρότερο εξάγωνο. Με αυτό τον τρόπο οι μαθητές προβληματίζονται για μια ακόμη φορά για την έννοια της μεταβλητής και προσπαθούν να τη χρησιμοποιήσουν στο πρόγραμμά τους. Το πρόγραμμα που θα προκύψει αναμένεται να είναι της μορφής:

```
για ισόπλευρο_τρίγωνο :πλευρά
επανάλαβε 3[μπροστά :πλευρά δεξιά 120]
τέλος
```

Δ΄ Φάση – Δημιουργία επαναλαμβανόμενου ψηφοθετήματος ισόπλευρων τριγώνων

Ανάλογα με την ωριμότητα των μαθητών και την προϋπάρχουσα εμπειρία τους, προχωράμε στην κατασκευή επαναλαμβανόμενων ψηφοθετημάτων από ισόπλευρα τρίγωνα. Οι μαθητές μπορούν να δημιουργήσουν επαναλαμβανόμενα ψηφοθετήματα, κατασκευάζοντας σειρές τριγώνων, ή να καλύψουν το χώρο γύρω από ένα σημείο (π.χ. το σημείο εκκίνησης της Χελώνας).[7] Τα βήματα που θα ακολουθήσουμε εδώ είναι ανάλογα των τριών πρώτων φάσεων: Αρχικά οι μαθητές τοποθετούν τη Χελώνα, μέσω δοκιμής και πλάνης, στην κατάλληλη θέση, ώστε να επανεκτελέσουν τη διαδικασία «ισόπλευρο_τρίγωνο», ενώ στη συνέχεια μπορούν με τη χρήση μεταβλητών να κατασκευάσουν είτε μια ολόκληρη σειρά ισόπλευρων τριγώνων είτε πολλές σειρές ισόπλευρων τριγώνων – εφόσον βέβαια έχουν επιλέξει αυτή τη στρατηγική κάλυψης επιπέδου.

Ε΄ Φάση – Εικαστική επεξεργασία

Οι μαθητές μεταφέρουν τα κατασκευάσματά τους στη σελίδα ζωγραφικής του *Αβακίου* και τα επεξεργάζονται εικαστικά, χρησιμοποιώντας τα διαθέσιμα εργαλεία.

[7] Η αναγκαία συνθήκη για τη δημιουργία επαναλαμβανόμενων ψηφοθετημάτων με κανονικά πολύγωνα είναι η κάλυψη του χώρου γύρω από μια κορυφή. Στη συνέχεια το επαναλαμβανόμενο ψηφοθέτημα μπορεί να επεκταθεί απεριόριστα.

1.4.8 Φύλλο εργασίας τρίτης δραστηριότητας: Κανονικά επαναλαμβανόμενα ψηφοθετήματα / regular tessellation (2)

Εικόνα 1: Βυζαντικό μωσαϊκό, διαθέσιμο ηλεκτρονικά. Η διεύθυνση τον 1/2008 είναι: http://library.thinkquest.org/16661/gallery/grammar/13.html.

Εικόνα 2: Τμήμα του στεγάστρου που σκεπάζει την αυλή του Βρετανικού Μουσείου.

1) Ποιο γεωμετρικό σχήμα αποτελεί τη βασική επαναλαμβανόμενη ψηφίδα στις παραπάνω εικόνες;

....

....

....

2) Μπορείς να χρησιμοποιήσεις τον υπολογιστή σου και το λογισμικό *Αβάκιο*, για να κατασκευάσεις και εσύ ένα παρόμοιο επαναλαμβανόμενο ψηφοθέτημα (tessellation):

α) Άνοιξε το λογισμικό *Αβάκιο*.

β) Οδήγησε με τις κατάλληλες εντολές τη Χελώνα στην ψηφίδα Logo, για να σχηματίσει ένα ισόπλευρο τρίγωνο.

γ) Οδήγησε τη Χελώνα, ώστε να «ζωγραφίσει» ένα επαναλαμβανόμενο ψηφοθέτημα από ισόπλευρα τρίγωνα.

δ) Άνοιξε τη σελίδα ζωγραφικής του *Αβακίου* και επεξεργάσου καλλιτεχνικά το επαναλαμβανόμενο ψηφοθέτημα (tessellation) που κατασκευάσεις.

3) Εκτύπωσε, κόψε και κόλλησε στο παρακάτω πλαίσιο το επαναλαμβανόμενο ψηφοθέτημά σου.

1.4.9 Σημειώσεις για την τρίτη δραστηριότητα

Ερώτηση 1: Η βασική επαναλαμβανόμενη ψηφίδα είναι το ισόπλευρο τρίγωνο. Όσον αφορά στη δεύτερη εικόνα από το στέγαστρο στην αυλή του Βρετανικού Μουσείου, γνωστού και ως «The Great Court of the British Museum», θα πρέπει να επισημανθεί ότι αν και έχει κατασκευαστεί εξ ολοκλήρου από τριγωνικού σχήματος γυάλινα πλακίδια, υποστηριζόμενα από ένα χαλύβδινο πλέγμα, δεν θεωρείται τυπικό παράδειγμα επαναλαμβανόμενου ψηφοθετήματος, αφού, για να δημιουργηθεί η αίσθηση του τρισδιάστατου της οροφής, τα πλακίδια δεν είναι πανομοιότυπα. Στο σημείο αυτό οι μαθητές μπορούν να ανακαλέσουν τις γνώσεις τους σχετικά με τα είδη των τριγώνων ως προς τις γωνίες και ως προς τις πλευρές, δίνοντας έμφαση στην ειδική περίπτωση του ισόπλευρου τριγώνου και στις ιδιότητές του.

Ερώτηση 2: Οι μαθητές ανοίγουν το *Αβάκιο* και προσπαθούν να δώσουν εντολές στη Χελώνα να κατασκευάσει ένα ισόπλευρο τρίγωνο. Το πρόβλημα που αναμένεται να αντιμετωπίσουν, ιδιαίτερα όσοι δεν έχουν προϋπάρχουσα εμπειρία με τη Logo, είναι ο αριθμός των μοιρών που πρέπει να στρίψει η Χελώνα, καθώς, για να «γράψει» την εσωτερική γωνία ενός σχήματος, στην πραγματικότητα στρίβει την παραπληρωματική της γωνία. Μια ενδιαφέρουσα δραστηριότητα που θα μπορούσε να βοηθήσει τους μαθητές να εστιάσουν στις εξωτερικές γωνίες –σε περίπτωση που τους δυσκολεύει η κίνηση της χελώνας– είναι να κόψουν με το ψαλίδι τους ένα ισόπλευρο τρίγωνο που θα έχουν σχεδιάσει σε χαρτί. Το χέρι τους, καθώς στρίβουν το ψαλίδι στις γωνίες, διαγράφει στην ουσία την εξωτερική γωνία του σχήματος.

Σχεδιάζοντας τα κατάλληλα σχήματα στον πίνακα, γίνεται διάκριση μεταξύ εσωτερικών, εξωτερικών και παραπληρωματικών γωνιών. Χωρίς να αναφερθεί ιδιαίτερα στην ορολογία, ο εκπαιδευτικός μπορεί να στηριχτεί στις γνώσεις των παιδιών σχετικά με την «ευθεία» γωνία ($180^{O)}$. Έρευνες έχουν δείξει ότι συχνά οι μαθητές αντιλαμβάνονται τη γωνία ως δύο τεμνόμενες ημιευθείες και όχι ως ένα τμήμα του επιπέδου. Ο χώρος που περιβάλλει το σχήμα γίνεται αντιληπτός ως κενός και περιορισμένος από τις γραμμές των σχημάτων. Με τη δραστηριότητα αυτή δίνεται μια καλή ευκαιρία να εξασκηθούν οι μαθητές στην ανάλυση και σύνθεση γεωμετρικών σχημάτων και στη σύνδεση εικονιστικής αντίληψης με την προτασιακή και μαθηματική δομή της γλώσσας Logo.

Στην προηγούμενη δραστηριότητα οι μαθητές εισήχθησαν στην έννοια του προγράμματος και των εντολών «για ονομαδιαδικασίας…τέλος», καθώς και στις έννοιες των επαναλαμβανόμενων και των παραμετρικών διαδικασιών. Σε αυτή τη δραστηριότητα θα εξοικειωθούν περισσότερο, αφού θα κατασκευάσουν ένα επαναλαμβανόμενο ψηφοθέτημα με ένα πιο περίπλοκο σχήμα, το ισόπλευρο τρίγωνο. (Για περισσότερες λεπτομέρειες σχετικά με τις διδακτικές ενέργειες και τα βήματα κατασκευής με προγραμματισμό της βασικής επαναλαμβανόμενης ψηφίδας δείτε την παράγραφο 1.4.7, Φάσεις: Α΄, Β΄, Γ΄. Επίσης για τεχνική βοήθεια σχετικά με τον προγραμματισμό στο *Αβάκιο*, δείτε την παράγραφο 1.6.1.)

Οι μαθητές αναμένεται να δυσκολευτούν στη δημιουργία σειρών από ισόπλευρα τρίγωνα. Ο δάσκαλος εδώ θα προχωρήσει όσο επιτρέπει η προϋπάρχουσα γνώση των μαθητών σχετικά με τον προγραμματισμό με τη γλώσσα Logo, καθώς και ο διαθέσιμος χρόνος. Όπως αναφέρεται και στη Φάση Δ΄, παρ. 1.4.7, οι μαθητές μπορούν να δημιουργήσουν σειρές ισόπλευρων τριγώνων είτε χρησιμοποιώντας την παραμετρική διαδικασία του ισόπλευρου τριγώνου, που θα έχουν κατασκευάσει, και τοποθετώντας με απλές εντολές τη Χελώνα στην κατάλληλη θέση, προτού επανεκτελέσουν τη διαδικασία, είτε δημιουργώντας μια νέα παραμετρική διαδικασία, της οποίας υποδιαδικασία θα είναι η διαδικασία που κατασκευάζει τη βασική ψηφίδα, δηλαδή το ισόπλευρο τρίγωνο. Ενδεικτικά, στις παραγράφους 1.7.1 και 1.7.2, δίνονται οι παραμετρικές διαδικασίες για την κατασκευή των βασικών επαναλαμβανόμενων ψηφίδων και των επαναλαμβανόμενων μοντέλων που χρησιμοποιούνται στο σενάριο αυτό.

Στο τέλος οι μαθητές επεξεργάζονται εικαστικά το επαναλαμβανόμενο ψηφοθέτημα/tessellation που κατασκεύασαν. Ανοίγουν μια καινούρια σελίδα ζωγραφικής και με το σχετικό εργαλείο «σφραγίζουν» το σχέδιό τους στη σελίδα και το επεξεργάζονται εικαστικά με τα διαθέσιμα εργαλεία. Στη συνέχεια το εκτυπώνουν και το κολλούν στον αντίστοιχο χώρο του φύλλου εργασίας. (Για τεχνική βοήθεια σχετικά με τη χρήση της ψηφίδας Καμβάς δείτε παράγραφο 1.6.2.) Ο δάσκαλος τους προτρέπει να πειραματιστούν με τη χρήση όσο το δυνατόν περισσοτέρων εργαλείων της σελίδας ζωγραφικής. Η ενασχόλησή τους με έργα τέχνης στην πρώτη δραστηριότητα μπορεί να αποτελέσει πηγή έμπνευσης. Αν υπάρχει χρόνος, καλό είναι κάθε ομάδα να δείξει τη δουλειά της στο σύνολο της τάξης.

Δυνατότητες επέκτασης: Παρόμοιες διδακτικές ενέργειες και εκπαιδευτικές δραστηριότητες μπορούν να αναπτυχθούν και για άλλα κανονικά πολύγωνα. Στις παραγράφους 1.7.1 και 1.7.2 δίνονται οι παραμετρικές διαδικασίες για την κατασκευή των βασικών επαναλαμβανόμενων ψηφίδων και των επαναλαμβανόμενων ψηφοθετημάτων από παραλληλόγραμμα και κανονικά εξάγωνα.

1.5 Δεύτερο εκπαιδευτικό σενάριο για το δημοτικό: Επαναλαμβανόμενα μοντέλα πολυγώνων

1.5.1 Πρώτη δραστηριότητα: Τεθλασμένες γραμμές και κανονικά πολύγωνα

Στην πρώτη δραστηριότητα, έχοντας πάντα ως δείγμα συγκεκριμένα έργα τέχνης, οι μαθητές προβληματίζονται και καταλήγουν σε συμπεράσματα σχετικά με το ποια πολύγωνα και ποιοι συνδυασμοί κανονικών πολυγώνων μπορούν να σχηματίσουν επαναλαμβανόμενα μοντέλα, χωρίς να αφήνουν κενά μεταξύ τους και χωρίς να υπάρχουν αλληλοεπικαλύψεις. Σε αυτή τη δραστηριότητα οι μαθητές χρησιμοποιούν τον υπολογιστή για πειραματισμό και διερεύνηση.

Τάξεις: Ε΄ και ΣΤ΄ Δημοτικού
Διάρκεια: 3 διδακτικές ώρες
Υπολογιστικά Εργαλεία: *Αβάκιο*
Προαπαιτούμενα: Ευχέρεια στο χειρισμό του ποντικιού

Στόχοι ως προς το γνωστικό αντικείμενο[8]
Οι μαθητές:
- Να πειραματιστούν, να προβληματιστούν και να καταλήξουν σε συμπεράσματα σχετικά με τις εσωτερικές γωνίες των κανονικών πολυγώνων.
- Να πειραματιστούν, να προβληματιστούν και να καταλήξουν σε συμπεράσματα σχετικά με το ποια είδη κανονικών πολυγώνων και ποιοι συνδυασμοί κανονικών πολυγώνων μπορούν να σχηματίσουν επαναλαμβανόμενα μοντέλα, χωρίς να αφήνουν κενά μεταξύ τους, γύρω από μια κορυφή.
- Να έχουν την ευκαιρία να χρησιμοποιήσουν και να επαναλάβουν συναφείς με τη διερεύνηση γεωμετρικούς όρους (π.χ. κανονικά πολύγωνα, σύγκριση γωνιών, μέτρηση γωνιών, προσθαφαίρεση γωνιών κ.λπ.).
- Να ανακαλέσουν ή να ανακαλύψουν ιδιότητες των σχημάτων που κατασκευάζουν (εσωτερικές και εξωτερικές γωνίες, εσωτερικές γωνίες ενός κανονικού πολυγώνου).
- Να συνδυάσουν την καλλιτεχνική δημιουργία με τα μαθηματικά και τον προγραμματισμό.

Στόχοι ως προς τη χρήση νέων τεχνολογιών
- Χρήση του υπολογιστή για διερεύνηση μαθηματικών εννοιών.
- Άμεσος κιναισθητικός χειρισμός των αριθμητικών τιμών των μεταβλητών με χρήση του Μεταβολέα, για την κατασκευή κανονικών πολυγώνων και επαναλαμβανόμενων ψηφοθετημάτων/tessellations γύρω από μια κορυφή.
- Χρήση του υπολογιστή για εικαστική επεξεργασία των κατασκευών τους.

Στόχοι ως προς τη μαθησιακή διαδικασία
- Εμπλοκή των μαθητών σε όλα τα στάδια της πειραματικής διαδικασίας (παρατήρηση των μετασχηματισμών της τεθλασμένης γραμμής, εικασία, κατασκευή υποθέσεων, έλεγχος υποθέσεων, εξαγωγή συμπερασμάτων, σταδιακή γενίκευση και διατύπωση κανόνων).
- Συνεργασία, ομαδική δουλειά και εξάσκηση στο διάλογο και στην επιχειρηματολογία, με στόχο την εξαγωγή συμπερασμάτων και κανόνων σχετικά με τα επαναλαμβανόμενα ψηφοθετήματα κανονικών πολυγώνων.

Η προτεινόμενη πορεία διδασκαλίας συνοπτικά

Η προτεινόμενη πορεία εφαρμογής της δραστηριότητας περικλείει πέντε φάσεις:

Α΄ Φάση: Διερεύνηση με τη διαδικασία *Mistirio1*
Στη φάση αυτή οι μαθητές χειρίζονται τις μεταβλητές της έτοιμης διαδικασίας *Mistirio1* που έχει στόχο να προβληματίσει και να ανασύρει τις γνώσεις των μαθητών σχετικά με τις εσωτερικές γωνίες των κανονικών πολυγώνων. Χειριζόμενοι κιναισθητικά, με τη βοήθεια του εργαλείου Μεταβολέας που είναι διαθέσιμο στο *Αβάκιο*, το μέτρο της γωνίας, τον αριθμό των πλευρών και το μήκος της πλευράς του πολυγώνου, οι μαθητές διαπιστώνουν ότι κανονικά πολύγωνα μπορούμε να έχουμε μόνο με συγκεκριμένες εσωτερικές γωνίες. Ανάλογα με τις μοίρες της γωνίας και τον αριθμό των πλευρών που θα καθορίσουν, οι μαθητές θα

[8] Οι στόχοι της παρούσας δραστηριότητας συμπίπτουν σε μεγάλο βαθμό με τους στόχους των κεφαλαίων 56, 57, 58, Ενότητα 6, του εγχειριδίου των Μαθηματικών της ΣΤ΄ Δημοτικού. Ειδικότερα στο κεφάλαιο 56 προτείνεται η χρήση υπολογιστή για το σχεδιασμό πολυγώνων.

δουν το σχήμα να «κλείνει», δημιουργώντας κανονικά πολύγωνα ή απλές τεθλασμένες γραμμές. Η φάση αυτή λειτουργεί εισαγωγικά για τις επόμενες.

Β΄ Φάση: Διερεύνηση με τη διαδικασία *Mistirio2*

Στη συνέχεια οι μαθητές θα χρησιμοποιήσουν τη διαδικασία με τίτλο *Mistirio2* και θα πειραματιστούν πάνω στα είδη των κανονικών πολυγώνων που μπορούν να δημιουργήσουν tessellations γύρω από μια κορυφή. Χειριζόμενοι κιναισθητικά και καθορίζοντας με το εργαλείο Μεταβολέας το είδος του κανονικού πολυγώνου (τρίγωνο, τετράγωνο κ.λπ.), τον αριθμό επανάληψης του συγκεκριμένου πολυγώνου γύρω από μια κορυφή και το μήκος της πλευράς του, θα προσπαθήσουν να δημιουργήσουν ένα επαναλαμβανόμενο ψηφοθέτημα. Μέσα από τον πειραματισμό θα οδηγηθούν στο συμπέρασμα ότι αυτό είναι εφικτό μόνο για συγκεκριμένα είδη κανονικών πολυγώνων και θα ανακαλύψουν τη σχέση που συνδέει την εσωτερική γωνία των πολυγώνων με την κυκλική γωνία.

Γ΄ Φάση – Διερεύνηση με τη διαδικασία *Mistirio3*

Στη φάση αυτή οι μαθητές προβληματίζονται σχετικά με το ποιοι συνδυασμοί κανονικών πολυγώνων μπορούν να δημιουργήσουν tessellation. Έχουν στη διάθεσή τους την έτοιμη διαδικασία *Mistirio3* που τους επιτρέπει να ελέγξουν δυναμικά με το εργαλείο Μεταβολέας τον αριθμό και το είδος των πολυγώνων που επιθυμούν να τοποθετήσουν γύρω από μια κορυφή. Οι μαθητές οδηγούνται και εδώ σε συγκεκριμένα συμπεράσματα για το πότε είναι εφικτό αυτό.

Δ΄ Φάση – Εικαστική επεξεργασία

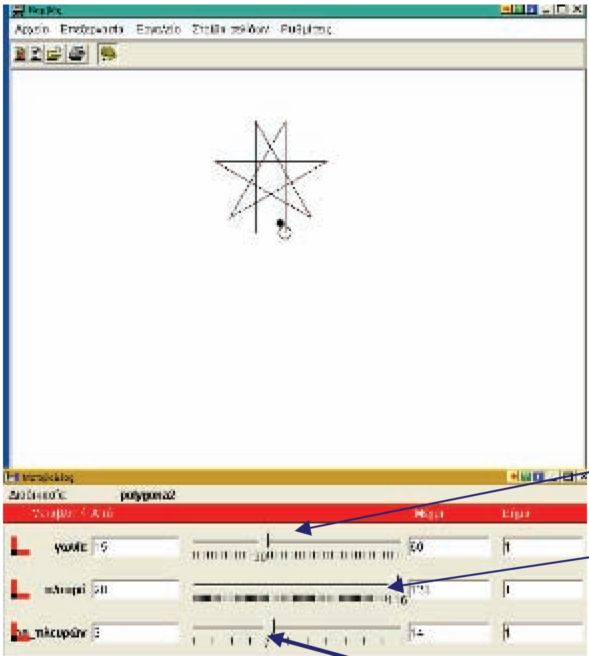
Οι μαθητές μεταφέρουν τα κατασκευάσματά τους στη σελίδα ζωγραφικής του *Αβακίου* και τα επεξεργάζονται εικαστικά, χρησιμοποιώντας τα διαθέσιμα εργαλεία.

Ε΄ Φάση – Παρουσίαση

Στη φάση αυτή κάθε ομάδα παρουσιάζει τα συμπεράσματά της, την πορεία που ακολούθησε για να καταλήξει σε αυτά και τις δυσκολίες που αντιμετώπισε. Κατόπιν παρουσιάζει τα εικαστικά επεξεργασμένα επαναλαμβανόμενα ψηφοθετήματα που δημιούργησε με τη διαδικασία *Mistirio3*.

1.5.2 Φύλλο εργασίας πρώτης δραστηριότητας: Κανονικά πολύγωνα και τεθλασμένες γραμμές

Στις δραστηριότητες του δευτέρου εκπαιδευτικού σεναρίου θα χρησιμοποιήσεις κυρίως το εργαλείο του *Αβακίου* με το όνομα Μεταβολέας.



Κινώντας με το ποντίκι αυτό το Μεταβολέα, μπορείς να μεταβάλλεις το μέγεθος της γωνίας του πολυγώνου.

Κινώντας με το ποντίκι αυτό το Μεταβολέα, μπορείς να μεταβάλλεις το μήκος των πλευρών του πολυγώνου.

Κινώντας με το ποντίκι αυτό το Μεταβολέα, μπορείς να μεταβάλλεις τον αριθμό των πλευρών του πολυγώνου.

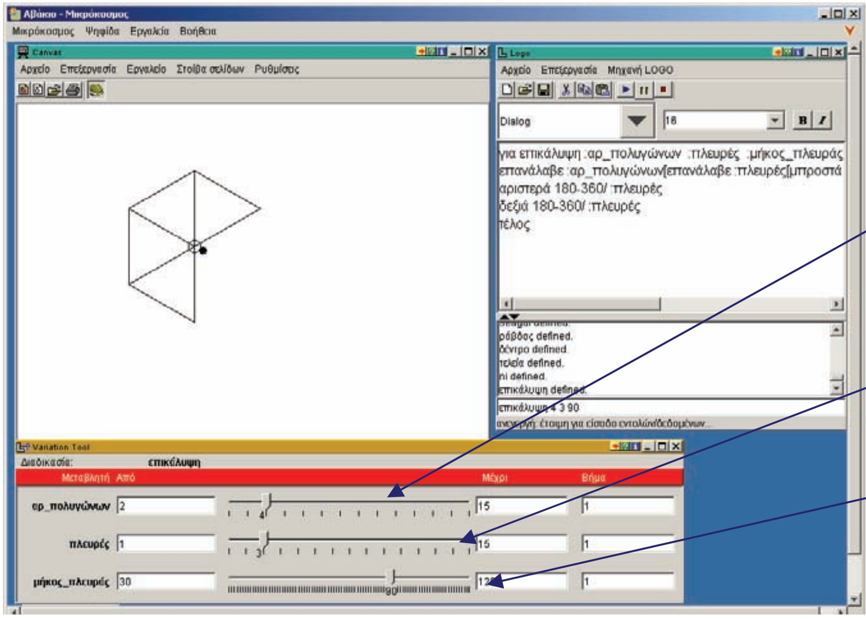
Διαδικασία Mistirio1

1) Χρησιμοποίησε τη διαδικασία *Mistirio1* και το Μεταβολέα και προσπάθησε να κλείσεις την τεθλασμένη γραμμή. Συμπλήρωσε το παρακάτω πινακάκι:

γωνία σε μοίρες	**αριθμός πλευρών**	**ονομασία πολυγώνου**

Τι συμπέρασμα βγάζεις; Σε ποιες περιπτώσεις κλείνει το σχήμα;

....
....
....



Εδώ μπορείς να ορίσεις τον αριθμό των πολυγώνων που θέλεις να ζωγραφίσει η χελώνα γύρω από μια κορυφή.

Εδώ μπορείς να ορίσεις τον αριθμό των πλευρών κάθε πολυγώνου.

Εδώ μπορείς να ορίσεις το μήκος της πλευράς κάθε πολυγώνου.

Διαδικασία Mistirio2

2) Χρησιμοποίησε τη διαδικασία *Mistirio2* και προσπάθησε να βρεις πόσα ισόπλευρα τρίγωνα μπορεί να γράψει η Χελώνα γύρω από το σημείο εκκίνησής της.

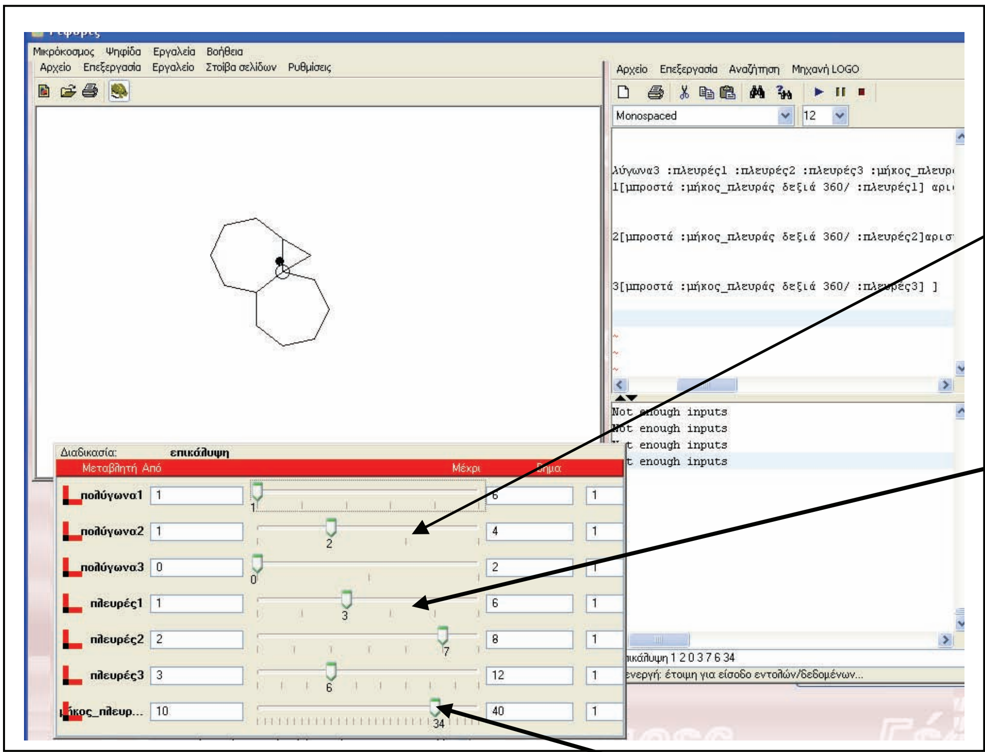
....
....
....

3) Πειραματίσου με τη διαδικασία *Mistirio2*, με διάφορα είδη πολυγώνων, και δημιούργησε ένα επαναλαμβανόμενο ψηφοθέτημα-tessellation. Συμπλήρωσε τον παρακάτω πίνακα:

Είδος πολυγώνου	**Μοίρες εσωτερικής γωνίας πολυγώνου**	**Αριθμός πολυγώνων γύρω από το σημείο εκκίνησης της Χελώνας**	**Άθροισμα γωνιών γύρω από το σημείο εκκίνησης της Χελώνας**	**Διαίρεση του 360 με τις μοίρες της εσωτερικής γωνίας του πολυγώνου**

4) Σε τι συμπέρασμα κατέληξες με βάση τον παραπάνω πίνακα; Ποια είδη κανονικών πολυγώνων θα μπορούσες να χρησιμοποιήσεις για να καλύψεις μια επιφάνεια, χωρίς να αφήσεις κάποιο κενό;

....
....
....



Με τις μεταβλητές: πολύγωνα1, πολύγωνα2 και πολύγωνα3 ορίζεις πόσες φορές θα επαναληφθεί κάθε είδος πολυγώνου.

Με τις μεταβλητές πλευρές1, πλευρές2 και πλευρές3 ορίζεις τον αριθμό των πλευρών του πολυγώνου1, του πολυγώνου2 και του πολυγώνου3, αντίστοιχα.

Με τη μεταβλητή μήκος_πλευράς ορίζουμε το μήκος κάθε πλευράς.

Διαδικασία Mistirio3

5) Χρησιμοποίησε τη διαδικασία *Mistirio3*, για να δεις αν μπορείς να συνδυάσεις περισσότερα από ένα είδη κανονικών πολυγώνων και να καλύψεις με αυτά μια επιφάνεια γύρω από το σημείο, χωρίς να μείνει κάποιο κενό.

α) Μπορείς να προβλέψεις συνδυασμούς πολυγώνων που θα καλύπτουν την επιφάνεια χωρίς κενό; Αν ναι, τότε γράψε τους συνδυασμούς αυτούς παρακάτω:

....
....
....

β) Επιβεβαίωσες στον υπολογιστή τις προβλέψεις σου;

....
....
....

γ) Γράψε όλους τους συνδυασμούς των κανονικών πολυγώνων, που βρήκες, οι οποίοι μπορούν να καλύψουν μια επιφάνεια χωρίς να αφήσουν κενά μεταξύ τους.

1η περίπτωση: ....

2η περίπτωση: ....

3η περίπτωση: ....

δ) Ποιο είναι το άθροισμα των γωνιών των πολυγώνων γύρω από το σημείο εκκίνησης της Χελώνας στις περιπτώσεις που καλύπτεται ολόκληρη η γύρω επιφάνεια, χωρίς κενά ή αλληλοεπικαλύψεις;

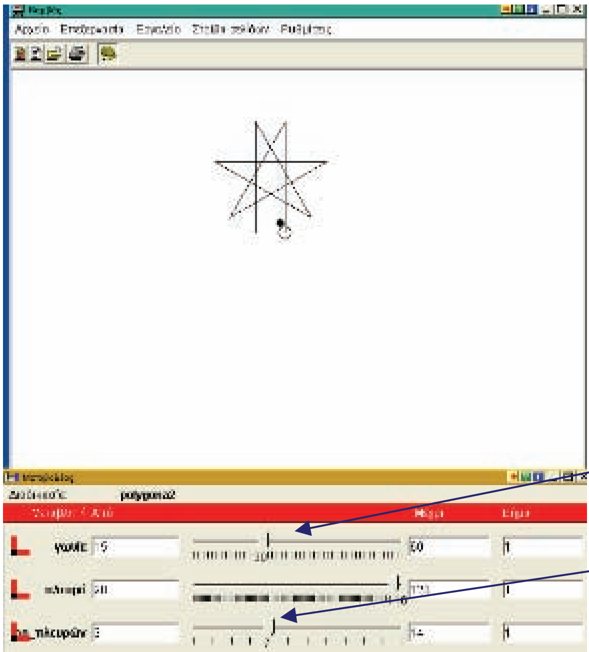
....
....
....

ε) Σε τι συμπέρασμα κατέληξες με βάση την παραπάνω παρατήρηση;

....
....
....

1.5.3 Σημειώσεις πρώτης δραστηριότητας

Ερώτηση 1: Στη διάρκεια της διαδικασίας *Mistirio1* οι μαθητές πειραματίζονται, ορίζοντας το μήκος της πλευράς του κανονικού πολυγώνου που θέλουν να κατασκευάσουν, το μέτρο της εσωτερικής του γωνίας και τον αριθμό των πλευρών του. Ο δάσκαλος θα πρέπει να ξεκινήσει τη διαδικασία, δίνοντας τυχαίες τιμές στις δύο μεταβλητές (π.χ. *Mistirio1* 30 50 6), και να ενεργοποιήσει το Μεταβολέα.[9] Στη συνέχεια ζητάει από τους μαθητές να προσπαθήσουν να κλείσουν την τεθλασμένη γραμμή που έχει σχηματιστεί στον Καμβά και να σχηματίσουν όσο το δυνατόν περισσότερα κανονικά πολύγωνα.



Κινώντας με το ποντίκι αυτό το Μεταβολέα, μπορείς να μεταβάλλεις το μέτρο της γωνίας του πολυγώνου.

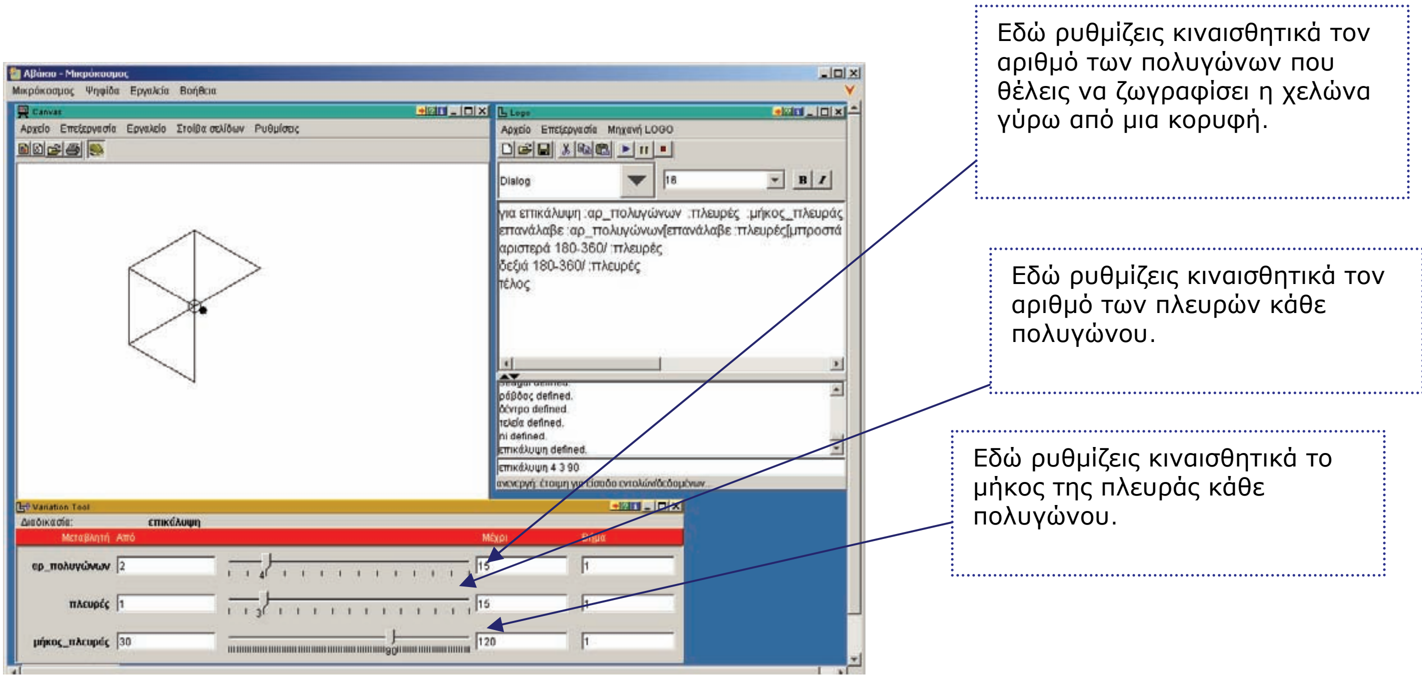
Κινώντας με το ποντίκι αυτό το Μεταβολέα, μπορείς να μεταβάλλεις τον αριθμό των πλευρών του πολυγώνου.

Εικόνα 14: Διαδικασία Mistirio1.

[9] Για τεχνική βοήθεια σχετικά με το εργαλείο Μεταβολέας δες την παράγραφο 1.6.3.

Στόχος αυτής της δραστηριότητας είναι οι μαθητές να οδηγηθούν με βιωματικό τρόπο στο συμπέρασμα ότι κανονικά πολύγωνα μπορούμε να έχουμε μόνο με συγκεκριμένες γωνίες. Παράλληλα, έχει επιλεγεί σκόπιμα η δυνατότητα να αυξομειώνουν και το μήκος της πλευράς του κανονικού πολυγώνου, αφού πολλές φορές οι μαθητές συνδέουν το μήκος των πλευρών ενός πολυγώνου με το μέτρο της γωνίας που περικλείουν. Έρευνες έχουν δείξει ότι πολλοί μαθητές αντιλαμβάνονται τις πλευρές της γωνίας ως την ίδια τη γωνία και συνεπώς θεωρούν ότι το μέγεθος της γωνίας εξαρτάται από το μήκος αυτών πλευρών. Έτσι, κανονικό τετράγωνο μπορούμε να έχουμε μόνο με γωνία 90^o, κανονικό πεντάγωνο μόνο με γωνία 108^o, κανονικό εξάγωνο μόνο με γωνία 120^o κ.ο.κ., ασχέτως με το μήκος των πλευρών τους.

Ερώτηση 2: Εδώ οι μαθητές πειραματίζονται με τη διαδικασία *Mistirio2*. Στόχος είναι να εξετάσουν ποια είδη κανονικών πολυγώνων μπορούν να δημιουργήσουν επαναλαμβανόμενο ψηφοθέτημα/tessellation γύρω από μια κορυφή. Έχουν στη διάθεσή τους μια διαδικασία με τρεις μεταβλητές: α) τον αριθμό των πολυγώνων, β) τον αριθμό των πλευρών ενός πολυγώνου και γ) το μήκος της πλευράς του πολυγώνου. Ο δάσκαλος ορίζει τυχαία την πρώτη τριάδα μεταβλητών και ξεκινά το Μεταβολέα (π.χ. Mistirio2 3 6 40).



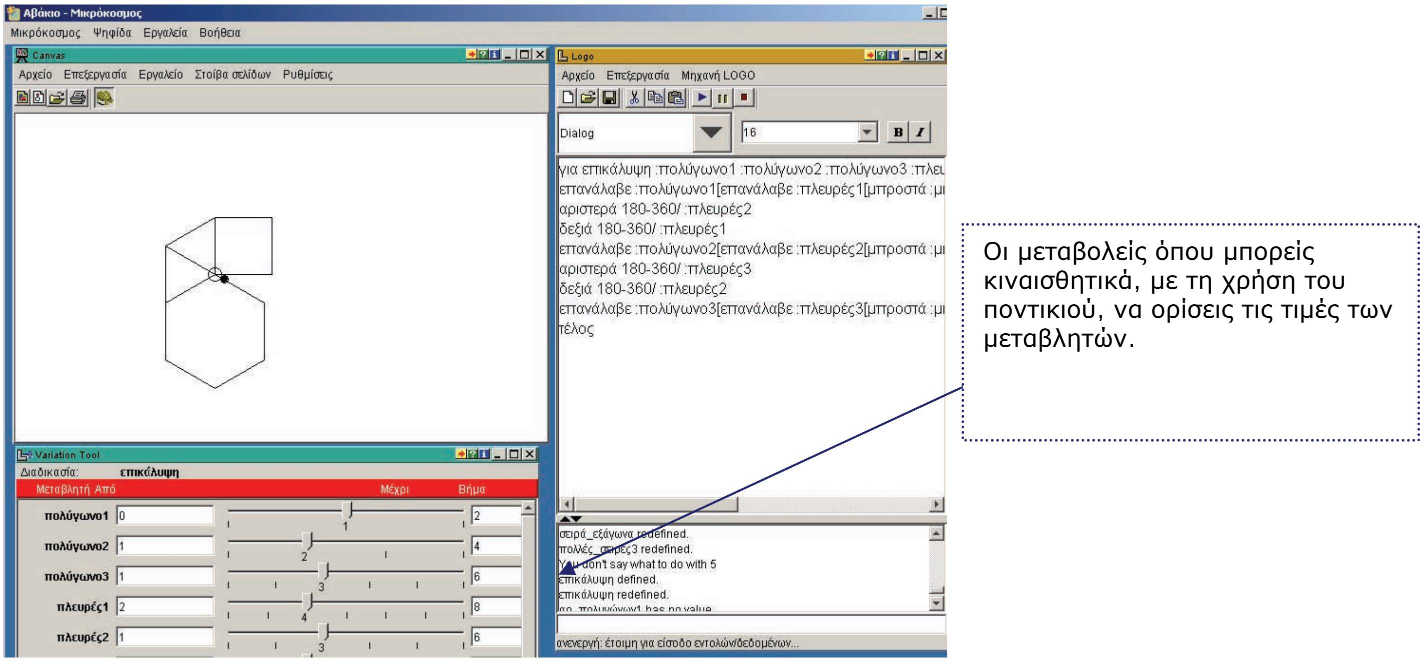
Εικόνα 15: Διαδικασία Mistirio2.

Αυτή η δραστηριότητα διερεύνησης είναι στην πραγματικότητα εισαγωγική για την επόμενη. Παίζοντας με τα τρίγωνα, οι μαθητές θα εξοικειωθούν με τη χρήση των μεταβλητών στη συγκεκριμένη διαδικασία και θα πειραματιστούν με ένα σχήμα που εύκολα δημιουργεί επαναλαμβανόμενο ψηφοθέτημα, ενώ η γωνία του είναι ήδη γνωστή στους μαθητές.

Ερώτηση 3: Οι μαθητές πειραματίζονται και πάλι με τη διαδικασία *Mistirio2*. Συμπληρώνουν έναν πίνακα που θα τους βοηθήσει να συστηματοποιήσουν τις παρατηρήσεις τους και να καταλήξουν σε συγκεκριμένα συμπεράσματα. Η πρώτη στήλη του πίνακα συμπληρώνεται με το είδος του πολυγώνου, με βάση τον αριθμό των πλευρών που οι μαθητές έχουν επιλέξει στο Μεταβολέα. Η δεύτερη στήλη συμπληρώνεται σύμφωνα με τον πίνακα που συμπλήρωσαν στην προηγούμενη δραστηριότητα. Η τρίτη στήλη συμπληρώνεται με τον αριθμό των πολυγώνων που χρειάστηκαν για να δημιουργηθεί το επαναλαμβανόμενο ψηφοθέτημα γύρω από μια κορυφή, ενώ η τέταρτη στήλη προκύπτει ως το γινόμενο της γωνίας του πολυγώνου με τον αριθμό των πολυγώνων που δημιουργούν επαναλαμβανόμενο ψηφοθέτημα γύρω από μια κορυφή· γινόμενο που είναι πάντα 360^o. Η πέμπτη στήλη ζητά ακριβώς το αντίθετο: τη διαίρεση της κυκλικής γωνίας με τις μοίρες της εσωτερικής γωνίας του πολυγώνου. Έτσι, παίρνουμε πάλι τον αριθμό των πολυγώνων που χρειάζονται για να δημιουργηθεί ένα επαναλαμβανόμενο ψηφοθέτημα.

Ερώτηση 4: Μετά τη συμπλήρωση του πίνακα, οι μαθητές μπορούν εύκολα να καταλήξουν στο συμπέρασμα ότι τα μόνα κανονικά σχήματα που δημιουργούν tessellations είναι το ισόπλευρο τρίγωνο, το τετράγωνο και το κανονικό εξάγωνο.

Ερώτηση 5: Εδώ οι μαθητές θα πειραματιστούν με την έτοιμη διαδικασία *Mistirio3*. Κατά τη διαδικασία αυτή μπορούν να χειριστούν με το Μεταβολέα επτά μεταβλητές: α) στη μεταβλητή με τίτλο «πολύγωνο1» ορίζουν αριθμητικά πόσες φορές θέλουν να επαναληφθεί το πρώτο είδος κανονικού πολυγώνου στο επαναλαμβανόμενο ψηφοθέτημα που θα κατασκευάσουν, στο «πολύγωνο2» το δεύτερο κ.ο.κ., β) στις μεταβλητές «πλευρές1», «πλευρές2» και «πλευρές3» ορίζουν τον αριθμό των πλευρών –και συνεπώς το είδος– του πρώτου, του δεύτερου και του τρίτου είδους κανονικού πολυγώνου που θα χρησιμοποιήσουν στο επαναλαμβανόμενο ψηφοθέτημά τους. Τέλος, ορίζουν το μήκος της πλευράς που θέλουν να έχουν τα κανονικά πολύγωνα που θα «γράψει» η Χελώνα. Η μεταβλητή του μήκους της πλευράς χρησιμοποιείται και σε αυτή τη διαδικασία, για να δώσει στους μαθητές, αφενός, τη δυνατότητα να αυξομειώσουν τα σχήματα που θα κατασκευάσουν και, αφετέρου, για να μπορέσουν να ελέγξουν με εμπειρικό τρόπο τυχόν λανθάνουσες αντιλήψεις σχετικά με το ρόλο του μεγέθους ενός σχήματος. Πολλοί μαθητές, λοιπόν, μπορεί να έχουν την εντύπωση ότι αν μεταβάλλουν το μέγεθος ενός σχήματος, θα μεταβληθεί και το μέτρο της γωνίας, ή ότι το μέγεθος των σχημάτων τους είναι η αιτία που δεν δημιουργείται ένα επαναλαμβανόμενο ψηφοθέτημα/tessellation.



Εικόνα 16: Διαδικασία Mistirio3.

Στο πρώτο υποερώτημα της ερώτησης 5 οι μαθητές καλούνται να κάνουν προβλέψεις σχετικά με το ποιοι συνδυασμοί κανονικών πολυγώνων μπορούν να δημιουργήσουν επαναλαμβανόμενο ψηφοθέτημα γύρω από μια κορυφή. Από την προηγούμενη διαδικασία *Μυστηρίου* έχουν προβληματιστεί σχετικά με το πώς πρέπει να καλύπτονται 360^o που βρίσκονται γύρω από μια κορυφή. Έτσι, ίσως προσπαθήσουν να εφαρμόσουν και εδώ την προϋπάρχουσα γνώση τους για τα επαναλαμβανόμενα ψηφοθετήματα από ένα είδος κανονικού πολυγώνου γύρω από μια κορυφή.

Στη συνέχεια πειραματίζονται και εξετάζουν αν οι προβλέψεις τους επιβεβαιώνονται. Στο τρίτο υποερώτημα καταγράφουν τις περιπτώσεις που δημιουργείται ένα επαναλαμβανόμενο ψηφοθέτημα. Αυτό που πρέπει να ισχύει είναι ότι τα κανονικά πολύγωνα που πρόκειται να χρησιμοποιήσουν θα πρέπει να έχουν άθροισμα 360^o, π.χ. 2 εξάγωνα και 2 τρίγωνα, 2 τετράγωνα και 3 τρίγωνα κ.λπ.

1.5.4 Δεύτερη δραστηριότητα: Τα «πλακόστρωτα» του Penrose

Στην τελευταία δραστηριότητα οι μαθητές θα γνωρίσουν, μέσα από βιβλία τέχνης ή με χρήση του διαδικτύου, μοντέλα επικάλυψης επιφανειών με γεωμετρικά σχήματα που ενώ δίνουν την εντύπωση επαναλαμβανόμενου μοντέλου, στην πραγματικότητα δεν υπάρχει ένα βασικό επαναλαμβανόμενο μοντέλο. Η δουλειά του μαθηματικού Roger Penrose είναι αντιπροσωπευτική του είδους tessellation που είναι γνωστά με τον όρο ψευδο-περιοδικά (quasi-periodic).

Τάξεις: Ε΄ και ΣΤ΄ Δημοτικού
Διάρκεια: 1-2 διδακτικές ώρες
Υπολογιστικά Εργαλεία: Διαδίκτυο

Στόχοι ως προς το γνωστικό αντικείμενο
Οι μαθητές:
- Να αναγνωρίσουν γεωμετρικά σχήματα και να προβληματιστούν σχετικά με το αν τα μοντέλα με συγκεκριμένα γεωμετρικά σχήματα που κατασκεύασε ο μαθηματικός Penrose μπορούν να θεωρηθούν επαναλαμβανόμενα ψηφοθετήματα (tessellation).
- Να συνδέσουν τα μαθηματικά με διάφορες μορφές τέχνης.
- Να χρησιμοποιήσουν εξειδικευμένη μαθηματική ορολογία (π.χ. ορολογία σχετική με τα γεωμετρικά σχήματα κ.λπ.).
- Να γνωρίσουν το έργο σύγχρονων μαθηματικών διεθνούς φήμης.

Στόχοι ως προς τη χρήση νέων τεχνολογιών
Οι μαθητές:
- Να χρησιμοποιήσουν τον υπολογιστή για αναζήτηση επαναλαμβανόμενων μοντέλων και έργων τέχνης σε κατάλληλα επιλεγμένες διευθύνσεις.

Στόχοι ως προς τη μαθησιακή διαδικασία
- Συνεργασία και ομαδική δουλειά τόσο σε επίπεδο μικρών ομάδων όσο και σε επίπεδο τάξης.
- Εξάσκηση στο διάλογο και στην επιχειρηματολογία.
- Εικαστική έκφραση με συμβατικά μέσα (χαρτί, μολύβι κ.λπ.).

Η προτεινόμενη πορεία διδασκαλίας συνοπτικά

Η προτεινόμενη πορεία εφαρμογής της δραστηριότητας περικλείει τρεις φάσεις:

Α΄ Φάση: Γνωριμία με τα «πλακόστρωτα» του Penrose
Χρησιμοποιώντας κατάλληλα επιλεγμένες διευθύνσεις του διαδικτύου και έτοιμα αρχεία, οι μαθητές γνωρίζουν το έργο του μαθηματικού Penrose. Παρατηρούν τα μοντέλα που κατασκεύασε και προβληματίζονται σχετικά με το αν τα συγκεκριμένα μοντέλα έχουν ένα βασικό επαναλαμβανόμενο μοντέλο και κατά πόσο θα μπορούσαν να θεωρηθούν επαναλαμβανόμενα ψηφοθετήματα (tessellations), με βάση τον ορισμό που είχαν χρησιμοποιήσει στις εισαγωγικές δραστηριότητες του πρώτου σεναρίου. Στη συνέχεια, με τη βοήθεια του φύλλου εργασίας, έρχονται σε επαφή πρώτα με ένα συνδυασμό από τρία ζεύγη πλακιδίων που κατασκεύασε και χρησιμοποίησε αρχικά ο Penrose και κατόπιν με το ένα ζεύγος πλακιδίων στο οποίο κατέληξε για τη δημιουργία των μοντέλων του.

Β΄ Φάση: Εικαστική δημιουργία με ζεύγη «πλακιδίων» του Penrose
Στη φάση αυτή οι μαθητές κόβουν τα ζεύγη πλακιδίων του Penrose από το φύλλο εργασίας, τα αναπαράγουν σε διάφορα υλικά (π.χ. χαρτί, χαρτόνι, κόλλες γλασσέ, σφουγγάρι για να δημιουργήσουν σφραγιδάκια) και δημιουργούν τα δικά τους μοντέλα, τα οποία και επεξεργάζονται αισθητικά.

Γ΄ Φάση – Παρουσίαση
Παρουσιάζουν στους συμμαθητές τους τα κατασκευάσματά τους, ενώ ο δάσκαλος φροντίζει να αναπτυχθεί μια σχετική συζήτηση. Η δουλειά των μαθητών, τα συμπεράσματα στα οποία κατέληξαν και τα κατασκευάσματά τους καλό θα ήταν να συλλεχθούν σε καλαίσθητα portfolios και να παρουσιαστούν και σε μαθητές άλλων τμημάτων και τάξεων, στο πλαίσιο πολιτιστικών εκδηλώσεων, στην εφημερίδα ή στην ιστοσελίδα του σχολείου κ.λπ.

1.5.5 Φύλλο εργασίας δεύτερης δραστηριότητας: Τα «πλακόστρωτα» του Penrose

Δείγμα από τη δουλειά του R. Penrose, πάτωμα στο Carleton College των ΗΠΑ, διαθέσιμο τον 1/2008 στην ηλεκτρονική διεύθυνση της βιβλιοθήκης με φυσικά μοτίβα του Ίαν Αλεξάντερ: http://easyweb.easynet.co.uk/iany/patterns/aperiodic_tilings.htm

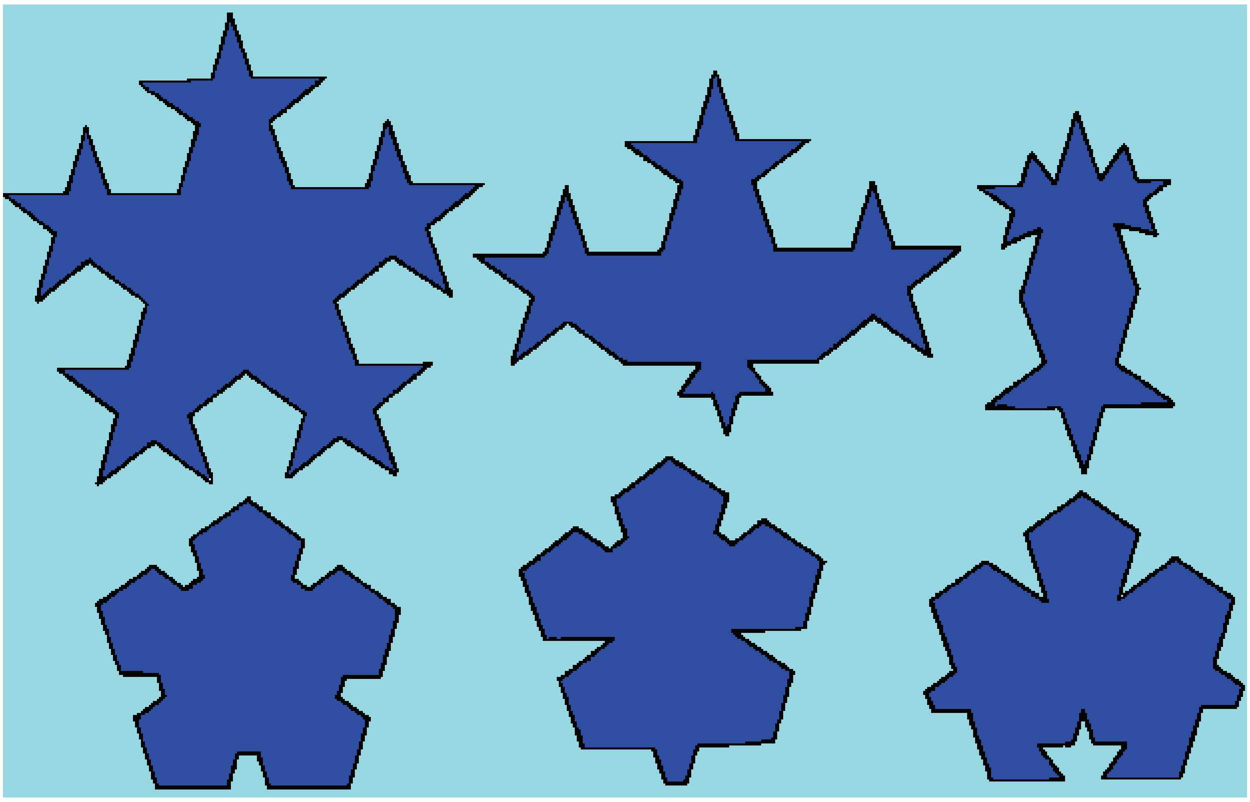
1) Θα μπορούσες να το χαρακτηρίσεις επαναλαμβανόμενο ψηφοθετήμα/tessellations;

....

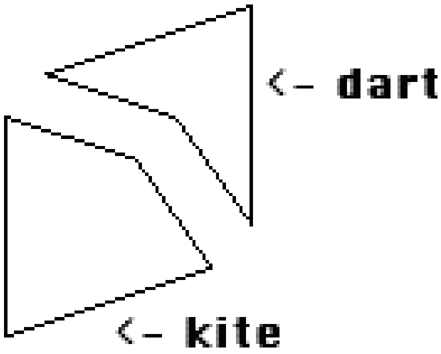
....

....

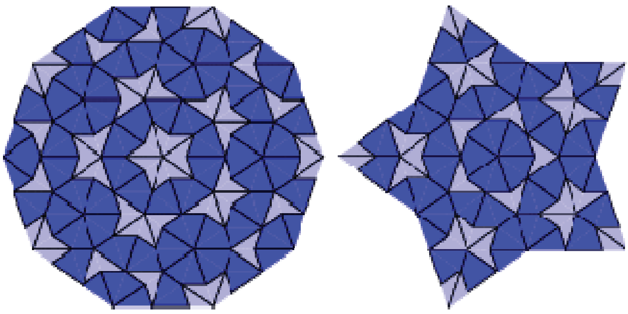
2) Ο Penrose ανακάλυψε αρχικά τρία ζεύγη «πλακαδίων» που μπορούν να καλύψουν μια επιφάνεια με τέτοιον τρόπο που, ενώ μας δημιουργούν την αντίθετη εντύπωση, δεν σχηματίζουν επαναλαμβανόμενα μοντέλα.



Αργότερα ο Penrose μείωσε τα τρία ζεύγη σε ένα. Με το ζεύγος που έμεινε γνωστό ως «a kite and a dart», δηλαδή «αετός και βέλος», μπορεί να καλυφθεί μια ολόκληρη επιφάνεια χωρίς να επαναλαμβάνεται κάποιο μοντέλο!



Μπορείς να κόψεις τα παραπάνω «πλακίδια» και να τα χρησιμοποιήσεις ως πρότυπα για να κατασκευάσεις και άλλα, με τα οποία στη συνέχεια θα κατασκευάσεις το δικό σου ψηφοθέτημα; Αν θες, μπορείς να χρησιμοποιήσεις τα παραπάνω πρότυπα και να κόψεις τα αντίστοιχα «πλακίδια» σε ένα σφουγγάρι. Έτσι, θα δημιουργήσεις τα δικά σου σφραγιδάκια. Αφού βάψεις με τέμπερα τη μια μεριά της «σφραγίδας», μπορείς να φτιάξεις το δικό σου ψηφοθέτημα (η διεύθυνση της εικόνας στον κόμβο του μαθηματικού κόσμου Γουόλφραμ τον 1/2008 είναι: http://mathworld.wolfram.com/PenroseTiles.html).



1.5.6 Σημειώσεις δεύτερης δραστηριότητας

Ερώτηση 1: Στο συγκεκριμένο πλακόστρωτο, αν και υπάρχουν κάποια γεωμετρικά σχήματα που επαναλαμβάνονται χωρίς να αφήνουν κενά ή να αλληλοεπικαλύπτονται, δεν υπάρχει ένα βασικό επαναλαμβανόμενο μοντέλο και αυτή είναι η ιδιαιτερότητα των πλακόστρωτων του Penrose.

Ερώτηση 2: Οι μαθητές κόβουν τα ζεύγη πλακιδίων του Penrose και δημιουργούν τα δικά τους ψηφοθετήματα. Ο δάσκαλος μπορεί να προτείνει πληθώρα υλικών για πειραματισμό. Θα μπορούσε να δημιουργηθεί και ένα τεράστιο ομαδικό ψηφοθέτημα: Σε κόντρα πλακέ οι μαθητές μπορούν να κολλήσουν ένα ζεύγος πλακιδίων ο καθένας, το οποίο θα έχουν αναπαραγάγει και επεξεργαστεί εικαστικά.

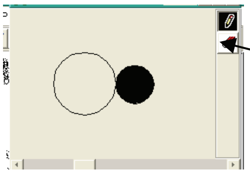
1.6 Συνοπτικές οδηγίες για τη χρήση του Αβακίου[10]

Το *Αβάκιο* είναι ένα περιβάλλον για τη δημιουργία γραφικών αναπαραστάσεων και μοντέλων τόσο μέσω συμβολικής έκφρασης –και συγκεκριμένα μέσω της γλώσσας προγραμματισμού Logo– όσο και μέσω δυναμικού χειρισμού. Αποτελείται από πέντε διακριτές, αλλά συνδεδεμένες μεταξύ τους, περιοχές εργασίας, για τις οποίες συνήθως χρησιμοποιείται ο όρος «ψηφίδες». Αυτές είναι:

- Η Χελώνα
- Η ψηφίδα Logo
- Ο Καμβάς
- Ο Μεταβολέας
- Ο Δισδιάστατος Μεταβολέας

Στο παρόν θα γίνει αναφορά μόνο στις τέσσερις πρώτες ψηφίδες.

1.6.1 Η ψηφίδα Χελώνα και η ψηφίδα Logo



Η ψηφίδα Χελώνα.
Για να γράφει η χελώνα πρέπει να είναι πατημένο το κουμπί με το μαύρο μολύβι.

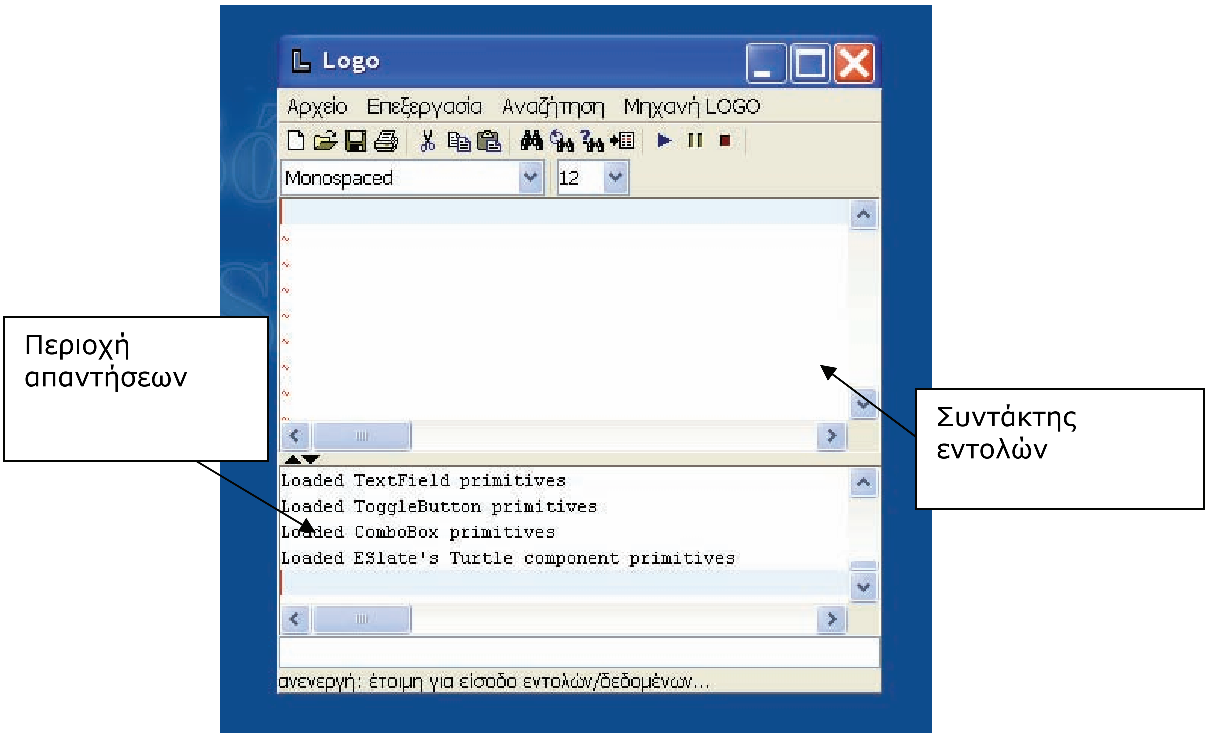
<u>Πώς μιλάμε στη Χελώνα</u>

<u>Η Χελώνα προχωρά μπροστά</u>

Για να κινήσουμε τη Χελώνα μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την εντολή **μπροστά** και να καθορίσουμε πόσα βήματα θέλουμε να κινηθεί. Η εντολή **μπροστά** έχει μία είσοδο η οποία πρέπει να αντιστοιχεί σε κάποιον αριθμό. Το αποτέλεσμα της εντολής αυτής είναι η μετακίνηση της Χελώνας κατά τη διεύθυνση της κεφαλής της σε τόση απόσταση όση καθορίζεται από την είσοδο της εντολής. Η μονάδα που χρησιμοποιείται για την απόσταση είναι τα βήματα Χελώνας. Προσπάθησε να γράψεις στην ψηφίδα Logo την εντολή ***Μπροστά 50***.

Για να εκτελέσεις την παραπάνω εντολή θα πρέπει να πατήσεις το πλήκτρο Enter ή το κουμπί  που βρίσκεται στην γραμμή εργαλείων της ψηφίδας Logo. Το αποτέλεσμα που πρέπει να δεις είναι η Χελώνα να βρίσκεται 50 βήματα μπροστά κατά τη διεύθυνση της κεφαλής της.

[10] Οι οδηγίες που παρέχονται εδώ αποτελούν μια απλοποιημένη εκδοχή του εγχειριδίου χρήσης του Αβακίου, το οποίο είναι διαθέσιμο ηλεκτρονικά στη διεύθυνση του εργαστηρίου εκπαιδευτικής τεχνολογίας του Εθνικού και Καποδιστριακού Πανεπιστημίου Αθηνών: http://etl.ppp.uoa.gr/_content/download/index_download.htm (1/2008).



Παρατήρηση 1η
Θα πρέπει πάντα να γράφεις τις εντολές όπως ακριβώς αναφέρονται. Ανάμεσα στο όνομα της εντολής «**Μπροστά**» και στην είσοδό της θα πρέπει να υπάρχει ένα κενό διάστημα. Αν γράψεις το ένα μετά το άλλο, δηλαδή «Μπροστά50», και εκτελέσεις την εντολή, τότε στην κάτω περιοχή του συντάκτη εντολών, δηλαδή στην περιοχή όπου παίρνουμε τις απαντήσεις σύμφωνα με τις ενέργειες που πραγματοποιούμε, θα πάρεις το εξής μήνυμα: «I don't know how to μπροστα50» που σημαίνει «Δεν γνωρίζω τι να κάνω με το Μπροστά50».

Παρατήρηση 2η
Βεβαιώσου ότι ο δείκτης γραφής (κέρσορας) βρίσκεται στο τέλος της εντολής ή δεξιά από τον αριθμό 50.
Πάτησε το πλήκτρο Enter του πληκτρολογίου, για να αλλάξεις γραμμή στο συντάκτη εντολών.
Προσπάθησε να γράψεις στη νέα γραμμή την εντολή ***Μπροστά 10***.
Για να εκτελέσεις την παραπάνω εντολή πάτησε το πλήκτρο **Enter** ή το κουμπί .
Το αποτέλεσμα που θα πρέπει να δεις είναι ότι η Χελώνα προχώρησε κατά τη διεύθυνση της κεφαλής της δέκα βήματα μπροστά από τη θέση που βρίσκονταν.
Εάν θέλεις να εκτελέσεις ξανά την αρχική εντολή ***Μπροστά 50*** θα πρέπει να οδηγήσεις το δείκτη γραφής οπουδήποτε πάνω στη γραμμή της εντολής και να πατήσεις το πλήκτρο **Enter** ή το κουμπί .
Η παραπάνω δυνατότητα μας επιτρέπει να εκτελούμε κάθε φορά όποια γραμμή θέλουμε από το συντάκτη εντολών, αρκεί να οδηγούμε το δείκτη γραφής πάνω στην αντίστοιχη γραμμή και να πατάμε το πλήκτρο **Enter** ή το κουμπί .

<u>Η Χελώνα αφήνει ίχνος</u>
Έχουμε τη δυνατότητα να λέμε στη Χελώνα να αφήνει ή να μην αφήνει το ίχνος της, καθώς κινείται. Για να πραγματοποιήσεις αυτή την επιλογή, θα πρέπει να δώσεις ως οδηγία την εντολή **στυλοκάτω** ή **στυλοπάνω**, αντίστοιχα. Εάν εκτελέσεις την εντολή **στυλοκάτω**, θα παρατηρήσεις ότι το κεφάλι της Χελώνας γίνεται μαύρο, που σημαίνει πως όταν η Χελώνα μετακινηθεί, θα αφήσει ίχνος, ενώ στην αντίθετη περίπτωση το κεφάλι της θα γίνει άσπρο και η Χελώνα δεν θα αφήνει ίχνος.

<u>Η Χελώνα στρίβει</u>
Προσπάθησε να εκτελέσεις την εντολή ***Αριστερά 90***.
Το αποτέλεσμα που θα πρέπει να δεις είναι ότι η Χελώνα έστριψε την κεφαλή της κατά 90° αριστερά. Αντίστοιχα μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την εντολή ***δεξιά 90***. Προσπάθησε να εκτελέσεις την εντολή ***Σβήσεγραφικά***.

Η εντολή αυτή καθαρίζει ό,τι έχουμε σχεδιάσει στην ψηφίδα του Καμβά και επαναφέρει τη Χελώνα στην αρχική της θέση, δηλαδή στο κέντρο του Καμβά με την κεφαλή της στραμμένη προς τα επάνω.

Πίνακας εντολών και λειτουργιών που μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε στην ψηφίδα Logo

Διαδικασία	**Είδος διαδικασίας**	**Πλήθος εισόδων**	**Τύπος δεδομένων εισόδου**	**Αποτέλεσμα-γεγονός**
Σβήσεγραφικά	Εντολή	0	-	Καθαρίζει τον Καμβά και επαναφέρει τη Χελώνα στην αρχική της θέση
Καθάρισε	Εντολή	0	-	Καθαρίζει τον Καμβά και αφήνει τη Χελώνα στη θέση που βρίσκεται
Στηναρχή	Εντολή	0	-	Επαναφέρει τη Χελώνα στην αρχική της θέση, χωρίς να σβήσει τα γραφικά
Μπροστά α	Εντολή	1	Αριθμός	Μετακινεί τη Χελώνα α βήματα μπροστά κατά τη διεύθυνση της κεφαλής της
Πίσω α	Εντολή	1	Αριθμός	Μετακινεί τη Χελώνα α βήματα προς την αντίθετη κατεύθυνση που δείχνει η κεφαλή της
Δεξιά α	Εντολή	1	Αριθμός	Στρίβει την κεφαλή της Χελώνας α μοίρες δεξιά
Αριστερά α	Εντολή	1	Αριθμός	Στρίβει την κεφαλή της Χελώνας α μοίρες δεξιά
Στυλόπάνω	Εντολή	0	-	Ανεβάζει τη γραφίδα της Χελώνας
Στυλόκάτω	Εντολή	0	-	Κατεβάζει τη γραφίδα της Χελώνας
Γόμα	Εντολή	0	-	Σβήνει τις ήδη σχεδιασμένες γραμμές, αρκεί να ακολουθήσει εντολή του τύπου (μπροστά 50)
Περίμενε α	εντολή	1	αριθμός	Σταματά την εκτέλεση του προγράμματος για όση ώρα δηλώνει ο αριθμός που τοποθετούμε στην είσοδο της εντολής
ΘέσηΧ	λειτουργία	0	-	Επιστρέφει την τετμημένη της θέσης της Χελώνας
ΘέσεΨ	λειτουργία	0	αριθμός	Επιστρέφει την τεταγμένη της θέσης της Χελώνας

Θέση	λειτουργία	0	αριθμός	Επιστρέφει τις συντεταγμένες της θέσης της Χελώνας
Κατεύθυνση	λειτουργία	0	-	Επιστρέφει τον απόλυτο προσανατολισμό της Χελώνας
Θέσεκατεύθυνση	Εντολή	1	αριθμός	Προσανατολίζει τη Χελώνα σύμφωνα με τον αριθμό που θα θέσουμε στην είσοδο της εντολής
Θέσεχψ α β	Εντολή	2	αριθμοί	Θέτει τη Χελώνα στη θέση με συντεταγμένες (α,β)
Pos	Λειτουργία	0	-	Δίνει ως έξοδο τις συντεταγμένες που βρίσκεται η Χελώνα

Παρατήρηση 1η

Ο συντάκτης εντολών Logo αντιλαμβάνεται τις εντολές και με τη συντομογραφία των ονομάτων τους, π.χ. την εντολή *Σβήσεγραφικά* ως *σβγ*, την εντολή *δεξιά 30* ως *δ 30*, την εντολή *αριστερά 30* ως *α 30* κ.λπ.

Παρατήρηση 2η

Όταν για κάποιο λόγο η Χελώνα περάσει τα όρια της ψηφίδας του Καμβά, τότε εμφανίζεται από την απέναντι πλευρά του παραθύρου και μοιάζει οι απέναντι πλευρές του παραλληλογράμμου της ψηφίδας να είναι ενωμένες. Η τοπολογία του Καμβά στην πραγματικότητα είναι ένας τόρος, δηλαδή κάτι σαν ένας λουκουμάς με τρύπα στη μέση.

<u>Πώς κατασκευάζουμε τις δικές μας διαδικασίες</u>

Παρατήρηση 1η

Για να πεις στη Χελώνα να ακολουθήσει μια δική σου διαδικασία θα πρέπει:

- <u>Να την πληκτρολογήσεις</u> με μια συγκεκριμένη δομή. Δηλαδή να ξεκινήσεις τη σύνταξη της διαδικασίας με τη λέξη ***για***, στη συνέχεια να γράψεις το όνομα που θέλεις να έχει η διαδικασία και κατόπιν να δηλώσεις τις μεταβλητές (στην περίπτωση που φτιάχνεις μια παραμετρική διαδικασία).
- <u>Να χρησιμοποιήσεις : (άνω και κάτω τελεία) πριν από κάθε μεταβλητή</u>.
- Να διατυπώσεις στις επόμενες γραμμές τις εντολές που απαιτούνται για την υλοποίηση της διαδικασίας και να κλείσεις τη διαδικασία με τη λέξη «τέλος».
- <u>Να την επιλέξεις</u>, δηλαδή να σαρώσεις την περιοχή όπου έχεις γράψει τη διαδικασία, ώστε να χρωματιστεί και να μπορέσεις να αναφερθείς σε αυτή.
- <u>Να την ορίσεις</u>, δηλαδή να πατήσεις το πλήκτρο **Enter** ή το κουμπί , ώστε να δεις στην περιοχή των απαντήσεων του συντάκτη εντολών το μήνυμα «όνομα διαδικασίας defined», όπου σημαίνει ότι η διαδικασία έχει οριστεί και δεν είναι άγνωστη.
- <u>Να την εκτελέσεις</u>, δηλαδή να γράψεις το όνομα της διαδικασίας σε μια νέα γραμμή του συντάκτη εντολών και να πατήσεις το πλήκτρο **Enter** ή το κουμπί .

Παρατήρηση 2η

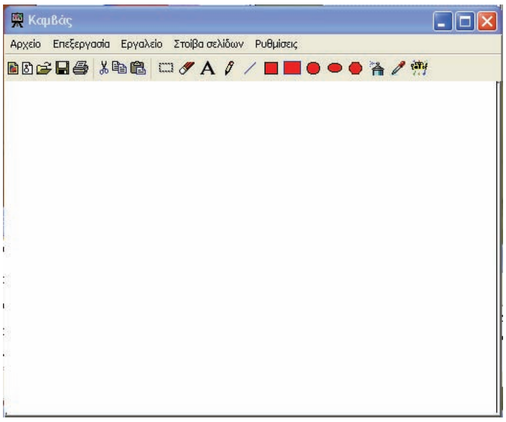
Στις διαδικασίες μπορείς να δίνεις το όνομα που θέλεις, αρκεί το όνομα αυτό να είναι μία λέξη.
Δεν μπορείς, για παράδειγμα, να δώσεις το όνομα: ***σκάλα πάνω***, διότι αποτελείται από δύο λέξεις που μεταξύ τους έχουν κενό. Ωστόσο επιτρέπεται να γράψεις: ***σκάλα _πάνω***.
Δεν επιτρέπεται να δώσεις όνομα που να αντιστοιχεί σε κάποια πρωτογενή εντολή. Για παράδειγμα, δεν μπορείς να δώσεις ως όνομα διαδικασίας τη λέξη ***μπροστά***.
Εάν αγνοήσεις αυτό τον περιορισμό, τότε κατά τον ορισμό της διαδικασίας θα πάρεις στην περιοχή των απαντήσεων του συντάκτη εντολών το εξής μήνυμα: «The name μπροστά is a primitive», που σημαίνει ότι το όνομα ***μπροστά*** που διάλεξες είναι πρωτογενής διαδικασία.

Παρατήρηση 3η
Εάν στην ψηφίδα του συντάκτη εντολών έχεις γράψει δύο διαδικασίες με το ίδιο όνομα, τότε το *Αβάκιο* αντιλαμβάνεται τη διαδικασία που έχει οριστεί τελευταία.

Παρατήρηση 4η
Εάν ορίσεις ξανά μια διαδικασία με το ίδιο όνομα, τότε στην περιοχή των απαντήσεων του συντάκτη εντολών θα πάρεις το μήνυμα: «όνομα διαδικασίας redefined», που σημαίνει ότι η διαδικασία έχει οριστεί ξανά.
Πολλές φορές θα θέλεις να ορίσεις ξανά τη διαδικασία που σκέφτηκες, παρατηρώντας πώς υλοποιείται από τη Χελώνα.
Είναι πολύ συνηθισμένο να συντάσσουμε τη διαδικασία και όταν την εκτελούμε, να παρατηρούμε ότι θα θέλαμε κάτι να συμπληρώσουμε, να διορθώσουμε ή γενικά να αλλάξουμε. Άλλωστε το περιβάλλον είναι έτσι σχεδιασμένο, ώστε να υποστηρίζει τον πειραματισμό, καθώς και το σταδιακό κτίσιμο ενός μοντέλου.

1.6.2 Η ψηφίδα Καμβάς

Στην ψηφίδα Καμβάς βλέπουμε το γραφικό αποτέλεσμα των εντολών που έχουμε δώσει στη Χελώνα.



Το γραφικό αποτέλεσμα στη σελίδα χελώνων[11] μπορούμε να το επεξεργαστούμε και γραφικά, ακολουθώντας τα παρακάτω βήματα:
- Ορίζουμε μια νέα σελίδα ζωγραφικής, πατώντας το πρώτο από αριστερά κουμπί της γραμμής εργαλείων.
- Από το μενού »Στοίβα σελίδων» επιστρέφουμε στη σελίδα χελώνων που ήμασταν προηγουμένως. Στην μπάρα εργαλείων παρατηρούμε ότι έχουν εμφανιστεί κάποια νέα εργαλεία. Με το εργαλείο «σφραγίδα» μπορούμε να «σφραγίσουμε» ό,τι κάναμε στην αντίστοιχη σελίδα ζωγραφικής.
- Από το μενού «Στοίβα σελίδων» πηγαίνουμε πάλι στη σελίδα ζωγραφικής. Η Χελώνα παύει να υπάρχει και μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τα εργαλεία ζωγραφικής για να επεξεργαστούμε το σχέδιό μας.
- Σώζουμε το σχέδιό μας ως εικόνα.

1.6.3 Η ψηφίδα Μεταβολέας

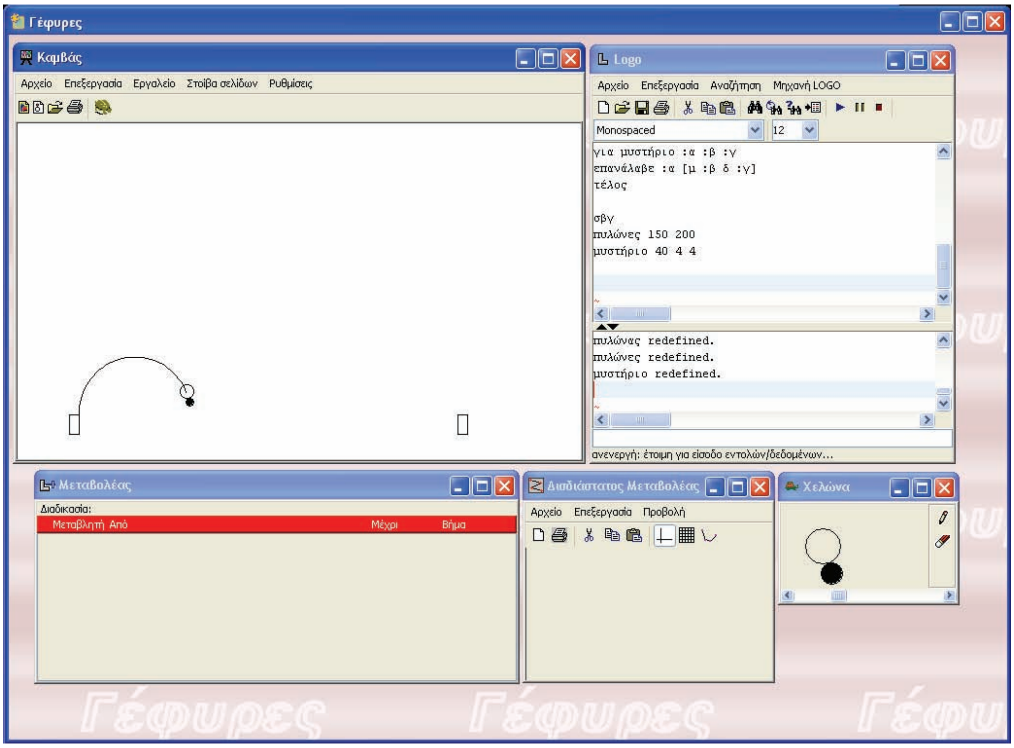
Με την ψηφίδα Μεταβολέας μπορούμε να μεταβάλλουμε δυναμικά τις μεταβλητές ενός προγράμματος που έχουμε γράψει στη Logo. Ακολουθούμε τα παρακάτω βήματα:
- Πατάμε στην ψηφίδα του Καμβά, στη γραμμή εργαλείων, το πρώτο πλήκτρο από δεξιά με το όνομα «επιλογή γραμμής χελώνας» το οποίο έχει την εικόνα της Χελώνας.
- Οδηγούμε το δείκτη του ποντικιού πάνω σε ένα οποιοδήποτε σημείο της γραμμής που έχει σχεδιάσει η Χελώνα και πατάμε μία φορά το αριστερό πλήκτρο του ποντικιού.

[11] Στον καμβά έχουμε τη δυνατότητα να ορίσουμε περισσότερες από μία σελίδες χελώνων, πατώντας το δεύτερο από αριστερά εργαλείο της γραμμής εργαλείων. Με αυτό τον τρόπο θα εμφανιστεί μια νέα καθαρή σελίδα στον καμβά. Ωστόσο, και πάλι θα πρέπει να ελέγξουμε από το παράθυρο διαχείρισης συνδέσμων αν η νέα σελίδα είναι συνδεδεμένη με τη χελώνα, ώστε να βλέπουμε το γραφικό αποτέλεσμα των εντολών μας. Μπορούμε να επιλέγουμε κάθε φορά τη σελίδα χελώνων που θέλουμε –από εκείνες που έχουμε ορίσει– από το μενού «Στοίβα σελίδων». Για περισσότερες λεπτομέρειες ανατρέξτε στην ηλεκτρονική διεύθυνση του εργαστηρίου εκπαιδευτικής τεχνολογίας του Εθνικού και Καποδιστριακού Πανεπιστημίου Αθηνών: http://etl.ppp.uoa.gr/_content/download/index_download.htm (5/2008).

Στην ψηφίδα του Μεταβολέα θα εμφανιστούν τόσες μπάρες όσες και οι μεταβλητές του προγράμματός μας. Μπορούμε να αλλάξουμε τις τιμές των μεταβλητών, μετακινώντας τους αντίστοιχους δείκτες, και να παρατηρήσουμε πώς συμπεριφέρεται η εικόνα στον Καμβά, καθώς αλλάζει η τιμή μιας μεταβλητής.

Η παραπάνω διαδικασία ονομάζεται δυναμικός χειρισμός και επιτρέπει στο χρήστη:

- Να μεταβάλλει τις τιμές των μεταβλητών και να παρατηρεί ταυτόχρονα και τις αλλαγές που συμβαίνουν στο σχήμα που σχεδιάζει η Χελώνα Με αυτό τον τρόπο μπορεί να κάνει υποθέσεις για το ρόλο που παίζουν οι μεταβλητές τόσο στη διαδικασία που γεννά το σχήμα, όσο και στο πώς επηρεάζεται η δομή του σχήματος.
- Να εμφανίζει τις μεταβλητές της παραμετρικής διαδικασίας σε πρώτο πλάνο, δηλαδή αν πατήσει αριστερό πλήκτρο του ποντικιού στην περιοχή του Καμβά, πάνω σε ένα σχέδιο δημιουργημένο από τη Χελώνα, έχοντας ενεργοποιημένο το πλήκτρο «επιλογή γραμμής χελώνας», μέσω της ψηφίδας του Μεταβολέα, τότε θα του δείξει τις παραμέτρους της διαδικασίας που γεννά το εν λόγω σχήμα, εάν η διαδικασία του είναι παραμετρική.
- Να αλλάζει τις παραμέτρους του προγράμματος και να το επανεκτελεί, χωρίς να δίνει εντολές με συμβολική μορφή από την ψηφίδα του συντάκτη εντολών.



Παρατήρηση 1η

Παρατήρησε ότι αριστερά και δεξιά από την μπάρα του Μεταβολέα *ύψος* υπάρχουν δύο πεδία (τα: «Από, Μέχρι») που περιέχουν τους αριθμούς 15 και 60 αντίστοιχα. Οι αριθμοί αυτοί είναι τα όρια στα οποία μεταβάλλονται οι τιμές της μεταβλητής *ύψος*. Εάν θέλεις να αλλάξεις τα όρια, δεν έχεις παρά να γράψεις στα αντίστοιχα πεδία τους επιθυμητούς αριθμούς. Στο δεύτερο πεδίο δεξιά από το Μεταβολέα, δηλαδή στο *βήμα*, θα παρατηρήσεις τον αριθμό 1. Αυτό σημαίνει ότι ο Μεταβολέας μπορεί να παίρνει τιμές οι οποίες διαφέρουν κατά μία μονάδα ανάμεσα στα όρια που έχουμε καθορίσει. Έτσι, εάν θέλεις ο Μεταβολέας να παίρνει τιμές που να διαφέρουν κατά δέκα μονάδες, δεν έχεις παρά να γράψεις στο πεδίο του βήματος τον αριθμό 10.

1.7 Προγραμματισμός για τη δημιουργία επαναλαμβανόμενων ψηφοθετημάτων

1.7.1 Βασικές ψηφίδες προγραμμάτων

- **τετράγωνο**

```
για τετράγωνο :πλευρά
επανάλαβε 4[μπροστά :πλευρά δεξιά 90]
τέλος
```

- **ισόπλευρο τρίγωνο**

```
για ισόπλευρο_τρίγωνο :πλευρά
επανάλαβε 3[μπροστά :πλευρά δεξιά 120]
τέλος
```

- **παραλληλόγραμμο**

```
για ορθογώνιο_παραλληλόγραμμο :μήκος
:πλάτος
επανάλαβε 2[μπροστά :μήκος δεξιά 90 μπροστά
:πλάτος δεξιά 90]
τέλος
```

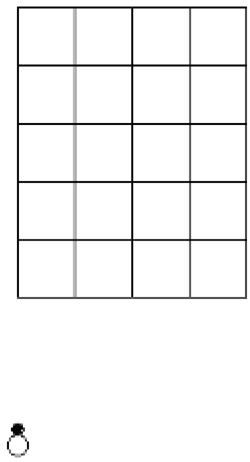
- **κανονικό εξάγωνο**

```
για κανονικό_εξάγωνο :πλευρά
επανάλαβε 6[μπροστά :πλευρά δεξιά 60]
τέλος
```

1.7.2 Επαναλαμβανόμενα μοντέλα

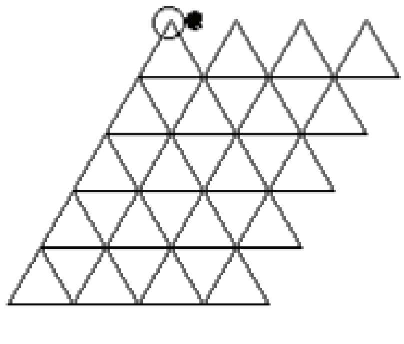
- **τετράγωνα**

```
για τετράγωνο :πλευρά
επανάλαβε 4[μπροστά :πλευρά δεξιά 90]
τέλος

για σειρά :αριθμός_τετραγώνων :πλευρά
δεξιά 90
επανάλαβε :αριθμός_τετραγώνων[τετράγωνο :πλευρά μπροστά :πλευρά]
δεξιά 180
στυλόπάνω
μπροστά :αριθμός_τετραγώνων*:πλευρά
δεξιά 90
μπροστά :πλευρά
στυλόκάτω
τέλος

για τετράγωνα :αριθμός :αριθμός_τετραγώνων :πλευρά
επανάλαβε :αριθμός[σειρά :αριθμός_τετραγώνων :πλευρά]
τέλος
```



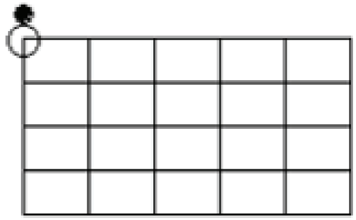
ισόπλευρα τρίγωνα

```
για ισόπλευρο_τρίγωνο :πλευρά
επανάλαβε 3[μπροστά :πλευρά αριστερά 120]
τέλος

για σειρά_τριγώνων :αριθμός :πλευρά
επανάλαβε :αριθμός[ισόπλευρο_τρίγωνο :πλευρά μπροστά :πλευρά]
στυλόπάνω δεξιά 180 μπροστά :αριθμός*:πλευρά
δεξιά 120
μπροστά :πλευρά
δεξιά 60
στυλόκάτω
τέλος

για πολλές_σειρές :αριθμός_σειρών :αριθμός :πλευρά
επανάλαβε :αριθμός_σειρών [σειρά_τριγώνων :αριθμός :πλευρά]
τέλος
```



- **παραλληλόγραμμα**

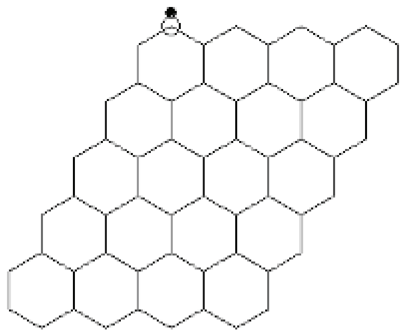
```
για ορθογώνιο_παραλληλόγραμμο :μήκος :πλάτος
επανάλαβε 2[μπροστά :μήκος δεξιά 90 μπροστά :πλάτος δεξιά 90]
τέλος

για σειρά_ορθογωνίων :αριθμός_ορθ :μήκος :πλάτος
επανάλαβε :αριθμός_ορθ[ορθογώνιο_παραλληλόγραμμο :μήκος :πλάτος δεξιά 90
μπροστά :πλάτος αριστερά 90]
αριστερά 90
μπροστά :αριθμός_ορθ*:πλάτος
δεξιά 90
μπροστά :μήκος
τέλος
```



```
για πολλές_σειρές :αριθμός :αριθμός_ορθ :μήκος :πλάτος
επανάλαβε :αριθμός[σειρά_ορθογωνίων :αριθμός_ορθ :μήκος :πλάτος]
τέλος
```

- **εξάγωνα**

```
για κανονικό_εξάγωνο :πλευρά
επανάλαβε 6[μπροστά :πλευρά δεξιά 60]
τέλος

για σειρά_εξάγωνα :αριθμός :πλευρά
επανάλαβε :αριθμός[κανονικό_εξάγωνο :πλευρά
δεξιά 120
επανάλαβε 2[μπροστά :πλευρά αριστερά 60]]
μπροστά :πλευρά
αριστερά 60
μπροστά :πλευρά
επανάλαβε :αριθμός-1[αριστερά 60 μπροστά :πλευρά δεξιά 60 μπροστά :πλευρά]
δεξιά 60
τέλος
```

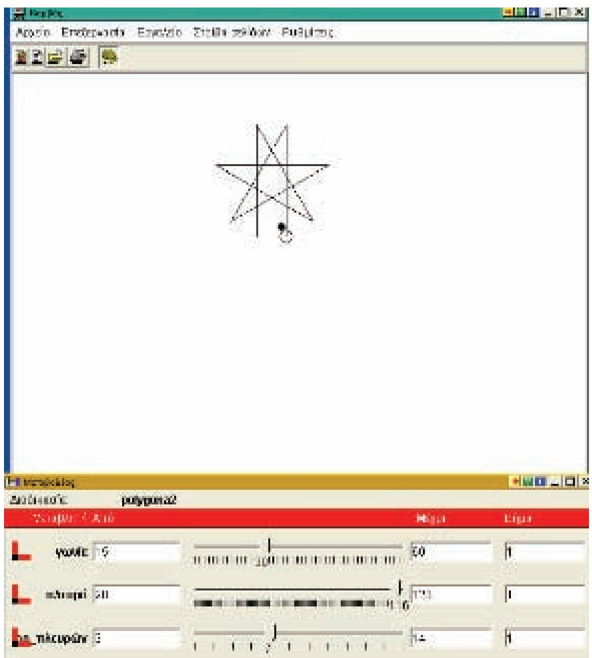


```
για πολλές_σειρές :σειρές :αριθμός :πλευρά
επανάλαβε :σειρές[σειρά_εξάγωνα :αριθμός :πλευρά]
τέλος
```

1.8 Διαδικασίες Μυστηρίου

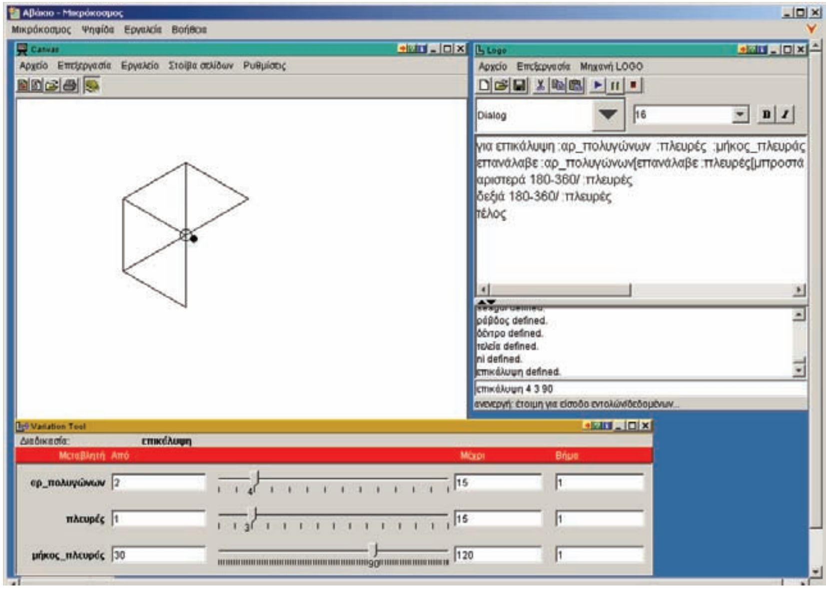
1.8.1 Διαδικασία Mistirio1 – Κανονικά πολύγωνα

```
Για Mistirio1 :γωνία :πλευρά :αρ_πλευρών
repeat :αρ_πλευρών [fd :πλευρά rt (difference 180 :γωνία)]
end
```



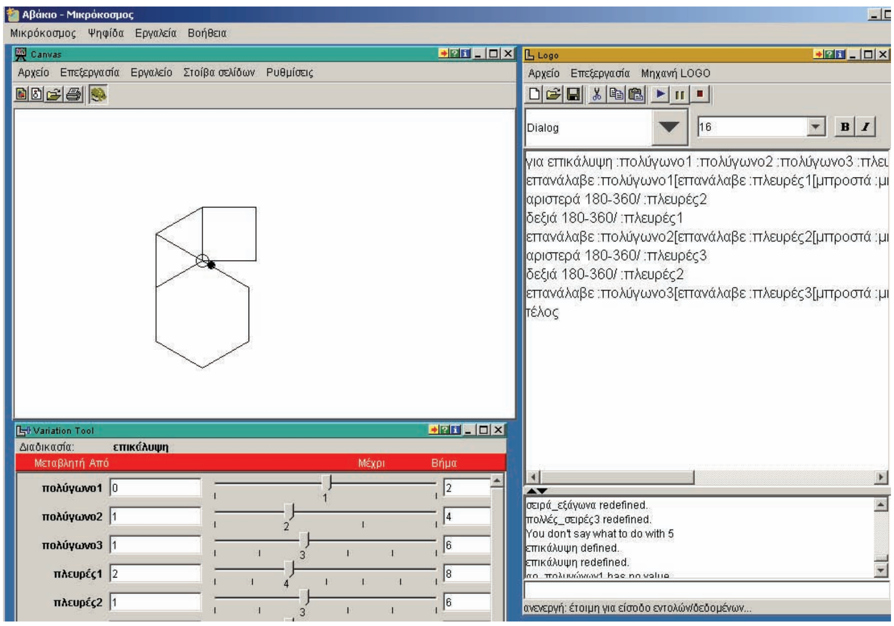
1.8.2 Διαδικασία Mistirio2 – Επικάλυψη με ένα είδος κανονικού πολυγώνου

Για Mistirio2 :αρ_πολυγώνων :πλευρές :μήκος_πλευράς
επανάλαβε :αρ_πολυγώνων[επανάλαβε :πλευρές[μπροστά :μήκος_πλευράς δεξιά 360/ :πλευρές] αριστερά 180-360/ :πλευρές]
αριστερά 180-360/ :πλευρές
δεξιά 180-360/ :πλευρές
τέλος



1.8.3 Διαδικασία Mistirio3 – Επικάλυψη με διαφορετικά πολύγωνα γύρω από μια κορυφή

Για Mistirio3 :πολύγωνα1 :πολύγωνα2 :πολύγωνα3 :πλευρές1 :πλευρές2 :πλευρές3 :μήκος_πλευράς
επανάλαβε :πολύγωνα1[επανάλαβε :πλευρές1[μπροστά :μήκος_πλευράς δεξιά 360/ :πλευρές1] αριστερά 180-360/ :πλευρές1]
αριστερά 180-360/ :πλευρές2
δεξιά 180-360/ :πλευρές1
επανάλαβε :πολύγωνα2[επανάλαβε :πλευρές2[μπροστά :μήκος_πλευράς δεξιά 360/ :πλευρές2]αριστερά 180-360/ :πλευρές2]
αριστερά 180-360/ :πλευρές3
δεξιά 180-360/ :πλευρές2
επανάλαβε :πολυγώνα3[επανάλαβε :πλευρές3[μπροστά :μήκος_πλευράς δεξιά 360/ :πλευρές3]]
τέλος



1.9 Παραπομπές

Becta, *The UK ILS evaluations: final report*, Coventry: Becta, 1998.

Crook, C., ''Computers in the Zone of Proximal Development'', *Computers in Education* 17 (1991): 81-89.

diDessa, A., *Changing minds*, M.I.T. press, 2000.

Edwards, L., ''Embodying mathematics and science: Microworlds as representations'', *Journal of Mathematical Behavior*, 17 (1) (1998): 53-78.

Ernest, P., *The philosophy of Mathematics Education*, London: The Falmer press, 1991.

Kynigos, C., ''Programming as a Means of Expressing and Exploring Ideas in a Directive Educational System: Three Case Studies'', in diSessa, A., Hoyles, C. & Noss, R. (Eds.), *Computers and Exploratory Learning,* (NATO ASI Series) Heidelberg: Springer-Verlag, 1995: 399-420.

Littleton, K., ''Productivity through interaction: an overview'', in Littleton, K. & Light. P. (Eds.), *Learning with Computers: Analyzing productive interaction*, London: Routhledge, 1999.

McFarlane, A., ''Perspectives on the relationships between ICT and assessment'', *Journal of Computer Assisted Learning* 17(2001): 227-234.

Noss, R.,, Healy, L. & Hoyles, C., ''The construction of Mathematical Meanings: Connecting the Visual with the Symbolic'', *Educational Studies in Mathematics* 33 (1997): 203-233.

Noss, R., ''For a Learnable Mathematics in the Digital Culture'', *Educational Studies in Mathematics* 48 (2001): 21-46.

Penner, D., ''Cognition, Computers and Synthetic Science: Building Knowledge and Meaning Through Modelling'', in Secade, W. (Ed), *Review of Research in Education*, Washington, American Educational research association, 2001.

de Corte, E., Verschaffel, L. & Lowyck, J., ''Computers, Media and Learning'', in de Corte, E. & Weinert, F., *International Encyclopedia of Developmental and Industrial Psychology*, London: Pergamon, 1996.

Hoyles, C. & Sutherland, R., *Logo Mathematics in the Classroom*, London: Routhledge, 1989.

diSessa, A. & Sherin, B., ''Meta-representation: an introduction'', *Journal of Mathematical Behavior* 19 (2000): 385-398.

Olive, J., ''Computer tools for interactive mathematical activity in the elementary school'', *International Journal of Computers for Mathematical Learning* 5 (2000): 241-262.

Vygotsky, L., *Mind in Society: The Development of Higher Psychological Processes*, Cambridge University Press, 1978.

Wood, D., *How Children Think and Learn*, Oxford: Blackwell, 1988.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΕΣ ΑΝΑΦΟΡΕΣ

1. Bøggild, J.K., ‘‘Breeding Tessellations’’, *Mathematics Teaching* 90 (1980): 31-36.
2. Boles, Martha and Newman, Rochelle, *The Surface Plane, The Golden Relationship: Art, Math & Nature, Book 2*, Bradford, MA: Pythagorean Press, 1992.
3. Boswell, Thom (Ed.), *The Kaleidoscope Book: A Spectrum of Spectacular Scopes to Make*, New York: Sterling Publishing, 1992.
4. Bourgoin, J., *Arabic Geometrical Pattern and Design*, New York: Dover, 1973. (Plates of original, 1879.)
5. Britton, Jill, & Dale Seymour, *Introduction to Tessellations*, Palo Alto: Dale Seymour Publications, 1989.
6. Britton, J., *Symmetry and Tessellation.* Palo Alto: Dale Seymour Publications, 2005.
7. Critchlow, Keith, *Islamic Patterns. An Analytical and Cosmological Approach*, New York: Schocken Books, 1976.
8. Crowe, Donald W., *Symmetry, Rigid Motions, and Patterns, HIMAP module 4*, Arlington MA: COMAP, 1987.
9. Edwards, Lois and Kevin Lee, *TesselMania! Math Connection*, Berkeley: Key Curriculum Press, 1994.
10. El-Said, Issam and Ayse Parman, *Geometric Concepts in Islamic Art*, London: World of Islam Festival Publishing Company, 1976. (Available from Dale Seymour Publications.)
11. Field, Robert, *Geometric Patterns from Roman Mosaics and how to draw them*, Stradbroke (England): Tarquin Publications, 1988.
12. Gardner, Martin, ‘‘Tiling with Polyominoes, Polyiamonds, and Polyhexes’’, *Time Travel and Other Mathematical Bewilderments*, New York: W.H. Freeman, 1988.
13. Giftwrap by Artists: M.C. Escher. New York, Harry Abrams, 1987.
14. Grünbaum, Branko and Geoffrey Shephard, *Tilings and Patterns*, New York: W. H. Freeman, 1987.
15. Haak, S., ‘‘Transformation Geometry and the Artwork of M. C. Escher’’, *Mathematics Teacher* 69 (1976): 647-652.
16. Hargittai, I. and M. Hargittai, *Symmetry, A Unifying Concept*, Bolinas, CA: Shelter Publications, 1994. (Also available from Key Curriculum Press.)
17. Hoffer, Alan and George Bratton, *Kaleidoscope Math*, Palo Alto, CA: Creative Publications, 1978.
18. Hofstadter, Douglas, ‘‘Parquet Deformations: Patterns of Tiles that Shift Gradually in One Dimension’’, *Scientific American*, (July 1983): 14-20.
19. Jones, Owen, *The Grammar of Ornament*, New York: Van Nostrand Reinhold, 1972. (Original 1856.) Plates only, New York: Dover, 1988.
20. Kappraff, Jay, *Connections: The Geometric Bridge Between Art and Science*, New York: McGraw-Hill, 1991.
21. Lockwood, E.H. and R.H. Macmillan, *Geometric Symmetry*, Cambridge: Cambridge University Press, 1978.
22. *The Mathematics Teacher* 67, no. 4 (1974). (Special issue on tessellations.)
23. O'Daffer, Phares and Stanley Clemens, *Geometry: An Investigative Approach*, Menlo Park, CA: Addison Wesley, 1976; second edition 1992.
24. Pearce, Peter, *Structure in Nature is a Strategy for Design*, Cambridge, MA: M. I. T. Press, 1978.
25. Racinet, Auguste, *L'ornement polychrome*, Paris: Firmin-Didot, 1869-1873. Plates only, Racinet's Historic Ornament in Full Color (ser. 1) and Full-Color Picture Sourcebook of Historic Ornament. New York: Dover, 1988, 1989.
26. Ranucci, E. R. & J. L. Teeters, *Creating Escher-Type Drawings*, Palo Alto, CA: Creative Publications, 1977.

27. Rigby, J. F., ‘‘Napolean, Escher, and Tessellations’’, *Mathematics Magazine* 64 (1991): 242-246.

28. Schattschneider, Doris, ‘‘In Black and White: How to Create Perfectly Colored Symmetric Patterns’’, *Symmetry: Unifying Human Understanding*, (Ed.) I. Hargittai, pp. 673-695. New York: Pergamon, 1986.

29. Schattschneider, Doris, ‘‘The Fascination of Tiling’’, *Leonardo* 25, no 3/4 (1992): 341-348. Reprinted in *The Visual Mind: Art and Mathematics*, ed. Michele Emmer, pp. 157-164. Boston: MIT Press, 1994.

30. Schattschneider, Doris, ‘‘In Praise of Amateurs’’, *The Mathematical Gardner*, (Ed.) David A. Klarner, pp. 140-166. Boston: Prindle, Weber & Schmidt (now Wadsworth).

31. Schattschneider, Doris, ‘‘The Plane Symmetry Groups, Their Recognition and Notation’’, *American Mathematical Monthly* 85 (1978): 439-450.

32. Schattschneider, Doris, ‘‘Tiling the Plane with Congruent Pentagons’’, *Mathematics Magazine* 51 (1978): 29-44.

33. Schattschneider, Doris, ‘‘Will it Tile? Try the Conway Criterion!’’, *Mathematics Magazine* 53 (1980): 224-233.

34. Schattschneider, Doris, *Visions of Symmetry: Notebooks, Periodic Drawings and Related Work of M. C. Escher*, New York: W.H. Freeman, 1990.

35. Schattschneider, Doris & Wallace Walker, *M.C. Escher Kaleidocycles*, Petaluma, CA: Pomegranate Publications, 1987.

36. Senechal, Marjorie, ‘‘Escher Designs on Surfaces’’, *M. C. Escher: Art and Science*, (Ed.) Coxeter, H.S. M., M. Emmer, R. Penrose and M. L. Teuber, Amsterdam: North Holland, 1986.

37. Senechal, Marjorie, *Quasicrystals and Geometry*, Cambridge University Press, 1995.

38. Serra, Michael, *Discovering Geometry, An Inductive Approach*, Berkeley: Key Curriculum Press, 1993.

39. Stevens, Peter S., *Handbook of Regular Patterns: An Introduction to Symmetry in Two Dimensions*, Cambridge, MA: MIT Press, 1980.

40. Wade, David, *Pattern in Islamic Art*, Woodstock, NY: Overlook, 1976.

41. Washburn, Dorothy K. and Donald W. Crowe, *Symmetries of Culture: Theory and Practice of Plane Pattern Analysis*, Seattle, WA: University of Washington Press, 1988.

42. Wiltshire, Alan, *Symmetry Patterns: The art of making beautiful patterns from special grids*, Stradbroke (England): Tarquin Publications, 1989.

43. Yaglom, I. M., *Geometric Transformations I*, Washington DC: Mathematical Association of America, New Mathematical Library no. 8.

Ενδιαφέρουσες Ηλεκτρονικές Διευθύνσεις (1/2008)

1. Εισαγωγή στα ψηφοθετήματα και στα πλακίδια στο δικτυακό κόμβο ScienceU: http://www.scienceu.com/geometry/articles/tiling
2. Η ψηφιακή βιβλιοθήκη του δικτυακού τόπου Thinkquest που χρηματοδοτείται από το Oracle Educational Foundation με πληθώρα εικόνων από δάπεδα, μωσαϊκά και τάπητες με επαναλαμβανόμενα πρότυπα: http://library.thinkquest.org
3. Παρουσίαση των ψηφοθετημάτων στο δικτυακό τόπο του Math Forum του Πανεπιστημίου Ντρέξελ: http://mathforum.org/sum95/suzanne/whattess.html

Ε Κ Π Α Ι Δ Ε Υ Τ Ι Κ Ε Σ Δ Ρ Α Σ Τ Η Ρ Ι Ο Τ Η Τ Ε Σ Γ Ι Α Τ Ο Γ Υ Μ Ν Α Σ Ι Ο

2.1 Θεματική ενότητα: Οπτικό πεδίο – προοπτικό επίπεδο

Η βασική ιδέα του σεναρίου

Το παρόν σενάριο στηρίζεται σε μία βασική παραδοχή η οποία προσδιορίζει και το επιστημολογικό πλαίσιο στο οποίο εξελίσσονται οι δραστηριότητες. Η παραδοχή αυτή διατυπώνεται με την πρόταση: «Ο τρόπος με τον οποίο προσλαμβάνουμε και κατανοούμε το χώρο συνδέεται στενά με την οπτική μας αντίληψη και τη φυσιολογία της».

Η παραδοχή αυτή είναι αποτέλεσμα της προσέγγισης της μαθηματικής γνώσης μέσα από το πρίσμα των ενσώματων μαθηματικών (embodied mathematics) που αναλύονται στη συνέχεια.

Η έννοια της γωνίας, για παράδειγμα, είναι απαραίτητη για τον καθορισμό του οπτικού μας πεδίου. Η μελέτη της σχέσης μεταξύ εγγεγραμμένης, επίκεντρης γωνίας και τόξου θα μπορούσε να μας οδηγήσει σε καλύτερη κατανόηση του μηχανισμού με τον οποίο αντιλαμβανόμαστε τα μεγέθη των αντικειμένων του χώρου και επομένως και του ίδιου του χώρου.

Τα σχήματα με τα οποία ασχολείται η γεωμετρία, και ιδιαίτερα το τετράγωνο και ο κύβος, μας επιτρέπουν να δημιουργήσουμε μοντέλα περιγραφής τόσο του αφηρημένου, νοητού μαθηματικού χώρου, όσο και του χώρου όπως τον αντιλαμβανόμαστε εμείς, δηλαδή του προοπτικού.

Με βάση τις προηγούμενες παραδοχές, η προσπάθεια να δομήσουμε με μαθηματικό τρόπο το προοπτικό επίπεδο και τον προοπτικό χώρο ανάγεται στη μελέτη του τρόπου με τον οποίο «φαίνεται» ένα τετράγωνο και ένας κύβος από τον παρατηρητή που βρίσκεται σε κάποια απόσταση από αυτά.

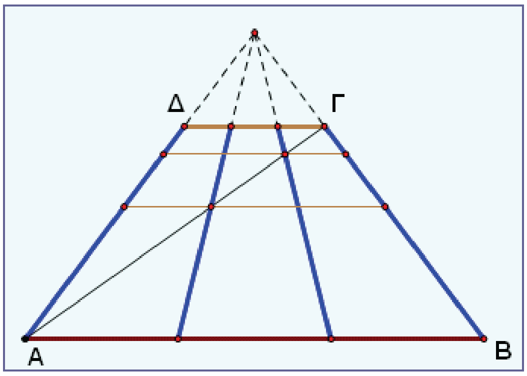
Με τον όρο «προοπτικό επίπεδο» καθορίζουμε το φαινόμενο επίπεδο, δηλαδή τον τρόπο με τον οποίο φαίνεται το επίπεδο και όχι τον τρόπο με τον οποίο το περιγράφει η Ευκλείδεια Γεωμετρία των σχολικών Μαθηματικών. Για παράδειγμα, το τετράγωνο, σε μία καθαρά μαθηματική προσέγγιση, έχει ίσες πλευρές και γωνίες. Στο προοπτικό επίπεδο δεν συμβαίνει αυτό, διότι το τετράγωνο φαίνεται ως τραπέζιο.

Στον προοπτικό χώρο μπορεί να γίνει μία ανάλογη προσέγγιση. Ο καθαρός ευκλείδειος χώρος είναι ένας κύβος, δηλαδή ένα στερεό με ίσες ακμές και ορθές γωνίες. Ωστόσο, ποτέ δεν αντιλαμβανόμαστε ένα μεγάλο δωμάτιο ως κύβο, αλλά ως πυραμίδα.

Εκείνο που παρουσιάζει ενδιαφέρον είναι η μελέτη των ιδιοτήτων του γεωμετρικού τετραγώνου, οι οποίες θα πρέπει να ληφθούν υπ' όψιν για την κατασκευή ενός φυσικού-πειστικού προοπτικού τετραγώνου. Στην ουσία, τόσο στην περίπτωση του τετραγώνου όσο και του κύβου, αναζητούμε τις αναλλοίωτες σχέσεις που μεταβιβάζονται από το γεωμετρικό στον προοπτικό χώρο.

Αν θα έπρεπε να διακρίνουμε τις βασικότερες μεταβιβαζόμενες σχέσεις μεταξύ των δύο χώρων, θα επιλέγαμε:

- Την ιδιότητα της διαγωνίου ενός τετραγώνου να περνά από τις κορυφές των τετραγώνων στα οποία αυτό διαιρείται
- Την παραλληλία των οριζόντιων τμημάτων του
- Την ισότητα των τμημάτων που ορίζονται πάνω σε μία παράλληλη



Πού απευθύνεται το σενάριο

Το σενάριο απευθύνεται κυρίως στους μαθητές των τριών τάξεων του γυμνασίου και εντάσσεται στην ύλη του κεφαλαίου της γεωμετρίας και των συναρτήσεων.

Η υλοποίησή του θα μπορούσε να ενταχθεί στη διδασκαλία μιας συγκεκριμένης έννοιας ή πρότασης που περιλαμβάνεται στο Αναλυτικό Πρόγραμμα, στη σύνοψη μίας παραγράφου ή ενός κεφαλαίου, αλλά και στη σύνδεση διαφορετικών κεφαλαίων του τρέχοντος σχολικού προγράμματος.

Με στόχο να αποκτήσει λειτουργικότητα για το διδάσκοντα, διακρίνεται σε έξι επιμέρους δραστηριότητες, δύο για κάθε τάξη του γυμνασίου. Η διάρκεια κάθε δραστηριότητας είναι ενδεικτική, ενώ η υποστήριξη της

διδασκαλίας ενός συγκεκριμένου γνωστικού αντικειμένου είναι εφικτή μέσα από μία προτεινόμενη διδακτική πορεία.
Οι δραστηριότητες εξελίσσονται κλιμακούμενες από την απλή παρατήρηση προς τη μελέτη και διερεύνηση συσχετίσεων μεταξύ μεταβαλλόμενων μεγεθών μέσω του λογισμικού.

Προαπαιτούμενα για την υλοποίηση του σεναρίου
Τα προαπαιτούμενα για την υλοποίηση του σεναρίου εξαρτώνται άμεσα από τους στόχους του διδάσκοντα και από τις δεξιότητες που διαθέτουν οι μαθητές σχετικά με την τεχνολογία και την απλή χρήση του υπολογιστή. Αυτός είναι και ο λόγος που η κάθε δραστηριότητα συνοδεύεται και από ένα έτοιμο αρχείο λογισμικού, το οποίο θα χρησιμοποιηθεί στην περίπτωση που ο διδάσκων κρίνει ότι δεν υπάρχει ιδιαίτερος χρόνος για την εξαρχής κατασκευή του συγκεκριμένου αρχείου από τους μαθητές.
Κάθε φύλλο εργασίας έχει ως αφετηρία δραστηριότητες οι οποίες στηρίζονται στο έτοιμο αρχείο και επομένως τόσο οι μαθητές όσο και ο διδάσκων μπορούν να παρακάμψουν το πρόβλημα της κατασκευής, οπότε οι απαιτήσεις για γνώση της τεχνολογίας είναι πλέον στοιχειώδεις. Συνοψίζοντας, θα μπορούσαμε να υποθέσουμε ότι:

- Οι μαθητές και ο διδάσκων διαθέτουν στοιχειώδεις γνώσεις για τις λειτουργικότητες του δυναμικού γεωμετρικού λογισμικού *The Geometer's Sketchpad*. Έμφαση θα πρέπει να δοθεί στην κατασκευή και μέτρηση τμημάτων, καθώς και στην κατασκευή παραλλήλων. Επίσης, καλό θα ήταν να γνωρίζουν τη λειτουργία του υπολογιστή που εμφανίζεται στο μενού των «Μετρήσεων». Εάν δεν υπάρχουν οι παραπάνω γνώσεις, τότε οι δραστηριότητες μπορούν και πάλι να υλοποιηθούν μέσα από τη χρήση ειδικών κουμπιών βοήθειας που διατίθενται σε κάθε αρχείο λογισμικού.

- Οι μαθητές εργάζονται ανά ζεύγη ή τριάδες στο εργαστήριο υπολογιστών του σχολείου, στους οποίους έχει εγκατασταθεί το λογισμικό. Κάθε ομάδα διαθέτει και ένα τετράδιο σημειώσεων.

Παιδαγωγικό πλαίσιο
Μια σύγχρονη αντίληψη για τη φύση των μαθηματικών είναι η θεωρία των ενσώματων μαθηματικών (embodied mathematics). Η θεωρία αυτή θα μπορούσε να συνοψιστεί σε τρεις βασικές αρχές:

1) Τα μαθηματικά είναι ένα φυσικό τμήμα της ανθρώπινης ύπαρξης. Αναδύονται από τη σωματικότητά μας, τον εγκέφαλό μας και την καθημερινή μας εμπειρία για τον κόσμο.

2) Η αποτελεσματικότητα και η δυνατότητα εφαρμογής των μαθηματικών στον πραγματικό κόσμο στηρίζεται στο γεγονός ότι αυτά προκύπτουν μέσω της αλληλεπίδρασης του νου με τον κόσμο. Η σταθερότητα των μαθηματικών είναι μια συνέπεια του ότι όλοι οι φυσιολογικοί άνθρωποι έχουν την ίδια σωματική δομή και ανάλογες σχέσεις με το περιβάλλον.

3) Έννοιες, όπως μεταβολή, αναλογία, μέγεθος, περιστροφή, πιθανότητα κ.λπ., είναι καθημερινές ιδέες που προκύπτουν μέσα από τη μαθηματικοποίηση, η οποία είναι μια κοινή ανθρώπινη δραστηριότητα.

Τελικά «τα μαθηματικά είναι θεμελιωδώς ένα ανθρώπινο εγχείρημα που προκύπτει από βασικές ανθρώπινες δραστηριότητες… είναι ένα νοητικό δημιούργημα που αναπτύχθηκε για τη μελέτη των αντικειμένων του κόσμου».

Με βάση τις παραπάνω επιστημολογικές θεωρήσεις θα μπορούσαμε να προσεγγίσουμε τα μαθηματικά και το περιεχόμενό τους ως ανθρώπινη δραστηριότητα ενταγμένη στο κοινωνικό και πολιτισμικό πλαίσιο. Η δραστηριότητα αυτή έχει ως αφετηρία άτυπα αξιώματα και εικασίες που δημιουργούνται με βάση τη σωματικότητά μας, ενώ η διαδρομή προς την αυστηρή, τυπική έκφραση έχει την ίδια αξία με το τελικό προϊόν. Τα μαθηματικά δεν ανακαλύπτονται πλέον, αλλά επινοούνται ή, μάλλον, προκύπτουν ως αποτελέσματα επινοήσεων παρά ανακαλύψεων.
Έχοντας αυτή την αντίληψη για τη φύση των μαθηματικών εννοιών, οι μαθητές δημιουργούν μία κοινότητα, ένα εργαστήριο μαθηματικών μέσα στο οποίο παράγονται μαθηματικά μοντέλα της οπτικής μας αντίληψης. Η ήδη υπάρχουσα γνώση χρησιμοποιείται για τη δόμηση με μαθηματικό τρόπο των δύο βασικών χωρικών δομών, του δισδιάστατου επιπέδου και του τρισδιάστατου χώρου.

Διδακτική αξία
Μία από τις πλέον διαδεδομένες απόψεις των μαθητών για τα μαθηματικά είναι ότι έχουν μικρή σύνδεση με τον πραγματικό κόσμο. Από την άλλη, κάθε φορά που τίθεται ένα πραγματικό πρόβλημα, η συνήθης διδακτική πρακτική οδηγεί σε διαπραγμάτευση της κατάστασης προβλήματος μέσω των στατικών εικόνων

των γεωμετρικών σχημάτων και των γραφικών παραστάσεων πάνω στο χαρτί. Η πρακτική αυτή έχει ως αποτέλεσμα ο μαθητής να αποκτά τα εφόδια για τη λύση ασκήσεων που έχουν περισσότερο σχέση με καθαρά γεωμετρικά αντικείμενα, παρά με πραγματικά προβλήματα. Αποτέλεσμα αυτού είναι το νόημα των μαθηματικών εννοιών να αντλείται κατά κύριο λόγο από την εμπειρία των αφηρημένων στατικών σχημάτων, όσον αφορά στη γεωμετρία, και από τους συντακτικούς κανόνες των συμβόλων, όσον αφορά στην άλγεβρα.
Με το συγκεκριμένο σενάριο οι μαθητές θα συνδέσουν μαθηματικές έννοιες με αυθεντικές καταστάσεις προβλήματος. Η διδασκαλία των μαθηματικών μέσα από τη διερεύνηση καταστάσεων προβλήματος αναγνωρίζεται από τη μαθηματική κοινότητα ως το κατεξοχήν μέσον για να «κάνουν μαθηματικά» οι μαθητές. Η χρήση των ΤΠΕ θα δημιουργήσει επιπλέον δυνατότητες για διερεύνηση, πολλαπλές αναπαραστάσεις και δυναμικό χειρισμό των γεωμετρικών αντικειμένων.

2.1.1 Ιστορική αναφορά

Το σύντομο ιστορικό σημείωμα εστιάζει αφενός στην έννοια της οπτικής γωνίας και του γωνιακού μεγέθους και αφετέρου στην προσπάθεια απεικόνισης του βάθους σε ένα σχέδιο που παριστάνει τον χώρο.

- Η οπτική γωνία

Η προσπάθεια υπολογισμού αποστάσεων ουράνιων σωμάτων αποτελεί ίσως μία από τις σημαντικότερες αιτίες για τη χρήση της έννοιας γωνίας και κυρίως για την αναζήτηση τρόπων μέτρησης και συσχέτισης με άλλα γεωμετρικά μεγέθη. Η φαινόμενη απόσταση μεταξύ δύο αστέρων, καθώς και το φαινόμενο ύψος ενός σώματος, εκφράζονται μέσω της γωνίας που έχει ως κορυφή τον οφθαλμό του παρατηρητή και οι πλευρές της διέρχονται από τα άκρα των τμημάτων που θέλουμε να μετρήσουμε. Μία καθοριστική επινόηση υπήρξε και η μέτρηση της γωνίας μέσω του τόξου που αποκόπτει από τον κύκλο στον οποίο είναι επίκεντρη. Το τόξο, η γωνία και η αντίστοιχη χορδή συνδέονται άρρηκτα στα μαθηματικά μοντέλα που δημιουργούν οι αστρονόμοι, οι οποίοι αναζητούν σχέσεις μεταξύ των μεγεθών αυτών. Η πρώτη συστηματική προσπάθεια καταγραφής των συγκεκριμένων σχέσεων εμφανίζεται στο έργο του Κλαύδιου Πτολεμαίου *Αλμαγέστη* (2ος αιώνας μ.Χ.) που θα μπορούσε να θεωρηθεί ως η αφετηρία για την αυστηρή θεμελίωση της τριγωνομετρίας. Ωστόσο, θα ήταν παράληψη να μην αναφερθούμε στο έργο του Ευκλείδη *Οπτικά* (3ος αιώνας π.Χ.) στο οποίο αναδεικνύεται η σημασία της οπτικής γωνίας και του φαινόμενου μεγέθους ενός αντικειμένου. Η βασική διαφορά των δύο έργων είναι το γεγονός ότι ο Ευκλείδης επιχειρεί να περιγράψει με καθαρά γεωμετρικό τρόπο την οπτική μας αντίληψη, ενώ ο Πτολεμαίος ενδιαφέρεται για τις μετρήσεις των μεγεθών μέσω της οπτικής γωνίας και εισάγει τη χρήση τριγωνομετρικών εννοιών.

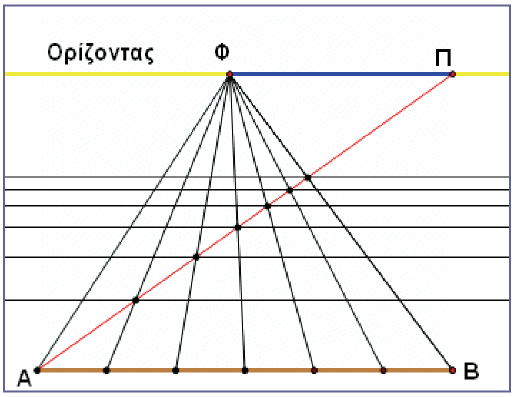
- Η απεικόνιση του βάθους

Η προσπάθεια απεικόνισης του βάθους μιας εικόνας υπάρχει ως νύξη μόνο σε έργα της Ελληνιστικής Περιόδου. Κατά τη διάρκεια του Μεσαίωνα ξεκίνησαν προσπάθειες απεικόνισης του προοπτικού χώρου μέσω των συγκλίνουσων γραμμών, οι οποίες όμως δεν διέθεταν ένα σταθερό σημείο σύγκλισης. Η χρήση του σημείου αυτού σηματοδοτεί και την έναρξη μιας αλματώδους ανάπτυξης της τέχνης της προοπτικής. Η κατασκευή της κάλυψης του προοπτικού δαπέδου με τη χρήση της γραμμής του ορίζοντα και του σημείου φυγής αποτελεί για μεγάλο χρονικό διάστημα την κατεξοχήν μέθοδο, ενώ προτείνονται διάφορες εκδοχές για τον τρόπο κατασκευής της διαγωνίου του δαπέδου. Από τις εκδοχές αυτές δύο είναι οι πλέον διαδεδομένες: η μέθοδος του Alberti, την οποία θα μελετήσουμε στη δεύτερη δραστηριότητα, και η μέθοδος του Jean Pelerin ή μέθοδος του «εξ αποστάσεως σημείου».

Μετά το 1435 οι περισσότερες αναλύσεις της προοπτικής στους πίνακες της Αναγέννησης γίνονται με τη μέθοδο Alberti, με τον ένα ή τον άλλο τρόπο. Ωστόσο, υπάρχουν πίνακες που παρουσιάζουν μια λίγο διαφορετική προσέγγιση. Δείχνουν στο δάπεδο ένα δικτυωτό πλέγμα τετραγώνων, το οποίο υποχωρεί στο βάθος και μοιάζει να ορίζεται από διαγωνίους των 45^o που ξεκινούν από το εν λόγω πλέγμα και καταλήγουν σε ένα σημείο στο επίπεδο του ματιού, συχνά τοποθετημένου στην άκρη του πίνακα.

Η προσέγγιση αυτή είναι γνωστή ως η μέθοδος του «σημείου εξ αποστάσεως», τα δε «σημεία εξ αποστάσεως» ονομάζονται έτσι, διότι η απόσταση ανάμεσα σε αυτά και στο κεντρικό σημείο συμβολής (*vanishing point*) είναι ίδια με την απόσταση ανάμεσα στο θεατή και στο επίπεδο της εικόνας. Εννοείται ότι αν το σημείο συμβολής για τις ορθές γωνίες τοποθετείται κεντρικά και η άκρη του πίνακα χρησιμοποιείται ως σημείο εξ αποστάσεως, τότε η «σωστή» οπτική της απόστασης είναι το μισό του πλάτους του πίνακα και η οπτική γωνία είναι 90^o.

Η μέθοδος του Pelerin παρουσιάζεται στην παρακάτω εικόνα.



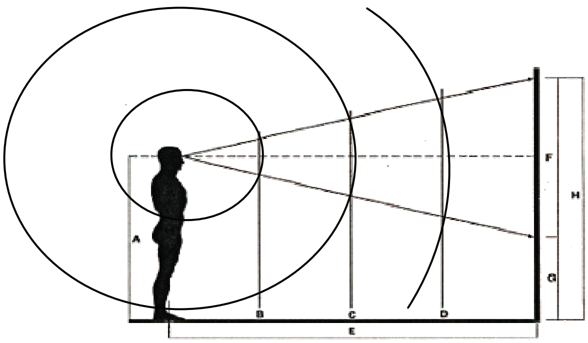
Το σημείο φυγής Φ βρίσκεται πάνω στον ορίζοντα, ενώ το Π είναι το σημείο εξ αποστάσεως. Η απόσταση ΠΦ είναι η απόσταση του παρατηρητή από τον πίνακα.

2.1.2 Τα μαθηματικά του σεναρίου

Στην παράγραφο αυτή περιγράφεται σε αδρές γραμμές το ***ευρύτερο πλαίσιο*** στο οποίο ανήκουν οι μαθηματικές έννοιες και σχέσεις με τις οποίες θα εμπλακούν οι μαθητές.
Η περιγραφή αυτή απευθύνεται αποκλειστικά και μόνο στο διδάσκοντα και δεν αποτελεί σε καμιά περίπτωση κατάλογο της «διδακτέας ύλης» η οποία σχετίζεται με το σενάριο. Αποκλειστικός στόχος είναι η μαθηματική τεκμηρίωση των δραστηριοτήτων και η ανάδειξη της σύνδεσης του μαθηματικού τους περιεχομένου με το ευρύτερο σώμα των μαθηματικών περιοχών.

- Η οπτική γωνία

Τα μαθηματικά που σχετίζονται με την οπτική γωνία ανάγονται κυρίως στον προσδιορισμό των σχέσεων που συνδέουν το τόξο, την επίκεντρη γωνία και τη χορδή.



1) Η σχέση μεταξύ επίκεντρης γωνίας και τόξου είναι εκείνη που μας επιτρέπει να εκτιμήσουμε το μέτρο μιας γωνίας μέσω του αντίστοιχου τόξου. Στο σημείο αυτό θα πρέπει να υπογραμμιστεί το γεγονός της έμμεσης μέτρησης της γωνίας, καθώς και το ότι η κατασκευή του εργαλείου μέτρησης μιας γωνίας, δηλαδή του μοιρογνωμόνιου, στηρίζεται ακριβώς στη μέτρηση του αντίστοιχου τόξου, όταν η συγκεκριμένη γωνία είναι επίκεντρη.

2) Η σχέση μεταξύ της απόστασης του κέντρου ενός κύκλου από μία χορδή, όταν η επίκεντρη γωνία παραμένει σταθερή, είναι γραμμική. Αυτό σημαίνει ότι για ίσες επίκεντρες γωνίες, σε διαφορετικούς κύκλους, ο λόγος της χορδής προς την απόστασή της από το κέντρο είναι σταθερός. Ο λόγος αυτός δεν είναι τίποτε άλλο παρά το διπλάσιο της τριγωνομετρικής εφαπτομένης του μισού της επίκεντρης γωνίας.

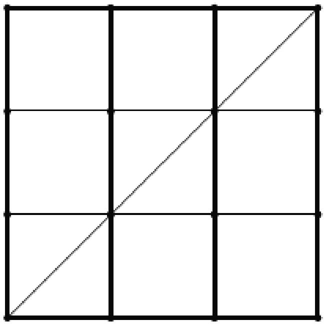
3) Η σχέση του τόξου προς τη χορδή δεν είναι γραμμική. Η σχέση αυτή εκφράζεται από μία καμπύλη η οποία αποτελεί τμήμα μιας ημιτονοειδούς τριγωνομετρικής καμπύλης.

- Η απεικόνιση του προοπτικού τετραγώνου

Τα μαθηματικά που σχετίζονται με την κατασκευή του προοπτικού τετραγώνου και του προοπτικού κύβου ανάγονται σε ιδιότητες του τετραγώνου, ιδιαίτερα της διαγωνίου του, και σε ιδιότητες των παράλληλων ευθειών που τέμνονται από άλλες μη παράλληλες ευθείες.

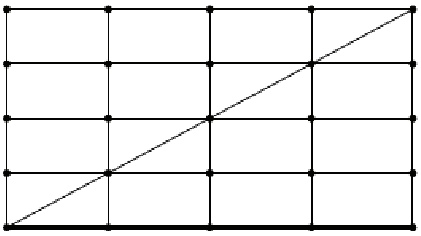
1) Θα ξεκινήσουμε με τις ιδιότητες του τετραγώνου, οι οποίες μεταβιβάζονται αυτούσιες στο προοπτικό τετράγωνο από τον κατασκευαστή του.

Ας υποθέσουμε ότι διαθέτουμε ένα τετράγωνο το οποίο έχει διαιρεθεί σε $ν^2$ μικρότερα τετράγωνα. Σε αυτή την περίπτωση η διαγώνιος του αρχικού τετραγώνου περνά από τις κορυφές των τετραγώνων που βρίσκονται στην κ γραμμή και κ στήλη.



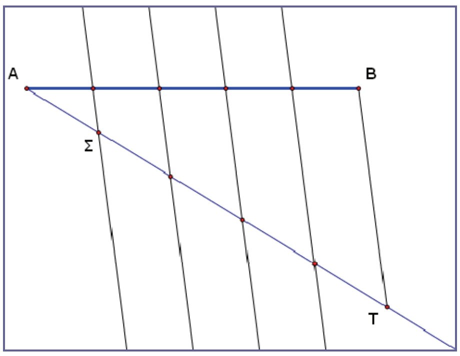
Η δικαιολόγηση της ιδιότητας αυτής θα μπορούσε να στηριχτεί στο ότι το τετράγωνο έχει άξονα συμμετρίας τη διαγώνιό του και στη συνέχεια να χρησιμοποιηθεί και από μαθητές της Α΄ Γυμνασίου. Οι μαθητές της Β΄ Γυμνασίου θα μπορούσαν να καταφύγουν στην έννοια της κλίσης, αφού η κλίση της διαγωνίου του αρχικού τετραγώνου είναι ίση με την κλίση των διαγωνίων κάθε τετραγώνου που βρίσκεται στην κ γραμμή και κ στήλη.

Ομοίως, όταν το αρχικό σχήμα είναι απλά ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο και έχει χωριστεί σε $ν^2$ ίσα ορθογώνια παραλληλόγραμμα, τότε η διαγώνιος του αρχικού θα περνά από τις κορυφές των ορθογωνίων που βρίσκονται στη θέση (κ, κ). Εδώ οι μαθητές της Α΄ Γυμνασίου μπορούν να χρησιμοποιήσουν το γεγονός ότι το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο διαθέτει κέντρο συμμετρίας και επομένως η περιστροφή κατά 180^o του ενός από τα δύο ορθογώνια τρίγωνα, που δημιουργεί η διαγώνιος, το ταυτίζει με το άλλο.



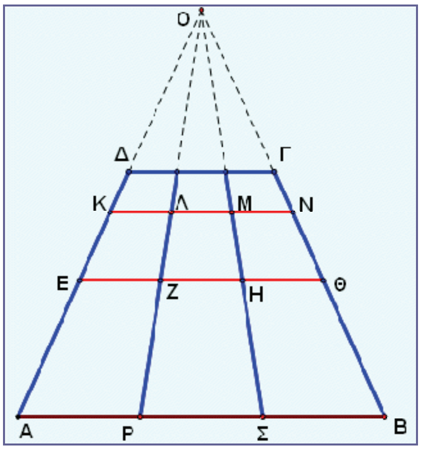
Η παραπάνω ιδιότητα θα μπορούσε να στηρίξει μία μέθοδο διαίρεσης ενός τετραγώνου ή ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου σε $ν^2$ μικρότερα, αλλά ίσα μεταξύ τους, τετράγωνα ή ορθογώνια παραλληλόγραμμα. Συγκεκριμένα, θα πρέπει να κατασκευαστεί η διαγώνιος του σχήματος, να διαιρεθεί σε ν ίσα μέρη και σε καθένα από τα άκρα των μερών αυτών να φέρουμε παράλληλες προς τις πλευρές. Αυτή ακριβώς η διαδικασία θα χρησιμοποιηθεί στην κατασκευή του προοπτικού τετραγώνου.

2) Η διαίρεση ενός τμήματος σε ν ίσα μέρη πραγματοποιείται με την εφαρμογή του Θεωρήματος του Θαλή, όταν πρόκειται για μαθητές της Γ΄ Γυμνασίου.



Η διαίρεση σε $2^ν$ τμήματα μπορεί να πραγματοποιηθεί με τη βοήθεια της μεσοκαθέτου ενός τμήματος. Σε κάθε άλλη περίπτωση είναι αναγκαίο να κατασκευαστεί μία ημιευθεία, η οποία θα έχει κοινή αρχή με το τμήμα και επάνω της θα κατασκευαστούν ν ίσα τμήματα ενός τυχαίου μήκους.

3) Τα τμήματα που ορίζονται σε καθεμία από τις παράλληλες γραμμές είναι ίσα, εφόσον η βάση του τραπεζίου είναι χωρισμένη σε ίσα τμήματα.



Αυτό συμβαίνει, διότι τα τρίγωνα με κορυφή το σημείο σύγκλισης Ο και βάσεις τα παράλληλα τμήματα είναι όμοια, ενώ ισχύει: ΑΡ=ΡΣ=ΣΒ.

2.1.3 Διδακτική προσέγγιση του σεναρίου

Μια διδακτική θεωρία

Ένα μεγάλο μέρος όσων ασχολούνται με τη διδακτική των μαθηματικών προτείνει τη στροφή του ενδιαφέροντος του κλάδου από τη μελέτη του αποτελέσματος της διδασκαλίας στη μελέτη της διαδικασίας με την οποία ο μαθητής δημιουργεί τη μαθηματική γνώση. Η διαδικασία αυτή θα μπορούσε να χαρακτηριστεί ως μαθηματικοποίηση.
Η μαθηματικοποίηση ανιχνεύεται κυρίως σε καταστάσεις επίλυσης προβλήματος και διακρίνεται σε δύο μορφές, στην οριζόντια και στην κατακόρυφη.
Η οριζόντια μαθηματικοποίηση χαρακτηρίζει την πορεία από την πραγματική κατάσταση, ή γενικότερα από ένα άλλο γνωστικό αντικείμενο, προς τα μαθηματικά.
Η κατακόρυφη αναπτύσσει συνδέσμους μέσα στα ίδια τα μαθηματικά, π.χ. επινοεί νέες μαθηματικές έννοιες και προτάσεις.
Προβλήματα που αναφέρονται σε αυθεντικές καταστάσεις και σχετίζονται με την εμπειρία του μαθητή αποτελούν μία ιδανική αφετηρία για δράσεις μαθηματικοποίησης. Η ομάδα των προβλημάτων στα οποία αναφέρονται οι δραστηριότητες του σεναρίου αφορούν στη μαθηματικοποίηση της οπτικής μας αντίληψης, δηλαδή στη δόμηση με μαθηματικό τρόπο συγκεκριμένων ψευδαισθήσεων που δημιουργεί η φυσιολογία της όρασής μας.
Η παραπάνω θέση οδηγεί στην ανάγκη δημιουργίας ενός μαθησιακού περιβάλλοντος, το οποίο να προσομοιάζει περισσότερο σε ένα εργαστήριο έρευνας και διαπραγμάτευσης παρά σε ένα ακροατήριο του διδάσκοντος.

Διδακτική διαδικασία στη σχολική τάξη

Ο διδάσκων

Όταν η δραστηριότητα υλοποιείται στο σχολικό περιβάλλον, ο διδάσκων έχει ένα σύνθετο ρόλο, καθώς καλείται να συνδυάσει τη συμπεριφορά του συν-ερευνητή και του συμβούλου σε θέματα που σχετίζονται τόσο με τις τεχνικές ιδιαιτερότητες του περιβάλλοντος όσο και με το γνωστικό αντικείμενο. Στην αρχή της δραστηριότητας θα δημιουργήσει κίνητρα για περαιτέρω συζήτηση και διερεύνηση, θέτοντας ένα πρόβλημα που σχετίζεται με τις ιδιαιτερότητες της όρασής μας. Οι περιορισμοί που μας επιβάλλει η όρασή μας θα μπορούσαν να θεωρηθούν ως αφετηρία για τη μελέτη της οπτικής μας αντίληψης.
Κατά τη διάρκεια της δραστηριότητας, ο διδάσκων επικοινωνεί με κάθε ομάδα και παρακολουθεί την εξέλιξή της, προτείνοντας στους μαθητές, αν αυτό είναι απαραίτητο, να διαπραγματευτούν κάποια νέα ιδέα.
Ο συντονισμός των ομάδων θα μπορούσε να γίνει κάθε φορά που ο διδάσκων καλεί την τάξη να συζητήσει ένα θέμα που παρουσιάζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον ή το εύρημα κάποιας ομάδας που ίσως να φανεί χρήσιμο και στις υπόλοιπες.
Στόχος σε όλες τις φάσεις της δραστηριότητας είναι η προώθηση μιας ερευνητικής στάσης των μαθητών, τους οποίους ο διδάσκων προτρέπει να πειραματιστούν, ώστε να επιβεβαιώσουν ή να απορρίψουν τις

εικασίες που κάνουν, καθώς αλληλεπιδρούν με το μαθησιακό περιβάλλον. Το πλαίσιο αυτό καθαρίζει τον τρόπο με τον οποίο ο καθηγητής επικοινωνεί με την τάξη.

Καταρχήν *αποφεύγει να υποδείξει* ως σωστό κάτι που οι μαθητές έχουν τη δυνατότητα να ελέγξουν μόνοι τους και προτιμά να τους προτρέψει να το διαπραγματευτούν. *Επιτρέπει* στους μαθητές να αναπτύξουν την επιχειρηματολογία τους, ακόμη και αν αυτή δεν είναι μαθηματικά έγκυρη. *Κατευθύνει* τους μαθητές όχι προς μια συγκεκριμένη απάντηση, αλλά προς μια πολλαπλότητα προσεγγίσεων, οι οποίες γίνονται αποδεκτές ή απορρίπτονται από τους ίδιους τους μαθητές έπειτα από μια διαπραγμάτευση στην οποία συμμετέχει και ο ίδιος ισότιμα.

Οι μαθητές
Μέσα στην τάξη οι μαθητές λειτουργούν σε τρία επίπεδα: στο ατομικό, στο επίπεδο της μικρής ομάδας και στο επίπεδο της τάξης. Στο ατομικό επίπεδο ο μαθητής επικοινωνεί με τον άλλο ή με τους άλλους μαθητές της μικρής ομάδας, διατηρώντας το δικαίωμά του να εκφράζει τις προσωπικές του απόψεις και τις αντιρρήσεις.

Στο επίπεδο της μικρής ομάδας, τα μέλη της συνεργάζονται, ενώ, συγχρόνως, αναλαμβάνουν συγκεκριμένες υποχρεώσεις σχετικά με την εργασία που καλείται να ολοκληρώσει η ομάδά τους. Για παράδειγμα, ένα μέλος θα μπορούσε να αναλάβει τη συλλογή πληροφοριών και εικόνων από το διαδίκτυο οι οποίες παρουσιάζουν το προοπτικό επίπεδο ή τον προοπτικό χώρο, ενώ ένα άλλο μέλος θα αναζητήσει πληροφορίες στη σχολική βιβλιοθήκη.

Τέλος, σε επίπεδο τάξης, οι μαθητές αποτελούν μια ερευνητική κοινότητα, τα μέλη της οποίας επικοινωνούν κάθε φορά που ολοκληρώνεται ή έχει προχωρήσει η διαπραγμάτευση σε επίπεδο ομάδας.
Οι μαθητές εργάζονται είτε στο φυσικό τους χώρο κατ' ιδίαν, είτε στο εργαστήριο υπολογιστών, και είναι χωρισμένοι σε ομάδες. Κάθε ομάδα διαθέτει έναν υπολογιστή, ένα τετράδιο και ένα φύλλο εργασίας κοινό για όλα τα μέλη της.

Τα υπολογιστικά εργαλεία
Η χρήση ενός δυναμικού γεωμετρικού λογισμικού θα μπορούσε να δημιουργήσει πολλές ευκαιρίες για διερεύνηση και γενίκευση των μαθηματικών που σχετίζονται με την οπτική μας αντίληψη. Συγκεκριμένα, η κατασκευή ενός προοπτικού σχήματος με τη χρήση στατικών αναπαραστασιακών μέσων, όπως είναι το μολύβι και χαρτί, δεν επιτρέπει τη διερεύνηση των ιδιοτήτων του και το μετασχηματισμό του. Αντιθέτως, στην περίπτωση ενός γεωμετρικού λογισμικού, ο χρήστης έχει τη δυνατότητα να εκτελέσει πειράματα, να αποδομήσει το σχήμα και να μελετήσει την κατασκευή του.

2.2 Δραστηριότητες για την Α' Γυμνασίου

1η Δραστηριότητα: ΟΠΤΙΚΗ ΓΩΝΙΑ

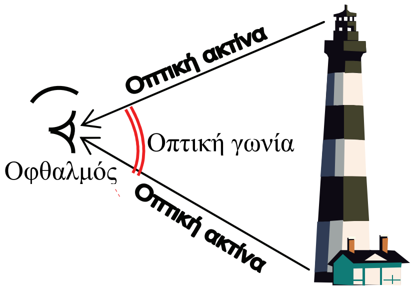
Διάρκεια της δραστηριότητας: 1-2 διδακτικές ώρες

Τάξη: Α΄ Γυμνασίου

Γνωστικά αντικείμενα:
- Η έννοια της γωνίας
- Είδη γωνιών
- Η σχέση επίκεντρης γωνίας και αντίστοιχου τόξου και η μέτρηση γωνίας

Η κατάσταση προβλήματος:
Οι μαθητές θα μελετήσουν ένα δυναμικό μοντέλο της οπτικής μας γωνίας και θα δημιουργήσουν οπτικές γωνίες με τις οποίες φαίνονται συγκεκριμένα αντικείμενα. Επίσης, θα συνδέσουν τη μέτρηση της επίκεντρης γωνίας με το αντίστοιχο τόξο.

Φύλλο εργασίας
Το ανθρώπινο μάτι μπορεί να παρομοιαστεί με μία σφαίρα, στο κέντρο της οποίας συγκεντρώνονται οι οπτικές ακτίνες που προέρχονται από το αντικείμενο που παρατηρούμε. Οι δύο ακραίες οπτικές ακτίνες καθορίζουν αυτό που αποκαλούμε οπτική γωνία.



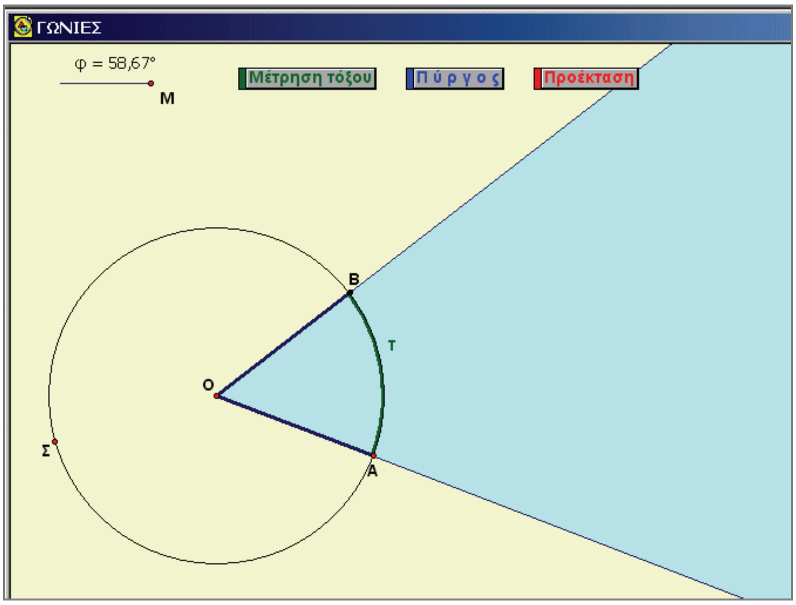
Προφανώς, η οπτική γωνία μεταβάλλεται καθώς εμείς μετακινούμαστε, πλησιάζοντας ή απομακρυνόμενοι από το αντικείμενο, δηλαδή καθώς μεταβάλλεται η απόστασή μας από το αντικείμενο.

Στη δραστηριότητα που ακολουθεί θα ασχοληθούμε με ένα κατάλληλο, δυναμικό γεωμετρικό σχήμα (μοντέλο) και μέσω αυτού θα μελετήσουμε τη συμπεριφορά της οπτικής γωνίας. Αρχικά, θα πρέπει να μελετήσετε το κείμενο που υπάρχει στο αρχείο **Οπτική γωνία**.

1) Εκτελέστε το εξής πείραμα: Με τη βοήθεια δύο μικρών λεπτών ράβδων (π.χ. δύο μολύβια) μετρήστε την οπτική γωνία με την οποία φαίνεται ένα αντικείμενο (π.χ. η πόρτα της αίθουσας από το επάνω μέρος της μέχρι το πάτωμα). Σε αυτή τη δραστηριότητα ο ένας από τους δύο της ομάδας σας κρατά τα μολύβια και ο άλλος μετρά με ένα μοιρογνωμόνιο τη γωνία και την καταγράφει. Επαναλάβετε το πείραμα και για άλλα αντικείμενα, π.χ. παράθυρα.

2) Οι ειδικοί λένε ότι η μέγιστη οπτική γωνία, μέσα στην οποία μπορούμε να αντιλαμβανόμαστε αντικείμενα, είναι 100^o περίπου. Εξετάστε, με όποιον τρόπο νομίζετε κατάλληλο, αν αυτό ευσταθεί.

Ανοίξτε το αρχείο vision του λογισμικού. Στην οθόνη προβάλλονται:
Ένας κύκλος με κέντρο Ο που μπορεί να μεταβάλλεται από το σημείο Σ.
Μία γωνία με κορυφή το Ο, χρωματισμένη γαλάζια. Η γωνία αυτή μπορεί να μεταβάλλεται, σύροντας το σημείο Μ, ενώ, συγχρόνως, εμφανίζεται και το μέτρο της φ.
Το τόξο τ που ορίζει η γωνία πάνω στον κύκλο.
Το κουμπί «Μέτρηση τόξου» που εμφανίζει το μέτρο του τόξου τ.
Το κουμπί «Πύργος», από όπου εμφανίζεται ένας γνωστός πύργος.
Το κουμπί «Προέκταση», από όπου εμφανίζεται η προέκταση μιας πλευράς της γωνίας.
Ένα κουμπί βοήθειας για τον τρόπο με τον οποίο μεταβάλλονται τα αντικείμενα στην οθόνη.



3) Στον παρακάτω πίνακα συμπληρώστε τη στήλη «Γεωμετρικό μοντέλο» με τα αντικείμενα που εμφανίζονται στην οθόνη και αντιστοιχούν ένα προς ένα με τα φυσικά αντικείμενα της πρώτης στήλης.

Πραγματική κατάσταση	**Γεωμετρικό μοντέλο**
Οφθαλμός	
Ακραίες οπτικές ακτίνες	
Οπτική γωνία	
Δύο μολύβια	
Μοιρογνωμόνιο	

4) Μετακινήστε το σημείο Μ (μεταβολέας) και κατασκευάστε στην αρχή οξείες γωνίες, στη συνέχεια ορθή και στο τέλος αμβλείες.

5) Με το κουμπί «Πύργος» εμφανίστε την εικόνα ενός γνωστού πύργου. Μελετήστε την οπτική γωνία για τον πύργο που υπάρχει στην οθόνη.

6) Με τη βοήθεια του κουμπιού «Μέτρηση τόξου» εμφανίστε το μέτρο του τόξου τ. Στην οθόνη σας έχετε τώρα τη μέτρηση της γωνίας και του αντίστοιχου τόξου. Τι παρατηρείτε; Σε τι συμπέρασμα καταλήγετε για τον τρόπο με τον οποίο μετράμε τις γωνίες;

7) Μεταβάλετε την ακτίνα του κύκλου, σύροντας το σημείο Σ. Εξετάστε αν μεταβάλλεται και η γωνία. Παρατηρήστε τη μέτρηση του τόξου. Σε τι συμπέρασμα καταλήγετε;

8) Με τη βοήθεια του μεταβολέα κατασκευάστε γωνίες μεγαλύτερες των 180^{o}. Χρησιμοποιήστε το κουμπί «Προέκταση» για να εμφανίσετε την προέκταση μίας πλευράς της γωνίας. Ποια είναι η θέση της προέκτασης της πλευράς ως προς τη γωνία; Αν τις γωνίες αυτές τις ονομάσουμε μη κυρτές, να διατυπώσετε έναν κανόνα για το πότε μία γωνία θα ονομάζεται μη κυρτή με βάση τη θέση της προέκτασης της πλευράς ως προς τη γωνία.

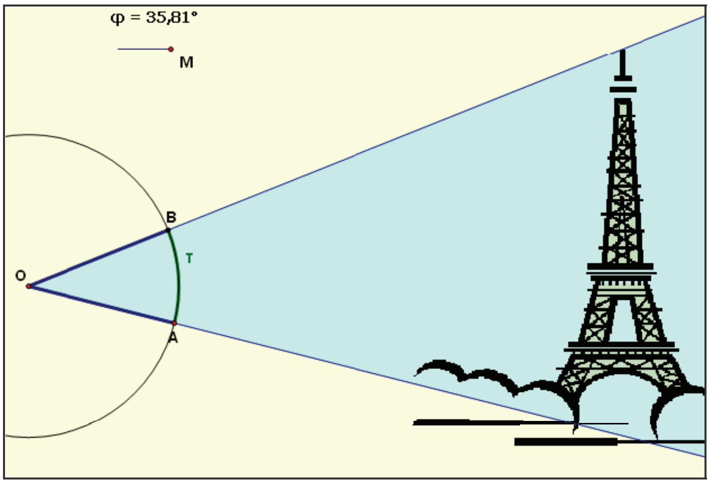
Οδηγίες και προτάσεις υλοποίησης

- Οι δύο πρώτες δραστηριότητες έχουν στόχο τη δημιουργία φυσικής εμπειρίας στους μαθητές. Χρησιμοποιώντας δύο μολύβια και ένα μοιρογνωμόνιο, θα μπορέσουν να «εκτιμήσουν» την οπτική γωνία με την οποία φαίνεται ένα αντικείμενο από κάποια απόσταση. Η δραστηριότητα αυτή μπορεί να αποτελέσει αφορμή για διαπραγμάτευση των στοιχείων εκείνων, από τα οποία αποτελείται η γωνία, π.χ. οι πλευρές και η κορυφή. Η δεύτερη δραστηριότητα μπορεί να δοθεί από το διδάσκοντα στους μαθητές για επεξεργασία και συγκέντρωση πληροφοριών κατ' οίκον.

- Στην τρίτη δραστηριότητα αρχίζει η σταδιακή μετάβαση από την εμπειρία προς τις μαθηματικές «έννοιες» και μετρήσεις. Συγκεκριμένα, ο διδάσκων εξηγεί στους μαθητές ότι τα διάφορα γεωμετρικά αντικείμενα μπορεί να θεωρηθούν ως γεωμετρικά μοντέλα φυσικών αντικειμένων, π.χ. το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο της επιφάνειας του τραπεζιού. Με αυτή την αντίληψη και με τη βοήθεια των κατασκευών στο αρχείο λογισμικού, οι μαθητές θα αντιστοιχίσουν: την κορυφή της γωνίας με τον οφθαλμό του παρατηρητή, τις πλευρές της γωνίας με τις ακραίες οπτικές ακτίνες, και το τόξο τ με το μοιρογνωμόνιο.

- Στην τέταρτη δραστηριότητα οι μαθητές θα κατασκευάσουν με τη βοήθεια των μετρήσεων τα τρία βασικά είδη των κυρτών γωνιών.

- Στην πέμπτη δραστηριότητα θα εμφανίσουν με το κουμπί «Πύργος» μία εικόνα του Πύργου του Άιφελ. Στη συνέχεια, με τη βοήθεια των σημείων Α και Μ, θα προσαρμόσουν τη γωνία φ στον πύργο.



- Στην έκτη δραστηριότητα καλό θα είναι να κάνουν απόκρυψη του πύργου και να εμφανίσουν τη μέτρηση του τόξου τ. Ο διδάσκων θα πρέπει να εξηγήσει στους μαθητές ότι το λογισμικό έχει τη δυνατότητα να μετρά κατευθείαν γωνίες, αλλά και τόξα. Στο σημείο αυτό θα πρέπει να γίνει διευκρίνιση ότι η μέτρηση του τόξου γίνεται μέσω της σύγκρισης του τόξου με τη μονάδα μέτρησης, που είναι και πάλι ένα τόξο το οποίο χωρά 360 φορές στον κύκλο.

- Στην έβδομη δραστηριότητα οι μαθητές θα σύρουν το σημείο Σ, ώστε να μεταβάλλεται η ακτίνα του κύκλου, και θα παρατηρήσουν ότι η μέτρηση του τόξου και της γωνίας παραμένει σταθερή. Η διαπίστωση αυτή μπορεί να οδηγήσει τους μαθητές να διατυπώσουν έναν κανόνα σύμφωνα με τον οποίο το μέτρο του τόξου εξαρτάται μόνο από την επίκεντρη γωνία και όχι από την ακτίνα του κύκλου.

- Η όγδοη δραστηριότητα έχει στόχο την επέκταση της έννοιας της γωνίας από κυρτή σε μη κυρτή. Εδώ οι μαθητές θα πρέπει να καταλήξουν στο συμπέρασμα ότι αν η γωνία υπερβεί τις 180^o, τότε η προέκταση μιας πλευράς της χωρίζει τη γωνία σε δύο μέρη, δηλαδή τη διαπερνά. Στόχος είναι οι μαθητές να συνδέσουν την έννοια της μη κυρτής γωνίας αφενός με μετρήσεις μεγαλύτερες των 180^o και αφετέρου με τη θέση της προέκτασης της πλευράς ως προς την ίδια τη γωνία.

2η Δραστηριότητα: ΤΟ ΠΡΟΟΠΤΙΚΟ ΔΑΠΕΔΟ

Διάρκεια της δραστηριότητας: 2 διδακτικές ώρες

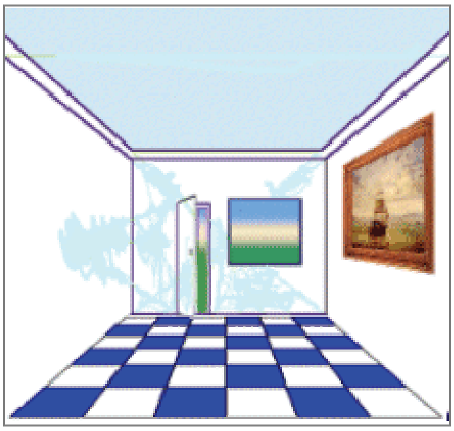
Τάξη: Α΄ Γυμνασίου

Γνωστικά αντικείμενα:
- Τετράγωνο, ορθογώνιο παραλληλόγραμμο και ισοσκελές τραπέζιο
- Λόγος δύο ποσών
- Συμμετρία ως προς άξονα

Η κατάσταση προβλήματος:
Η βασική ιδέα της δραστηριότητας στηρίζεται στο γεγονός ότι ένα τετράγωνο πάτωμα φαίνεται ως τραπέζιο, όταν ο παρατηρητής στέκεται σε μία από τις πλευρές του και το παρατηρεί. Το τραπέζιο θα μπορούσε επομένως να θεωρηθεί ως προοπτικό τετράγωνο και να αναζητηθούν οι ιδιότητες του τετραγώνου που μεταβιβάζονται σε αυτό, π.χ. η διατήρηση της αξονικής συμμετρίας. Οι μαθητές θα πρέπει να κατασκευάσουν μία μέθοδο για την κάλυψη ενός προοπτικού τετραγώνου σε 2^{ν} ίσα τετράγωνα ($\nu>1$), με τη βοήθεια της διαγωνίου του.

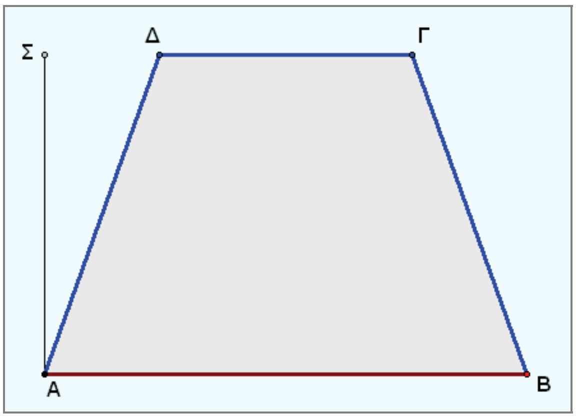
Φύλλο εργασίας

1) Πριν εργαστείτε στον υπολογιστή, παρατηρήστε την παρακάτω εικόνα και απαντήστε στις ερωτήσεις που ακολουθούν.



α) Ποιο είναι το σχήμα που **φαίνεται** να έχει το δάπεδο;
β) Ποιο είναι το **πραγματικό** σχήμα του δαπέδου; Πώς δικαιολογείτε την απάντησή σας;
Αυτή ακριβώς την εντύπωση που μας δημιουργεί ένα πλακόστρωτο δάπεδο πρόκειται να μελετήσουμε με τη βοήθεια του λογισμικού.

2) Ανοίξτε το αρχείο tetragono του λογισμικού. Στην οθόνη προβάλλεται ένα τραπέζιο ΑΒΓΔ, στο οποίο μπορούμε να μεταβάλλουμε τη μικρή βάση ΔΓ από το σημείο Δ και τη μεγάλη βάση από το σημείο Β. Από το σημείο Σ μπορούμε να αυξήσουμε ή να ελαττώσουμε το ύψος του. Επιπλέον υπάρχουν τρία κουμπιά μετρήσεων, από τα οποία μπορείτε να αντλήσετε πληροφορίες για τις μεταβολές των γεωμετρικών αντικειμένων και τις μετρήσεις τους, καθώς και ένα κουμπί με τη βοήθεια για την κατασκευή της μεσοκαθέτου ενός τμήματος.



Να μεταβάλετε το ύψος του τραπεζίου από το σημείο Σ. Αν υποθέσετε ότι το τραπέζιο παριστάνει ένα δάπεδο, ποια αίσθηση σας δίνει το δάπεδο, καθώς ελαττώνεται το ύψος του τραπεζίου, και ποια καθώς αυξάνεται;

3) Μετρήστε τις μη παράλληλες πλευρές του τραπεζίου. Τι παρατηρείτε; Στη συνέχεια μετρήστε τις γωνίες της μικρής και της μεγάλης του βάσης. Τι παρατηρείτε; Τι παρατηρείτε;

4) Σύρετε τα σημεία Σ, Β, Δ, ώστε, με βάση τις μετρήσεις σας, να είναι βέβαιο ότι το τραπέζιο έχει μετατραπεί σε τετράγωνο.

5) Μετατρέψτε το τετράγωνο σε ορθογώνιο παραλληλόγραμμο και στη συνέχεια σε τραπέζιο.

6) Φέρτε τη μεσοκάθετο της μεγάλης βάσης και να ελέγξετε αν είναι μεσοκάθετος και της μικρής βάσης.

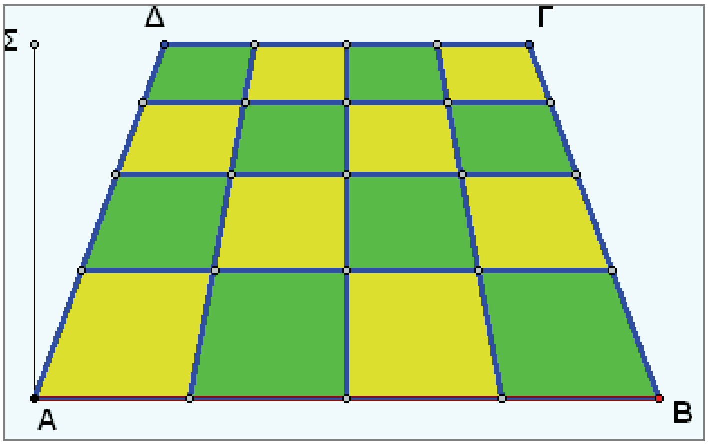
7) Προεκτείνετε τις πλευρές ΒΓ και ΑΔ, ώστε να τέμνονται. Πού βρίσκεται το σημείο τομής; Πώς μπορούμε να χαρακτηρίσουμε τη μεσοκάθετη ως προς το τραπέζιο;

8) Χωρίστε τη μεγάλη και τη μικρή βάση σε τέσσερα ίσα μέρη και κατασκευάστε τα τμήματα που ενώνουν τα σημεία της μικρής βάσης με τα αντίστοιχα σημεία της μεγάλης βάσης.

9) Κατασκευάστε τη διαγώνιο ΑΓ και βρείτε τα σημεία στα οποία τέμνεται με τα τμήματα που δημιουργήσατε στην προηγούμενη δραστηριότητα. Από τα σημεία αυτά φέρτε παράλληλες προς τις βάσεις.

10) Προφανώς το δάπεδο είναι ορθογώνιο ή τετράγωνο. Θέλουμε να καλύψουμε το δάπεδο με τετράγωνες πλάκες. Πώς μπορούμε να το πετύχουμε με βάση την προηγούμενη δραστηριότητα;

Σημείωση
Το δάπεδο θα πρέπει μετά την κάλυψή του να παρουσιάζει την παρακάτω εικόνα:



11) Μετρήστε τις διαστάσεις των τετραγώνων όπως φαίνονται στο προοπτικό πάτωμα. Βρείτε τους λόγους των τμημάτων με τη βοήθεια του λογισμικού. Τι παρατηρείτε; Πώς εξηγείτε τις παρατηρήσεις σας;

12) Μεταβάλετε το ύψος ΑΣ. Ισχύει αυτό που παρατηρήσατε στην προηγούμενη δραστηριότητα;

13) Γράψτε τα συμπεράσματά σας με μορφή κανόνων.

Οδηγίες και προτάσεις υλοποίησης
Καλό θα είναι ο διδάσκων να διακρίνει τις δύο βασικές φάσεις της δραστηριότητας, οπότε θα κάνει καλύτερη κατανομή του χρόνου.
Η πρώτη φάση θα μπορούσε να χαρακτηριστεί ως διαισθητική, στην οποία οι μαθητές περιγράφουν την οπτική τους αντίληψη για το σχήμα που φαίνεται να έχει ένα τετράγωνο δάπεδο. Στη δεύτερη φάση οι μαθητές μελετούν μία δυναμική κατασκευή του προοπτικού δαπέδου με τη βοήθεια των εργαλείων που τους παρέχει το λογισμικό. Η φάση αυτή θα ολοκληρωθεί με τις μαθηματικές διατυπώσεις των σημαντικών παρατηρήσεων που έχουν κάνει οι μαθητές.

Η αναμενόμενη διδακτική πορεία θα μπορούσε συνοπτικά να περιγραφεί από την ακόλουθη σειρά δράσεων:

- Στο α΄ σκέλος της πρώτης άσκησης οι μαθητές αναμένεται να αναγνωρίσουν το σχήμα ενός τραπεζίου και να συμπεράνουν ότι το φαινόμενο σχήμα ενός προοπτικού τετραγώνου είναι το τραπέζιο. Εδώ θα ήταν χρήσιμο ο διδάσκων να διαπραγματευτεί με τους μαθητές το σχήμα που φαίνεται να έχει το δάπεδο, όταν ο παρατηρητής είναι τοποθετημένος πέρα από τον άξονα συμμετρίας του δαπέδου. Στην περίπτωση αυτή το τραπέζιο δεν είναι ισοσκελές.

- Στο β΄ σκέλος της πρώτης άσκησης οι μαθητές μετρούν το πλήθος των τετραγώνων κάλυψης του δαπέδου και αναγνωρίζουν ότι το δάπεδο είναι όντως τετράγωνο. Ο διδάσκων ζητά από τους μαθητές να κατασκευάσουν στο τετράδιό τους προοπτικά τετράγωνα είτε ως ισοσκελή τραπέζια είτε ως κοινά τραπέζια.

- Από τη δεύτερη άσκηση αρχίζει η μελέτη των ιδιοτήτων του προοπτικού τετραγώνου. Στην αρχή οι μαθητές μεταβάλλουν το σχήμα και τις διαστάσεις του τραπεζίου που εμφανίζεται στην οθόνη και αποκτούν την αίσθηση της κλίσης του δαπέδου, όταν το μήκος της μικρής βάσης του τραπεζίου ελαττώνεται.

- Στην τρίτη άσκηση οι μαθητές μελετούν τις σημαντικές ιδιότητες του ισοσκελούς τραπεζίου, όπως την ισότητα των γωνιών της μεγάλης βάσης, καθώς και των γωνιών της μικρής βάσης. Καλό θα είναι οι μαθητές να καταγράφουν τα συμπεράσματα αυτά στο τετράδιό τους.

- Στην τέταρτη άσκηση οι μαθητές διαπραγματεύονται την κατασκευή τετραγώνων με βάση την ισότητα των μετρήσεων των γωνιών, αλλά και των πλευρών. Εδώ είναι ευκαιρία να γίνει διαπραγμάτευση με τους μαθητές για τις ιδιότητες του τετραγώνου, οι οποίες αποτελούν και κριτήρια για την κατασκευή του.

- Στην πέμπτη άσκηση οι μαθητές διαπραγματεύονται την κατασκευή ορθογωνίων παραλληλογράμμων με βάση την ισότητα των μετρήσεων των γωνιών, αλλά και των πλευρών. Εδώ είναι ευκαιρία να γίνει διαπραγμάτευση με τους μαθητές για τις ιδιότητες του ορθογωνίου παραλληλογράμμου, οι οποίες αποτελούν και κριτήρια για την κατασκευή του.

- Στόχος της έκτης άσκησης είναι η ανάδειξη της βασικής ιδιότητας του ισοσκελούς τραπεζίου, σύμφωνα με την οποία διαθέτει έναν άξονα συμμετρίας που περνά από το μέσον της κάθε βάσης του. Η κατασκευή της μεσοκαθέτου θα γίνει από τους μαθητές, αφού πρώτα κατασκευάσουν το μέσον κάθε βάσης και ύστερα φέρουν τις καθέτους στα σημεία αυτά. Αναμένεται να παρατηρήσουν ότι οι δύο αυτές κάθετοι συμπίπτουν.

- Στόχος της έβδομης άσκησης είναι οι μαθητές να επεκτείνουν τη γνώση τους σχετικά με το τραπέζιο και το τμήμα που ενώνει τα μέσα των παράλληλων πλευρών του. Εδώ ο διδάσκων θα μπορούσε να ζητήσει από τους μαθητές να διαπραγματευτούν τι θα συμβεί, αν το σχήμα (άρα και το τραπέζιο) διπλωθεί γύρω από αυτές τις καθέτους.

- Στην όγδοη άσκηση οι μαθητές χρησιμοποιούν την κατασκευή μέσου, για να χωρίσουν κάθε βάση σε τέσσερα ίσα μέρη. Εδώ είναι ευκαιρία ο διδάσκων να ζητήσει από τους μαθητές να αναφέρουν τη σχέση που έχει καθένα από τα τέσσερα τμήματα προς το ολικό ή προς το ήμισυ του ολικού τμήματος. Επιπλέον, καλό θα είναι να διαπραγματευτεί με τους μαθητές τη δυνατότητα να χωρίσουν ένα τμήμα σε τρία, πέντε, έξι κ.λπ. ίσα τμήματα.

- Στόχος της ένατης και δέκατης άσκησης είναι οι μαθητές να δημιουργήσουν μία μέθοδο χωρισμού ενός τραπεζίου σε 4, 16 ή 25 μέρη, ώστε, όταν αυτό μετασχηματιστεί σε τετράγωνο, να εμφανίζεται χωρισμένο σε ισάριθμα τετράγωνα. Οι μαθητές θα χρησιμοποιήσουν την κατασκευή σημείου τομής με τη βοήθεια του λογισμικού και την κατασκευή παραλλήλου από σημείο σε ευθεία.

- Στην ενδέκατη άσκηση οι μαθητές θα μετρήσουν τα τμήματα και στη συνέχεια θα τα συγκρίνουν. Η μέτρηση θα γίνει με τη βοήθεια του λογισμικού και θα αρχίσουν μετρώντας τα τμήματα που βρίσκονται στην ίδια ευθεία. Θα πρέπει να διαπιστώσουν ότι τα τμήματα αυτά παραμένουν ίσα μεταξύ τους, ενώ η εξήγηση αυτού μπορεί να στηριχτεί στο γεγονός της ύπαρξης ενός άξονα συμμετρίας.

- Στη δωδέκατη άσκηση οι μαθητές αναμένεται να διαπιστώσουν ότι οι μετρήσεις μεταβάλλονται, όχι όμως και οι σχέσεις των τμημάτων που βρίσκονται στο ίδιο οριζόντιο τμήμα.

2.3 Δραστηριότητες για τη Β' Γυμνασίου

1η Δραστηριότητα: ΟΠΤΙΚΗ ΓΩΝΙΑ ΤΟΥ ΘΕΑΤΗ

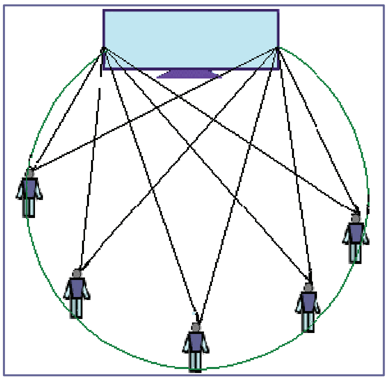
Διάρκεια της δραστηριότητας: 1-2 διδακτικές ώρες

Τάξη: Β΄ Γυμνασίου

Γνωστικά αντικείμενα:

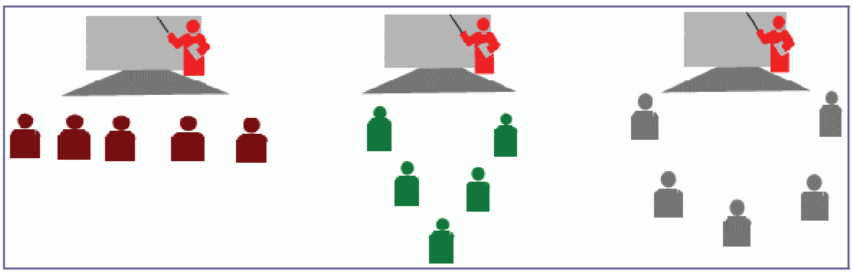
- Η έννοια της εγγεγραμμένης γωνίας
- Η σχέση εγγεγραμμένης - επίκεντρης γωνίας
- Η σχέση εγγεγραμμένης γωνίας και αντίστοιχου τόξου

Η κατάσταση προβλήματος:
Ένα χαρακτηριστικό πρόβλημα που σχετίζεται με την οπτική γωνία θέασης ενός σταθερού αντικειμένου είναι το εξής: «**Σε ποια διάταξη οι θεατές βλέπουν μία παρουσίαση το ίδιο «καλά»;**
Η μαθηματική περιγραφή του προβλήματος ανάγεται στην εύρεση στις καμπύλης εκείνης, πάνω στην οποία όλοι οι θεατές βλέπουν με την ίδια οπτική γωνία την παρουσίαση.

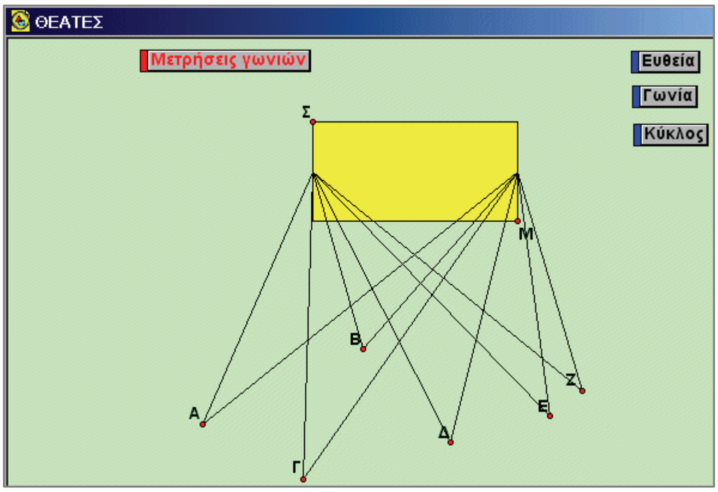


Η καμπύλη αυτή είναι ένας κύκλος, ενώ η μαθηματική εξήγηση στηρίζεται στις εγγεγραμμένες γωνίες που βαίνουν στο ίδιο τόξο.

Φύλλο εργασίας
Να μελετήσετε το συμπληρωματικό κείμενο της **Οπτικής γωνίας**.
Σε καθεμία από τις παρακάτω εικόνες εμφανίζονται μερικοί θεατές οι οποίοι παρακολουθούν μία παρουσίαση. Σε ποια άραγε από εικόνες αυτές οι θεατές έχουν την ίδια οπτική γωνία προς τον παρουσιαστή; Με άλλα λόγια, σε ποια από αυτές οι θεατές βλέπουν όλοι το ίδιο καλά;



Ανοίξτε το αρχείο theates του λογισμικού.



Στην οθόνη εμφανίζονται:
Ένα κίτρινο ορθογώνιο παραλληλόγραμμο το οποίο μπορεί να μεταβάλλεται από τα σημεία Σ και Μ.
Τα ελεύθερα σημεία Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ, που είναι και κορυφές των αντίστοιχων γωνιών.
Τα κουμπιά «Ευθεία», «Γωνία», «Κύκλος» που εμφανίζουν τα αντίστοιχα σχήματα στην οθόνη.
Το κουμπί «Μετρήσεις γωνιών» που εμφανίζει τα μέτρα των έξι γωνιών.

1) Στον παρακάτω πίνακα συμπληρώστε τη στήλη «Γεωμετρικό μοντέλο» με τα αντικείμενα που εμφανίζονται στην οθόνη.

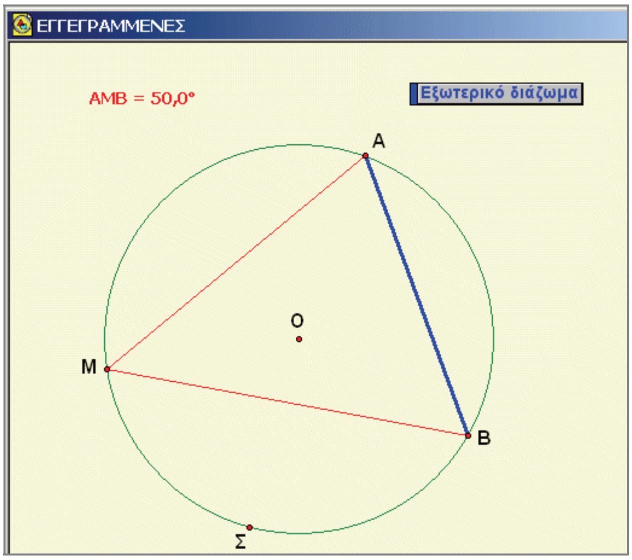
Πραγματική κατάσταση	**Γεωμετρικό μοντέλο**
Πίνακας παρουσίασης	
Θεατές	
Οπτικές γωνίες	

2) Με το κουμπί «Ευθεία» εμφανίστε την ευθεία και τοποθετήστε επάνω της τους θεατές, τον ένα δίπλα στον άλλο. Εμφανίστε τις μετρήσεις των γωνιών, σχολιάστε τις οπτικές γωνίες των θεατών και καταγράψτε τα συμπεράσματά σας.

3) Αποκρύψτε την ευθεία και με το κουμπί «Γωνία» εμφανίστε τη γωνία. Τοποθετήστε σε διάταξη τους θεατές πάνω σε αυτή. Σχολιάστε τα μέτρα των γωνιών.

4) Αποκρύψτε τη γωνία και με το κουμπί «Κύκλος» εμφανίστε τον κύκλο. Τοποθετήστε σε διάταξη τους θεατές πάνω σε αυτόν. Σε ποια περίπτωση φαίνεται ότι οι οπτικές γωνίες μπορεί να είναι και ίσες;

Κλείστε το αρχείο αυτό και ανοίξτε εκείνο με τίτλο gonies.



Στην οθόνη παρουσιάζονται:
Ένας κύκλος που μπορεί να μεταβληθεί, αν σύρετε το σημείο Σ ή το σημείο Ο. Μία εγγεγραμμένη γωνία με κορυφή το σημείο Μ που βλέπει το τόξο ΑΒ. Η μέτρηση της γωνίας ΑΜΒ. Ένα κουμπί με τίτλο «Εξωτερικό διάζωμα» που εμφανίζει ένα τόξο από έναν κύκλο μεγαλύτερο από τον αρχικό και μία εγγεγραμμένη γωνία με τη μέτρησή της.

5) Μετακινήστε το σημείο Μ που βρίσκεται πάνω στον κύκλο. Παρατηρήστε τη μέτρηση της γωνίας. Διατυπώστε το συμπέρασμα στο οποίο καταλήγετε.

6) Κατασκευάστε την επίκεντρη γωνία ΑΟΒ και μετρήστε τη. Μεταβάλετε τη θέση του σημείου Μ και συγκρίνετε τις μετρήσεις των δύο γωνιών (επίκεντρης-εγγεγραμμένης). Σε τι συμπέρασμα καταλήγετε;

7) Με βάση το αμέσως προηγούμενό σας συμπέρασμα αιτιολογήστε το συμπέρασμα που αποκομίσατε στη δραστηριότητα 4.

8) Μεταβάλετε τη θέση των σημείων Α και Β, ώστε το τμήμα να γίνει διάμετρος. Ποια είναι η τιμή της γωνίας ΑΜΒ; Αιτιολογήστε γιατί η τιμή της γωνίας είναι εκείνη που δείχνει η μέτρηση με το λογισμικό.

9) Μετακινήστε το σημείο Μ (θεατής), ώστε να βρεθεί «πίσω» από τον πίνακα παρουσίασης (τμήμα ΑΒ). Ποια είναι τώρα η τιμή της γωνίας ΑΜΒ; Ποια σχέση έχει με τη μέτρηση, όταν το Μ βρισκόταν «μπροστά» από τον πίνακα παρουσίασης; Διατυπώστε το συμπέρασμά σας και αιτιολογήστε το με μαθηματικούς συλλογισμούς.

10) Εμφανίστε το δεύτερο κύκλο με το κουμπί «Εξωτερικό διάζωμα». Συγκρίνετε τις οπτικές γωνίες των θεατών που βρίσκονται σε αυτά τα δύο διαφορετικά διαζώματα και διατυπώστε τα συμπεράσματά σας για τις θέσεις που προσφέρουν τη βέλτιστη οπτική γωνία στο θεατή.

Οδηγίες και προτάσεις υλοποίησης
Στην ουσία η δραστηριότητα διακρίνεται σε δύο φάσεις.

Α΄ ΦΑΣΗ

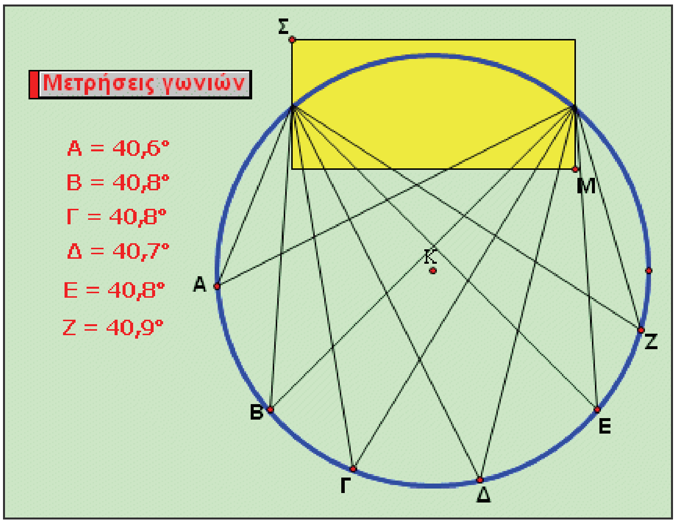
Στόχος της πρώτης φάσης είναι οι μαθητές να μελετήσουν μία αληθοφανή προσομοίωση θεατών και των οπτικών τους γωνιών.

- Στην πρώτη άσκηση οι μαθητές θα θεωρήσουν το κίτρινο παραλληλόγραμμο ως γεωμετρικό μοντέλο της οθόνης, τα σημεία Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ ως θεατές και τις γωνίες που έχουν κορυφές τα σημεία αυτά ως τις οπτικές γωνίες των θεατών.

- Στις ασκήσεις 2, 3 και 4 οι μαθητές θα πειραματιστούν με τρεις διαφορετικές διατάξεις των θεατών. Συγκεκριμένα στη δεύτερη δραστηριότητα οι μαθητές θα εμφανίσουν την ευθεία με το αντίστοιχο κουμπί και θα τοποθετήσουν επάνω της τα δεδομένα σημεία. Όταν θα εμφανιστούν οι μετρήσεις για τις γωνίες των θεατών, τότε οι μαθητές αναμένεται να διαπιστώσουν ότι οι θεατές που βρίσκονται στις ακραίες θέσεις «αδικούνται» ως προς τη δυνατότητα να παρατηρούν τον πίνακα.

- Στη συνέχεια θα αποκρύψουν την ευθεία και θα εμφανίσουν τη γωνία. Όταν διατάξουν τους θεατές πάνω στη γωνία, θα διαπιστώσουν ότι και πάλι η διάταξη δημιουργεί ανισότητες σε σχέση με τις οπτικές γωνίες των θεατών.

- Τέλος θα αποκρύψουν τη γωνία και θα εμφανίσουν τον κύκλο. Όταν τοποθετήσουν τους θεατές σε κυκλική διάταξη αναμένεται να διαπιστώσουν ότι οι οπτικές γωνίες είναι σχεδόν ίσες.



Αφού ολοκληρωθεί η διερεύνηση, οι μαθητές καλούνται να γράψουν στο τετράδιό τους, υπό μορφή άτυπου κανόνα, τα συμπεράσματά τους.

Β΄ ΦΑΣΗ

Στόχος της δεύτερης φάσης είναι οι μαθητές να μελετήσουν ένα καθαρά γεωμετρικό, αφηρημένο μοντέλο της πραγματικής κατάστασης που περιγράφεται στο αρχικό πρόβλημα.

- Στην πέμπτη άσκηση οι μαθητές θα μεταβάλουν τη θέση του σημείου Μ πάνω στον κύκλο και θα παρατηρήσουν ότι η τιμή της γωνίας δεν μεταβάλλεται. Ο διδάσκων διαπραγματεύεται με τους μαθητές ένα συμπέρασμα το οποίο διατυπώνουν σε αυστηρά μαθηματική γλώσσα.

- Στην έκτη άσκηση ο διδάσκων πληροφορεί τους μαθητές για το περιεχόμενο της βοήθειας σχετικά με την κατασκευή τμήματος και τη μέτρηση γωνίας. Στη συνέχεια οι μαθητές κατασκευάζουν και μετρούν την επίκεντρη γωνία και συγκρίνουν τις δύο μετρήσεις (εγγεγραμμένης-επίκεντρης). Παρατηρώντας τις δύο μετρήσεις, θα διαπιστώσουν ότι το μέτρο της εγγεγραμμένης γωνίας ισούται με το μισό της επίκεντρης.

- Στο σημείο αυτό ο διδάσκων θα ζητήσει από τους μαθητές να μεταβάλουν τον κύκλο από το σημείο Σ. Αυτό που θα πρέπει να παρατηρήσουν τώρα είναι ότι ενώ οι μετρήσεις μεταβάλλονται, η σχέση μεταξύ των μετρήσεων παραμένει αναλλοίωτη. Τώρα πλέον η εικασία για τη σχέση των δύο μεγεθών ισχυροποιείται.

- Στην έβδομη άσκηση οι μαθητές θα ανακαλέσουν το συμπέρασμα ότι η κυκλική διάταξη είναι η πλέον «δίκαιη» διάταξη των θεατών και θα επιχειρήσουν να τεκμηριώσουν τη διαπίστωση αυτή με τα συμπεράσματά τους από το προηγούμενο ερώτημα.

- Στην όγδοη άσκηση οι μαθητές θα σύρουν το σημείο Α ή το Β, έως ότου η χορδή γίνει διάμετρος. Θα παρατηρήσουν ότι το μέτρο της γωνίας είναι 90^o και θα προσπαθήσουν να το αιτιολογήσουν. Η αιτιολόγηση θα στηριχτεί στο γεγονός ότι η επίκεντρη γωνία είναι πλέον ίση με 180^o, επομένως η επίκεντρη είναι ορθή.

- Στόχος της ένατης άσκησης είναι οι μαθητές να διαπιστώσουν ότι η οξεία εγγεγραμμένη που βλέπει τη χορδή ΑΒ και η αμβλεία εγγεγραμμένη που βλέπει την ίδια χορδή είναι γωνίες παραπληρωματικές. Θα διατυπώσουν το συμπέρασμά τους αυτό και θα το αιτιολογήσουν με βάση το γεγονός ότι οι αντίστοιχες επίκεντρες των δύο γωνιών έχουν άθροισμα 360^o.

- Στη δέκατη άσκηση οι μαθητές θα επεκτείνουν τα συμπεράσματά τους σε ομόκεντρους κύκλους. Εδώ αναμένεται να διαπιστώσουν ότι όσο μεγαλύτερη είναι η ακτίνα του κύκλου, τόσο μικρότερη είναι η εγγεγραμμένη γωνία που βλέπει τη σταθερή χορδή.

2η Δραστηριότητα: ΟΠΤΙΚΗ ΓΩΝΙΑ ΚΑΙ ΜΕΤΡΗΣΕΙΣ

Διάρκεια της δραστηριότητας: 2-3 διδακτικές ώρες

Τάξη: Β΄ Γυμνασίου

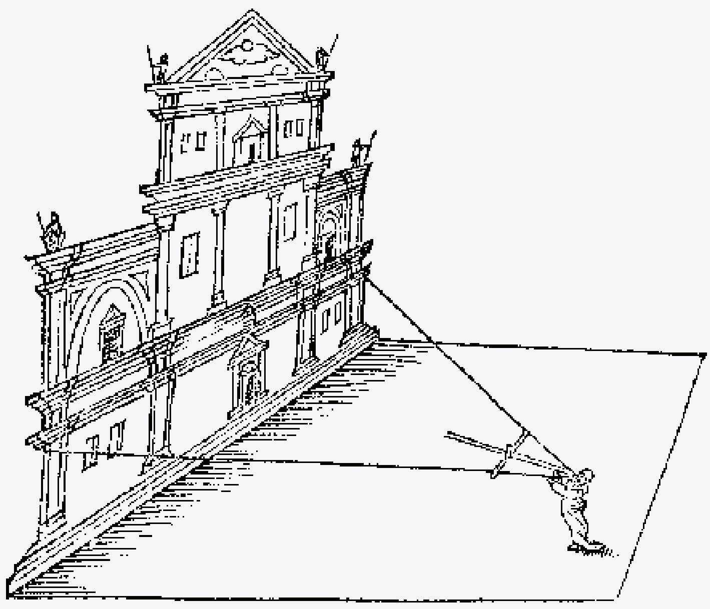
Γνωστικά αντικείμενα:
- Η έννοια των ανάλογων ποσών
- Καρτεσιανές συντεταγμένες και γραφική παράσταση συνάρτησης
- Η γραφική παράσταση της σχέσης $ψ = α·χ$

Η κατάσταση προβλήματος:
Η οπτική γωνία έχει χρησιμοποιηθεί, και συνεχίζει να χρησιμοποιείται, για τη μέτρηση όχι μόνο ουράνιων, αλλά και επίγειων αποστάσεων και υψών. Τα πρώτα όργανα μέτρησης στηρίζονταν κυρίως στη μέτρηση της οπτικής γωνίας, με την οποία φαίνεται ένα αντικείμενο από τη θέση του θεατή. Το θέμα που θα διερευνήσουν οι μαθητές είναι κυρίως η σχέση της απόστασης του θεατή από ένα αντικείμενο και η μέγιστη ορατή περιοχή του αντικειμένου που παρατηρεί, όταν η οπτική γωνία παραμένει σταθερή. Δευτερευόντως θα εξεταστεί η γραφική παράσταση της σχέσης της οπτικής γωνίας με τη μέγιστη παρατηρούμενη περιοχή, μόνο ως παράδειγμα μη γραμμικής συσχέτισης.

Φύλλο εργασίας

Στην παρακάτω γκραβούρα του 16ου αιώνα παρουσιάζεται ένας μηχανικός της εποχής ο οποίος προσπαθεί να εντοπίσει την οπτική γωνία με την οποία φαίνεται η πρόσοψη ενός κτηρίου και μέσω αυτής το πλάτος του.

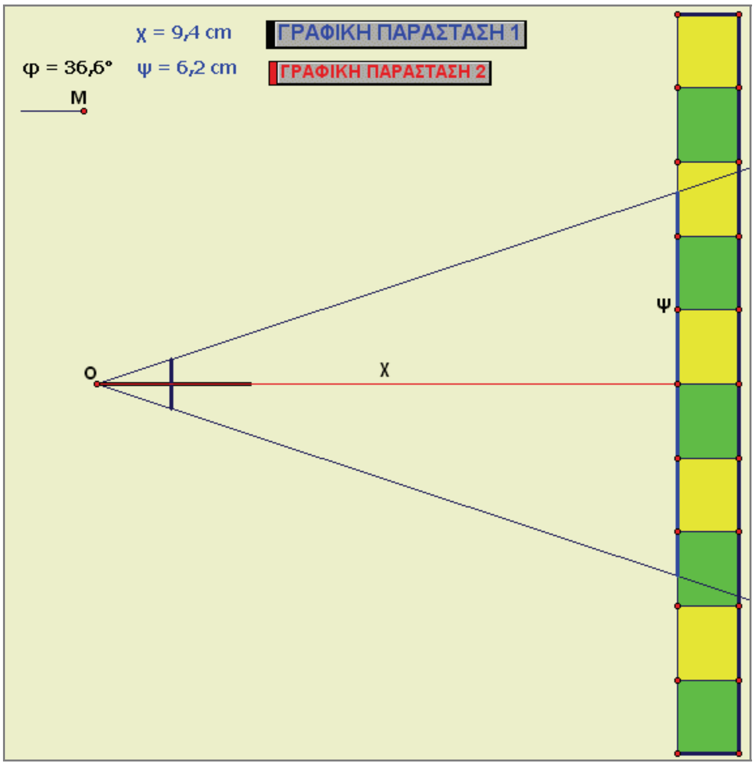
324. The *radio astronomica* used to measure the width of a façade from Gemma's Frisius's *De Radio astronomico*. . . . , Antwerp, 1545.



Η εικόνα προέρχεται από την ηλεκτρονική παρουσίαση του 15^{ου} κεφαλαίου του βιβλίου «Τετραγωνίζοντας τον κύκλο: Η Γεωμετρία στην Τέχνη και την Αρχιτεκτονική» του Πολ Κάλτερ, από το Πανεπιστήμιο του Ντάρτμουθ και τον 1/2008 η διεύθυνσή της είναι: http://www.dartmouth.edu/~matc/math5.geometry/unit15/unit15.html

Με τη δραστηριότητα που ακολουθεί θα προσπαθήσουμε να δώσουμε απάντηση στο εξής ερώτημα: Το όργανο μέτρησης επιτρέπει στο μηχανικό να βλέπει όλη την πρόσοψη του κτηρίου από τη θέση στην οποία βρίσκεται. Τι θα συμβεί, αν πλησιάσει ή απομακρυνθεί από το κτήριο, χωρίς να μεταβάλλει τη γωνία του οργάνου; Πόσο λιγότερο ή περισσότερο τμήμα της πρόσοψης θα παρατηρεί σε κάθε του μετακίνηση;

Ανοίξτε το αρχείο metrisi του λογισμικού.



Στην οθόνη εμφανίζονται:
Στο δεξιό άκρο ένα μεγάλο ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, χωρισμένο σε μικρότερα ίσα χρωματισμένα παραλληλόγραμμα.
Ένα σημείο Ο που είναι η κορυφή μιας γωνίας φ και μπορεί να μεταφέρεται μόνο εμπρός ή πίσω. Ένα τμήμα χ κάθετο από το Ο προς το ορθογώνιο και ένα τμήμα ψ που αποτελεί τμήμα του ορθογωνίου και ορίζεται από τις πλευρές της γωνίας.
Η γωνία φ μπορεί να μεταβάλλεται από το σημείο Μ και, συγχρόνως, να προβάλλεται το μέτρο της.
Το κουμπί «Γραφική παράσταση 1» εμφανίζει ένα σύστημα αξόνων και ένα σημείο Σ, του οποίου μπορούμε εύκολα να διακρίνουμε τις συντεταγμένες. Το σύστημα αυτό είναι κανονικό, δηλαδή η μονάδα μέτρησης πάνω στον χ΄χ είναι ίση με τη μονάδα μέτρησης πάνω στον ψ΄ψ.
Το κουμπί «Γραφική παράσταση 2» εμφανίζει ένα σύστημα αξόνων και ένα σημείο Τ, του οποίου μπορούμε εύκολα να διακρίνουμε τις συντεταγμένες. Το σύστημα αυτό δεν είναι κανονικό, δηλαδή η μονάδα μέτρησης πάνω στον χ΄χ είναι διαφορετική από τη μονάδα μέτρησης πάνω στον ψ΄ψ.

1) Μετακινήστε το σημείο Ο και στη συνέχεια το σημείο Μ και συμπληρώστε τον παρακάτω πίνακα. Υποθέστε ότι βρίσκεστε πάνω από τον παρατηρητή του σχεδίου και τον βλέπετε σε κάτοψη.

Πραγματική κατάσταση	**Γεωμετρικό μοντέλο**
Οφθαλμός	
Οπτική γωνία	
Απόσταση του παρατηρητή από τον τοίχο	
Το τμήμα του τοίχου που παρατηρείται	

2) Μετακινήστε το σημείο Ο. Από τα τρία μεγέθη που μας ενδιαφέρουν (οπτική γωνία, απόσταση του παρατηρητή, τμήμα του παρατηρούμενου τοίχου), ποια παραμένουν σταθερά και ποια μεταβάλλονται;

3) Παρατηρήστε τις τιμές των μεταβαλλόμενων ποσών. Εξετάσετε, με οποιονδήποτε τρόπο, αν τα ποσά αυτά είναι ανάλογα.

4) Εμφανίστε τους άξονες με το κουμπί «Άξονες» και το σημείο Σ με το κουμπί «Γραφική παράσταση 1». Κινήστε το σημείο Ο και παρατηρήστε τις συντεταγμένες του σημείου Σ. Ποια σχέση έχουν με τα ποσά που εξετάζουμε;

5) Εμφανίστε το ίχνος του σημείου Σ και σύρετε το σημείο Ο. Τι μορφή έχει η γραμμή που γράφει το σημείο Σ; Πώς συνδέεται η γραμμή που προέκυψε με τα συμπεράσματά σας από τη δραστηριότητα 4;

6) Καταργήστε την εμφάνιση του ίχνους του σημείου Σ, αλλάξτε την τιμή της γωνίας φ και επαναλάβετε τη διαδικασία της προηγούμενης δραστηριότητας. Τι παρατηρείτε; Τι άλλαξε και τι παρέμεινε ίδιο;

7) Ας εξετάσουμε τώρα αν η σχέση που συνδέει τη γωνία φ με το τμήμα ψ του παρατηρούμενου τοίχου είναι όμοια με τη σχέση που συνδέει τα ποσά χ και ψ. Κλείστε το κουμπί «Γραφική παράσταση 1» και εμφανίστε ένα καινούριο σύστημα αξόνων και το σημείο Τ με το κουμπί «Γραφική παράσταση 2». Σε τι διαφέρει το σύστημα αυτό από το προηγούμενο;

8) Μεταβάλετε τη γωνία φ και παρατηρήστε τις συντεταγμένες του σημείου Σ. Εξετάστε αν τα ποσά φ και ψ είναι ανάλογα.

9) Εμφανίστε το ίχνος του σημείου Τ. Μεταβάλετε τις τιμές της γωνίας φ. Τι μορφή έχει η γραμμή που γράφει το ίχνος του Τ; Πώς συνδέεται η γραμμή που προέκυψε με τα συμπεράσματά σας από τη δραστηριότητα 8;

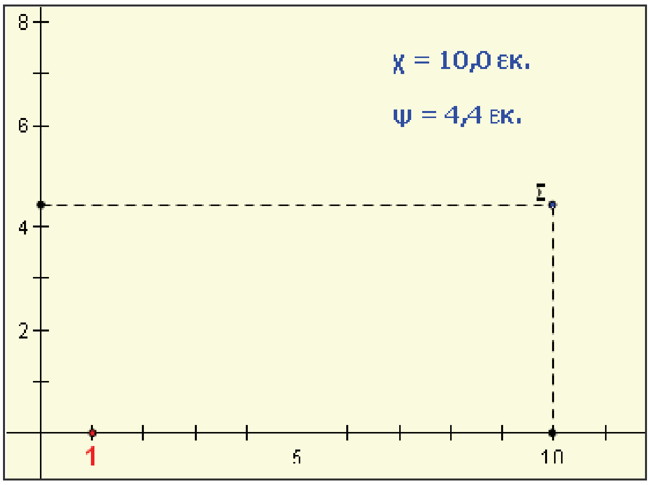
Οδηγίες και προτάσεις υλοποίησης

- Στόχος της πρώτης άσκησης είναι οι μαθητές να μεταφέρουν - μεταφράσουν την πραγματική κατάσταση στο γεωμετρικό πλαίσιο της προσομοίωσης. Ο οφθαλμός του παρατηρητή είναι η κορυφή Ο της οπτικής γωνίας, η οπτική γωνία είναι η γωνία κΟλ, η απόσταση του παρατηρητή είναι το χ, ενώ το τμήμα του τοίχου που παρατηρείται είναι το ψ.

- Στόχος της δεύτερης άσκησης είναι οι μαθητές να εστιάσουν στα συμμεταβαλλόμενα ποσά και να τα διακρίνουν από τα σταθερά. Συγκεκριμένα, όταν σύρουν το σημείο Ο, θα πρέπει να αναγνωρίσουν τη φυσική κίνηση του ανθρώπου που έχει το εργαλείο, επομένως και τη μετακίνηση της οπτικής γωνίας. Τα δύο ποσά που μεταβάλλονται έχουν χαρακτηριστεί εξαρχής ως χ και ψ, ώστε να παραπέμπουν σε εξαρτημένη και ανεξάρτητη μεταβλητή και να οδηγήσουν τους μαθητές σε μία σχέση που θα έχει συναρτησιακή μορφή.

- Στην τρίτη άσκηση καλό θα είναι ο διδάσκων να υποδείξει την παρακάτω ενέργεια. Οι μαθητές σύρουν το Ο, έως ότου η απόσταση χ γίνει 6, και παρατηρούν το ψ, καταγράφοντας το ζεύγος (χ, ψ). Στη συνέχεια τους ζητά να μεταφέρουν το Ο σε απόσταση 3 και να παρατηρήσουν τη μεταβολή του ψ. Οι μαθητές αναμένεται να αναγνωρίσουν τη βασική ιδιότητα των ανάλογων ποσών: «Όταν πολλαπλασιάζεται η τιμή του ενός με έναν αριθμό, τότε πολλαπλασιάζεται και η τιμή του άλλου με τον ίδιο αριθμό».

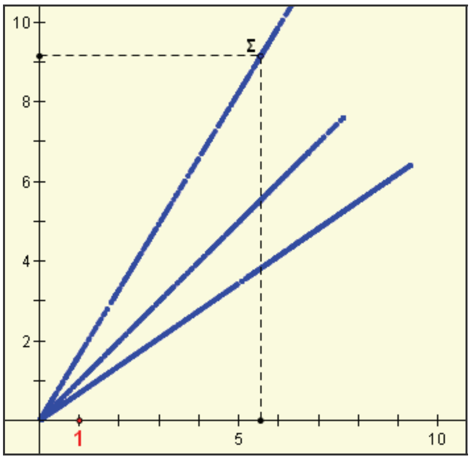
- Στην τέταρτη άσκηση οι μαθητές θα εμφανίσουν ένα καρτεσιανό σύστημα αξόνων, στο οποίο ένα σημείο Σ θα έχει τις συντεταγμένες (χ, ψ) των δύο μεγεθών που μεταβάλλονται, καθώς σύρουν το Ο.



  Εδώ και πάλι ο διδάσκων μπορεί να ζητήσει από τους μαθητές να επαναλάβουν τη δραστηριότητα της προηγουμένης άσκησης, ώστε να παρατηρήσουν ότι οι συντεταγμένες του σημείου είναι ποσά ανάλογα.

- Στην πέμπτη άσκηση οι μαθητές, αφού εμφανίσουν το ίχνος του σημείου Σ, θα σύρουν το σημείο Ο και θα παρατηρήσουν ότι το ίχνος του Σ γράφει μία ευθεία. Το γεγονός αυτό θα πρέπει να αποτελέσει αντικείμενο διαπραγμάτευσης μεταξύ των μαθητών και του διδάσκοντα, ώστε να συνδεθεί η ευθεία που προκύπτει με τα ανάλογα ποσά που ήδη έχουν εντοπίσει.

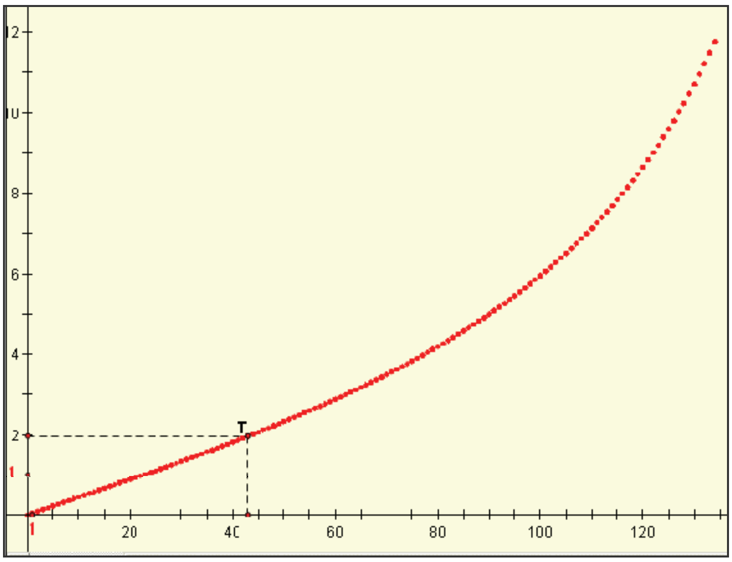
- Στόχος της έκτης άσκησης είναι οι μαθητές να συνδέσουν το μέγεθος της οπτικής γωνίας φ με την κλίση της ευθείας. Αυτό που θα παρατηρήσουν είναι ότι όσο αυξάνεται η γωνία, τόσο μεγαλώνει και η κλίση της ευθείας που παριστά τη σχέση ανάμεσα στα ποσά χ και ψ.



- Στην έβδομη άσκηση οι μαθητές θα αποκρύψουν το καρτεσιανό περιβάλλον με το οποίο ασχολήθηκαν και θα εμφανίσουν ένα άλλο, όπου το σημείο Τ έχει πλέον τετμημένη την τιμή της οπτικής γωνίας και τεταγμένη το ψ. Η βασική διαφορά με το προηγούμενο σύστημα είναι το γεγονός ότι το καινούριο σύστημα δεν είναι ορθοκανονικό, δηλαδή η μονάδα πάνω στον άξονα ψ΄ψ δεν είναι ίση με τη μονάδα πάνω στον άξονα χ΄χ. Ο διδάσκων θα συζητήσει με τους μαθητές την ανάγκη να χρησιμοποιηθεί ένα τέτοιο σύστημα, αφού οι τιμές της γωνίας μετρώνται σε δεκάδες μοίρες.

- Στην όγδοη άσκηση οι μαθητές θα διαπιστώσουν μέσω των μετρήσεων ότι τα ποσά γωνία και μήκος ψ δεν είναι ανάλογα, αφού, όταν διπλασιάζεται η τιμή της γωνίας φ, δεν διπλασιάζεται και η τιμή του ψ.

- Στόχος της ένατης άσκησης είναι οι μαθητές να συνδέσουν τη γραφική παράσταση μιας καμπύλης με ποσά που δεν είναι ανάλογα, δηλαδή η καμπύλη θα αποτελέσει ένα κριτήριο μη γραμμικής συσχέτισης δύο ποσών.



2.4 Δραστηριότητες για τη Γ’ Γυμνασίου

1η Δραστηριότητα: ΕΡΓΑΛΕΙΑ ΜΕΤΡΗΣΗΣ

Διάρκεια της δραστηριότητας: 2-3 διδακτικές ώρες

Τάξη: Γ΄ Γυμνασίου

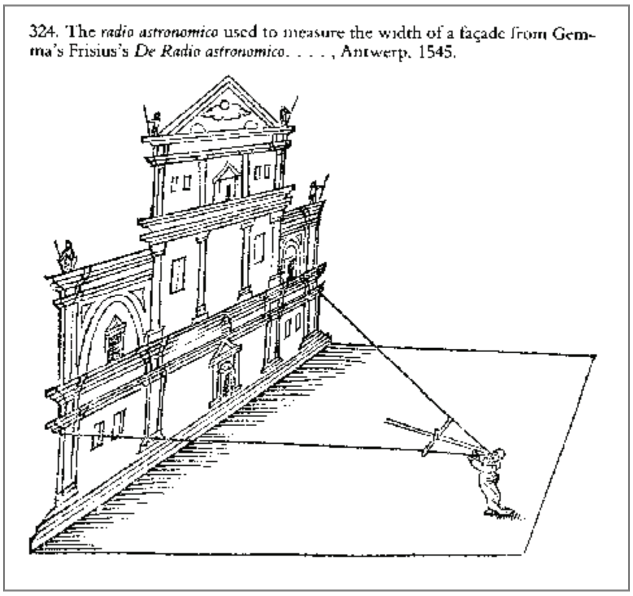
Γνωστικά αντικείμενα:

- Λόγος τμημάτων, ανάλογα ευθύγραμμα τμήματα
- Ομοιότητα τριγώνων και εφαρμογές της

Η κατάσταση προβλήματος:
Με αφορμή τη λειτουργία ενός απλού εργαλείου μετρήσεων που χρησιμοποιήθηκε παλαιότερα, οι μαθητές θα μελετήσουν τις ιδιότητες των όμοιων τριγώνων. Στη συνέχεια θα πρέπει να αναλύσουν το μαθηματικό περιεχόμενο της μεθόδου μέτρησης και να χρησιμοποιήσουν μία προσομοίωση του εργαλείου, μέσω της οποίας θα ελέγξουν την εγκυρότητα της μεθόδου μέτρησης.

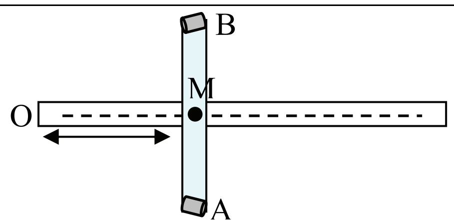
Φύλλο εργασίας

Στην παρακάτω γκραβούρα του 16ου αιώνα παρουσιάζεται ένα μηχανικός της εποχής, ο οποίος προσπαθεί να εντοπίσει το πλάτος του κτηρίου.



Η εικόνα προέρχεται από την ηλεκτρονική παρουσίαση του 15ου κεφαλαίου του βιβλίου «Τετραγωνίζοντας τον κύκλο: Η Γεωμετρία στην Τέχνη και την Αρχιτεκτονική» του Πολ Κάλτερ, από το Πανεπιστήμιο του Ντάρτμουθ και τον 1/2008 η διεύθυνσή της είναι: http://www.dartmouth.edu/~matc/math5.geometry/unit15/unit15.html

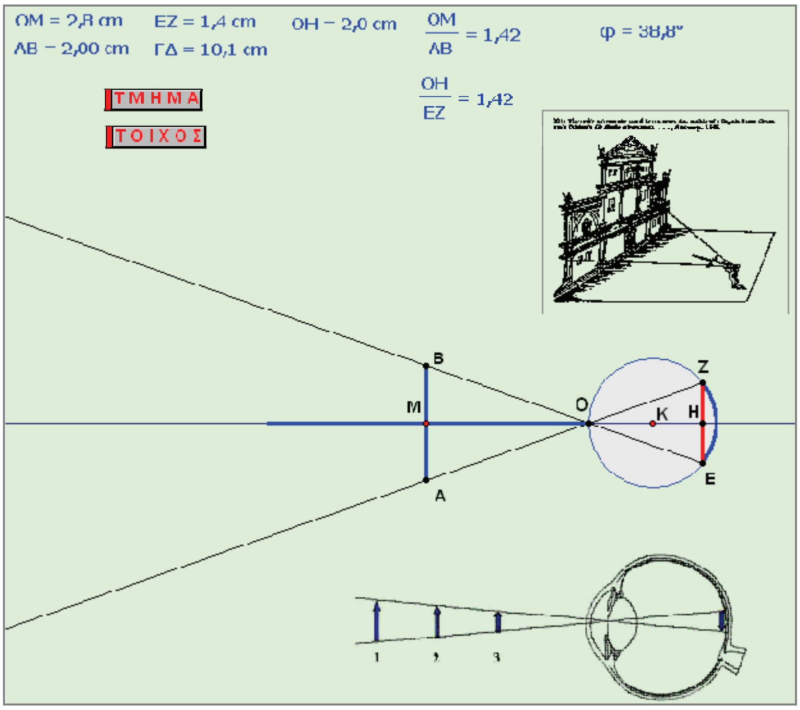
Θα κάνουμε μερικές χρήσιμες υποθέσεις. Ο μηχανικός είχε τη δυνατότητα να μετρά εύκολα την απόστασή του από την πρόσοψη, καθόσον ο περίβολος του οικήματος ήταν στρωμένος με πλάκες συγκεκριμένων διαστάσεων, οπότε μπορούσε να μετρά τον αριθμό των πλακών από το σημείο που βρισκόταν μέχρι την πρόσοψη.

	Το διπλανό εργαλείο αποτελείται από δύο κάθετα τμήματα: το ένα είναι το ΑΒ και το άλλο έχει ως αρχή το Ο και αποτελεί τη βάση στήριξης του ΑΒ. Το τμήμα ΑΒ μπορεί και μετακινείται μπρος πίσω, οπότε μεταβάλλεται και η οπτική γωνία ΑΟΒ.

Ο μηχανικός τοποθετούσε τον ένα οφθαλμό του στο σημείο Ο και προσπαθούσε να παρατηρήσει από τις μικρές διόπτρες, στα σημεία Α και Β, τα δύο άκρα της πρόσοψης που βρίσκονταν απέναντι. Επίσης μπορούσε να μετρήσει εύκολα την απόσταση ΟΜ, αφού υπήρχε αρίθμηση επάνω στο εργαλείο.
Το πρόβλημα που θα μελετήσουμε είναι πώς μπορούμε να αξιοποιήσουμε το εργαλείο, δηλαδή τι μαθηματικά έπρεπε να χρησιμοποιήσει ο μηχανικός, ώστε με τα τότε αριθμητικά δεδομένα να μπορέσει να μετρήσει την πρόσοψη του κτηρίου;

Ανοίξτε το αρχείο ergalio του λογισμικού.

Στην οθόνη εμφανίζονται:
Δύο εικόνες στις οποίες παρουσιάζεται ένα απλό σχέδιο της λειτουργίας του ανθρώπινου ματιού και μία γκραβούρα στην οποία παριστάνεται ένας άνθρωπος που προσπαθεί να μετρήσει την πρόσοψη ενός κτηρίου με ένα απλό εργαλείο.



Μεταξύ των δύο εικόνων υπάρχει ένας κύκλος που μπορεί να κινείται μπρος πίσω από το σημείο Κ. Μπροστά από τον κύκλο υπάρχει ένα οριζόντιο μπλε τμήμα και ένα κατακόρυφο ΑΒ, το οποίο μπορεί να κινείται μπρος πίσω από το σημείο Μ. Τα κουμπιά «Τμήμα» και «Τοίχος» εμφανίζουν, αντίστοιχα, ένα ευθύγραμμο τμήμα ΓΔ και ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο. Τέλος, εμφανίζονται οι μετρήσεις αρκετών τμημάτων, καθώς και το μέτρο της γωνίας ΑΟΒ.

1) Συμπληρώστε τον επόμενο πίνακα.

Πραγματική κατάσταση	**Γεωμετρικό μοντέλο**
Οφθαλμός	
Εργαλείο	
Οπτική γωνία	
Απόσταση του παρατηρητή από τον τοίχο	
Το τμήμα του τοίχου που παρατηρείται	

2) Μετακινήστε το σημείο Μ. Με βάση τις μετρήσεις, διαπραγματευτείτε με την ομάδα σας το ερώτημα: Ποια ποσά μεταβάλλονται και ποια ποσά παραμένουν σταθερά;
3) Υπολογίσετε τους λόγους $\frac{ΟΜ}{ΟΗ}$ και $\frac{ΑΒ}{ΕΖ}$. Τι παρατηρείτε;
4) Μετρήστε τα τμήματα ΟΒ και ΟΕ και υπολογίστε το λόγο τους. Τι παρατηρείτε; Τι σχέση έχουν μεταξύ τους οι γωνίες των δύο τριγώνων;

5) Από το κουμπί «Τμήμα» εμφανίστε το τμήμα ΓΔ. Σύρετε το σημείο Σ και παρατηρήστε τις μετρήσεις. Ποια ποσά παραμένουν σταθερά και ποια μεταβάλλονται; Ποια αναλογία προκύπτει;

6) Πώς θα μπορούσαμε να υπολογίσουμε το τμήμα ΓΔ (αν δεν διαθέταμε τη μέτρηση στην οθόνη), όταν είναι γνωστά τα μήκη των τμημάτων ΟΜ, ΟΣ και ΑΒ;

7) Εμφανίστε τώρα την προσομοίωση της πρόσοψης ενός κτηρίου με το κουμπί «Τοίχος». Υποθέστε ότι βλέπετε την κάτοψη του τοίχου, η οποία μπορεί να μεταβάλλεται από το σημείο Τ. Πώς μπορούμε να μετρήσουμε το πλάτος της πρόσοψης με βάση τις υπάρχουσες μετρήσεις;

8) Μεταβάλετε τις διαστάσεις και τη θέση του υποτιθέμενου τοίχου, από το σημείο Σ, και επαναλάβετε τις μετρήσεις με τη μέθοδο που ήδη έχετε επινοήσει. Επιβεβαιώστε τα αποτελέσματά σας, μετρώντας με τη βοήθεια του λογισμικού το ευθύγραμμο τμήμα που αντιστοιχεί στο πλάτος του τοίχου.

9) Ας έρθουμε τώρα στο φυσικό εργαλείο. Περιγράψτε τον τρόπο με τον οποίο ο μηχανικός μετρούσε τις προσόψεις των κτηρίων, χρησιμοποιώντας το συγκεκριμένο εργαλείο.

Οδηγίες και προτάσεις υλοποίησης

Πριν από την έναρξη της δραστηριότητας, καλό θα είναι ο διδάσκων να συζητήσει με τους μαθητές, σε πολύ απλό επίπεδο, σχετικά με τη λειτουργία της οπτικής μας αντίληψης. Συγκεκριμένα θα μπορούσε να ζητήσει από τους μαθητές να σχολιάσουν την έτοιμη εικόνα του ματιού που είναι ενσωματωμένη μέσα στο αρχείο του λογισμικού και ακόμη καλύτερα να αναζητήσουν πληροφορίες και εικόνες, χρησιμοποιώντας λέξεις-κλειδιά, όπως «physiology of eye» για ξένους ιστότοπους ή «οφθαλμός» και «όραση» για ελληνικούς ιστότοπους, π.χ. εκείνος που προέρχεται από τη Σχολή Ανθρωπιστικών Επιστημών του Πανεπιστήμιο Αιγαίου (3/2008):
http://www.rhodes.aegean.gr/
http://www.rhodes.aegean.gr/sxedia/grafdaskalou/anatomy/sub1/seeing.htm

Στη συνέχεια οι μαθητές θα διαπραγματευτούν τη συμπλήρωση του πίνακα της πρώτης άσκησης. Ο πίνακας αυτός θα μπορούσε να συμπληρωθεί ως εξής:

Πραγματική κατάσταση	**Γεωμετρικό μοντέλο**
Οφθαλμός	Κύκλος Κ
Εργαλείο	Τμήματα ΟΜ, ΑΒ
Οπτική γωνία	ΒΟΑ
Απόσταση του παρατηρητή από τον τοίχο	ΟΣ
Το τμήμα του τοίχου που παρατηρεί	ΓΔ

- Στη δεύτερη άσκηση οι μαθητές αναμένεται να εντοπίσουν τα μεταβαλλόμενα ποσά των τριγώνων ΟΑΒ και ΟΖΕ, δηλαδή τις γωνίες, τις πλευρές και τα ύψη τους.

- Στόχος της τρίτης και τέταρτης άσκησης είναι οι μαθητές να αρχίσουν την αναζήτηση σχέσεων όχι μόνο μεταξύ των μετρήσεων, αλλά και μεταξύ των λόγων των μετρήσεων. Αφού διαπιστώσουν ότι οι λόγοι είναι ίσοι, καλούνται να αιτιολογήσουν την ισότητα των γωνιών των δύο τριγώνων ΟΑΒ και ΟΖΕ. Όταν έχει πλέον ολοκληρωθεί η διερεύνηση των λόγων και των γωνιών των δύο τριγώνων, ο διδάσκων θα ζητήσει από τους μαθητές να καταγράψουν τα ευρήματά τους, δηλαδή ότι στα δύο μεταβαλλόμενα τρίγωνα οι γωνίες παραμένουν ίσες μία προς μία και οι πλευρές τους είναι ανάλογες.

- Στην πέμπτη άσκηση οι μαθητές θα εμφανίσουν μαζί με το λόγο ΟΣ/ΓΔ και το τμήμα ΓΔ. Θα παρατηρήσουν ότι ο λόγος αυτός ισούται με τους ήδη υπάρχοντες λόγους και στο σημείο αυτό ο διδάσκων θα πρέπει να οδηγήσει τους μαθητές στο να συνδέσουν την ισότητα των γωνιών των τριγώνων με τη σταθερότητα των λόγων των πλευρών τους.

- Στην έκτη άσκηση οι μαθητές θα χρησιμοποιήσουν ιδιότητες αναλογιών, προκειμένου να υπολογίσουν στο τετράδιό τους το τμήμα ΓΔ από την αναλογία $\frac{\mathrm{OM}}{\mathrm{AB}} = \frac{\mathrm{O\Sigma}}{\Gamma\Delta}$. Εδώ είναι χρήσιμο ο διδάσκων να ζητήσει από τους μαθητές να κατασκευάσουν μία σχέση, έναν τύπο μέσω του οποίου να υπολογίζεται το τμήμα $\Gamma\Delta = \frac{\mathrm{AB} \cdot \mathrm{O\Sigma}}{\mathrm{OM}}$. Η σχέση αυτή είναι σημαντική για την αξιοποίηση του εργαλείου στις επόμενες ερωτήσεις.

- Στην έβδομη άσκηση οι μαθητές θα εμφανίσουν την προσομοίωση του τοίχου και θα μετρήσουν το πλάτος του με τη βοήθεια του τμήματος ΓΔ. Αναμένεται να μετακινήσουν το τμήμα ΑΒ, έως ότου η οπτική γωνία καλύψει ολόκληρο το πλάτος του τοίχου. Στη συνέχεια, με βάση τον τύπο $\Gamma\Delta = \frac{AB \cdot O\Sigma}{OM}$ και τις μετρήσεις τους, θα υπολογίσουν το τμήμα ΓΔ και άρα το πλάτος του τοίχου.

- Στην όγδοη άσκηση οι μαθητές θα αλλάξουν το πλάτος του τοίχου από το σημείο Τ και θα επαναλάβουν τις μετρήσεις τους. Θα υπολογίσουν το πλάτος του τοίχου μέσω του μαθηματικού τύπου που έχουν κατασκευάσει στην έκτη δραστηριότητα και θα συγκρίνουν το αποτέλεσμα με εκείνο που προβάλλει ο υπολογιστής μέσω της μέτρησης.

- Η τελευταία άσκηση αποτελεί αφορμή για χρήση των συμπερασμάτων και των μαθηματικών που έχουν μέχρι τώρα δημιουργήσει οι μαθητές κατά την αξιοποίηση του εργαλείου μέτρησης. Καλό θα είναι να περιγράψουν στο τετράδιό τους τμηματικά μία πρακτική διαδικασία μετρήσεων, κάτι σαν οδηγίες χρήσης για το εργαλείο μέτρησης.

2η Δραστηριότητα: ΤΟ ΠΡΟΟΠΤΙΚΟ ΕΠΙΠΕΔΟ

Διάρκεια της δραστηριότητας: 3-4 διδακτικές ώρες

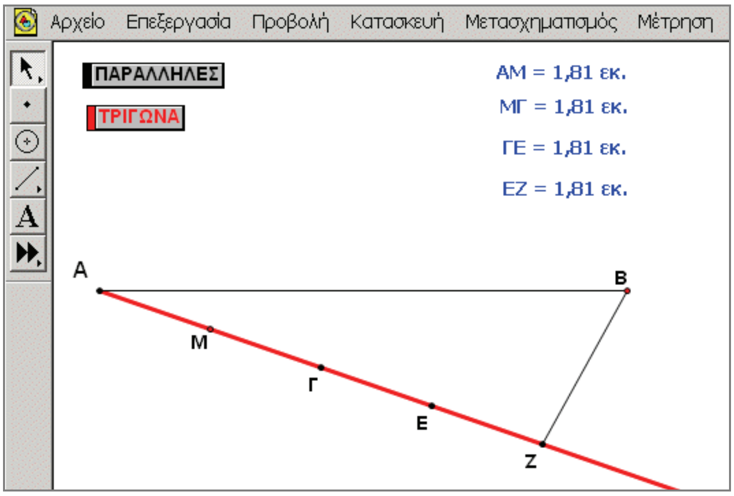
Τάξη: Γ΄ Γυμνασίου

Γνωστικά αντικείμενα:

- Θεώρημα Θαλή
- Ίσα τμήματα μεταξύ παράλληλων ευθειών
- Διαίρεση τμήματος σε ν ίσα τμήματα
- Ομοιοθεσία

Η κατάσταση προβλήματος:
Οι μαθητές θα πρέπει να μελετήσουν και να χρησιμοποιήσουν μία μέθοδο για την κατασκευή του προοπτικού επιπέδου, δηλαδή του δαπέδου όπως φαίνεται όταν λαμβάνεται υπ' όψιν η γραμμή του ορίζοντα και το σημείο φυγής των εγκάρσιων γραμμών. Θα πρέπει, λοιπόν, να αναδείξουν και να διατυπώσουν τα μαθηματικά που υποστηρίζουν την κατασκευή αυτή.

Φύλλο εργασίας 1
Ανοίξτε το αρχείο tmimata του λογισμικού. Στην οθόνη προβάλλονται:



Ένα τμήμα ΑΒ, του οποίου το μήκος μεταβάλλεται από το σημείο Β.
Μία ημιευθεία με αρχή το Α, πάνω στην οποία έχουν κατασκευαστεί τα τμήματα ΑΜ, ΜΓ, ΓΕ, ΕΖ και οι μετρήσεις των τμημάτων αυτών. Το μήκος των τμημάτων μεταβάλλεται, σύροντας το σημείο Μ.
Το κουμπί «Παράλληλες», με το οποίο εμφανίζονται τρεις παράλληλες ευθείες προς το τμήμα ΒΖ, τα σημεία τομής των παραλλήλων με το τμήμα ΑΒ και οι μετρήσεις των τμημάτων που δημιουργούνται πάνω στο ΑΒ.
Το κουμπί «Τρίγωνα» με το οποίο εμφανίζονται τέσσερα τρίγωνα που η μία πλευρά τους είναι παράλληλη προς την ημιευθεία.

1) Πριν εμφανίσετε τις ευθείες και τα τρίγωνα με τα κουμπιά, μετακινήστε το σημείο Μ. Τι παραμένει σταθερό και τι μεταβάλλεται;

2) Εμφανίστε τις παράλληλες με το κουμπί «Παράλληλες». Μετακινήστε το σημείο Μ και παρατηρήστε τις μετρήσεις. Τι αλλάζει και τι παραμένει σταθερό;

3) Μεταβάλετε το μήκος του τμήματος ΑΒ. Τι μεταβάλλεται και τι παραμένει σταθερό;

4) Περιγράψτε μία διαδικασία με την οποια θα μπορείτε να χωρίσετε ένα τμήμα σε πέντε, έξι και γενικά σε ν ίσα τμήματα, με βάση τις προηγούμενες δραστηριότητες.

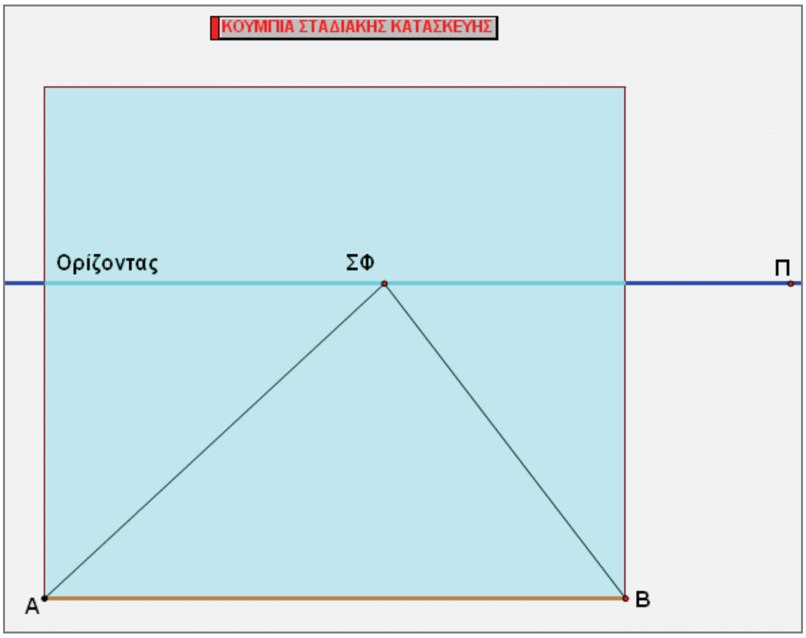
5) Προφανώς δεν μπορούμε να στηριχτούμε στις μετρήσεις, για να υποστηρίξουμε ότι μία πρόταση στα μαθηματικά ισχύει σε όλες τις περιπτώσεις. Εμφανίστε τα κίτρινα τρίγωνα με το κουμπί

«Τρίγωνα». Με δεδομένο ότι όλα τα κόκκινα τμήματα είναι παράλληλα προς την ημιευθεία, εξηγήστε γιατί τα τρίγωνα αυτά είναι μεταξύ τους ίσα.

6) Μπορείτε τώρα να αιτιολογήσετε γιατί η μέθοδος χωρισμού ενός τμήματος σε ίσα τμήματα, που έχετε ήδη κατασκευάσει, είναι έγκυρη από μαθηματική άποψη;

Φύλλο εργασίας 2

Ανοίξτε το αρχείο prooptiko του λογισμικού.



Στην οθόνη προβάλλονται:
α) Ένα «παράθυρο στο χώρο», δηλαδή ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο (το γαλάζιο) με βάση το τμήμα ΑΒ.
β) Στην πάνω πλευρά του «παραθύρου» διακρίνουμε τη γραμμή του ορίζοντα με το σημείο φυγής ΣΦ.
γ) Το σημείο Π πάνω στη γραμμή του ορίζοντα.
δ) Το «Κουμπί σταδιακής κατασκευής» με το οποίο εμφανίζονται άλλα βοηθητικά κουμπιά, εφόσον σας το ζητήσει ο καθηγητής.

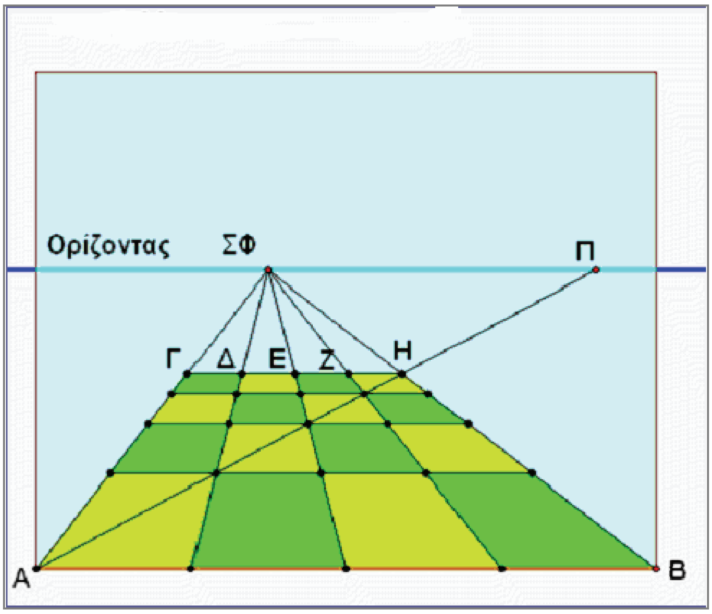
1) Κατασκευάστε την κάλυψη του δαπέδου με βάση την περιγραφή του Pelerin. Χρησιμοποιήστε τη μέθοδο χωρισμού ενός τμήματος σε ίσα τμήματα που κατασκευάσατε στην προηγούμενη δραστηριότητα.

2) Ονομάστε Γ, Δ, Ε, Ζ και Η τα σημεία της τελευταίας γραμμής του δαπέδου (της πιο μικρής από τις παράλληλες) και μετρήστε με τη βοήθεια του λογισμικού τις αποστάσεις μεταξύ των σημείων. Σύρετε το σημείο φυγής (ΣΦ). Τι παρατηρείτε;

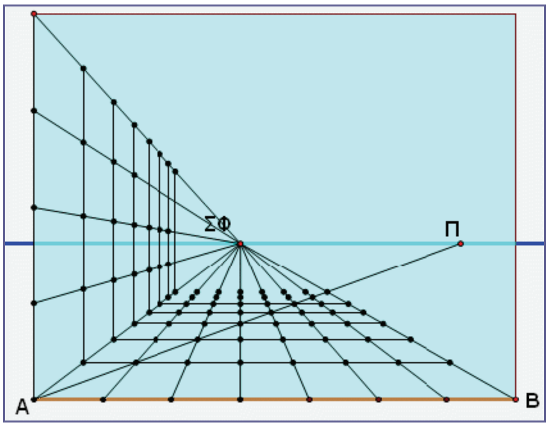
3) Μετακινήστε το σημείο Π. Τι έχετε να παρατηρήσετε σχετικά με τις μετρήσεις; Γράψτε τον κανόνα που φαίνεται να ισχύει για τη συγκεκριμένη κατασκευή.

4) Αιτιολογήστε με τη βοήθεια της έννοιας της ομοιοθεσίας τα παραπάνω συμπεράσματα.

5) Κατασκευάστε όλα τα τετράγωνα και χρωματίστε τα με δύο χρώματα εναλλάξ, για να δημιουργήσετε ένα διακοσμημένο δάπεδο σε προοπτική. Το αποτέλεσμά σας θα μοιάζει με την παρακάτω εικόνα.



6) Μετακινήστε πάνω ή κάτω τη γραμμή του ορίζοντα (από το μέρος που βρίσκεται έξω από το «παράθυρο»). Τι είναι αυτό που αλλάζει; Συζητήστε μεταξύ σας και προσπαθήστε να δώσετε μία φυσική εξήγηση (όχι υποχρεωτικά μαθηματική). Σκεφτείτε κυρίως τι σημαίνει «χαμηλώνει η γραμμή του ορίζοντα». Ποια κίνηση θα πρέπει να κάνει ένας παρατηρητής, για να συμβεί αυτό;
7) Τώρα πλέον μπορείτε να κατασκευάσετε έναν προοπτικό τοίχο, δηλαδή ένα επίπεδο κατακόρυφο και όχι οριζόντιο. Μελετήστε την παρακάτω εικόνα και σκεφτείτε τι ενέργειες θα πρέπει να κάνετε με το λογισμικό, ώστε να ολοκληρωθεί η κατασκευή. Πώς μπορούμε να κατασκευάσουμε μία προοπτική οροφή;



Αναμενόμενη πορεία
Καλό θα είναι ο διδάσκων να διακρίνει τις τρεις βασικές φάσεις της δραστηριότητας, οπότε θα κάνει καλύτερη κατανομή του χρόνου.
Η πρώτη φάση θα μπορούσε να χαρακτηριστεί ως η φάση στην οποία οι μαθητές εμπλέκονται με το θεώρημα που εξασφαλίζει την ισότητα των τμημάτων που ορίζουν οι παράλληλες πάνω σε δύο τεμνόμενες ευθείες.
Η δεύτερη φάση αναφέρεται στη μελέτη των μαθηματικών χαρακτηριστικών της κατασκευής με τη βοήθεια των εργαλείων που παρέχει το λογισμικό στους μαθητές. Η φάση αυτή θα ολοκληρωθεί με τις μαθηματικές διατυπώσεις των σημαντικών παρατηρήσεων που έχουν κάνει οι μαθητές.
Στην τρίτη φάση γίνεται επέκταση της κατασκευής σε κατακόρυφο επίπεδο και σε προοπτική οροφή. Στην ουσία οι μαθητές θα περάσουν σταδιακά από το προοπτικό επίπεδο στον προοπτικό χώρο.

- Στην αρχή ο διδάσκων προτείνει στους μαθητές να μελετήσουν το κείμενο που περιγράφει την κατασκευή του Pelerin και να περιγράψουν την υλοποίησή της με το λογισμικό.

- Όταν πλέον έχει ολοκληρωθεί η μελέτη του κειμένου, οι μαθητές ξεκινούν σταδιακά την κατασκευή του μοντέλου, διαιρώντας αρχικά τη βάση ΑΒ σε ίσα τμήματα. Η διαίρεση αυτή μπορεί να γίνει με τη μέθοδο της προηγούμενης δραστηριότητας, όμως ο διδάσκων, για οικονομία χρόνου, θα μπορούσε να επιλέξει την κατασκευή με τη βοήθεια του μέσου ευθύγραμμου τμήματος· μία δυνατότητα που διαθέτει το λογισμικό. Εδώ θα πρέπει να σημειωθεί ότι αν ο διδάσκων το κρίνει απαραίτητο, μπορεί να ζητήσει από τους μαθητές να χρησιμοποιήσουν το «Κουμπί σταδιακής κατασκευής» που εμφανίζει τέσσερα κουμπιά αριθμημένα με τα οποία υλοποιείται η κατασκευή σε σύντομο χρόνο.

- Στη συνέχεια οι μαθητές φέρουν το τμήμα ΑΠ, ορίζουν τα σημεία τομής με τα συγκλίνοντα τμήματα και τελικά φέρουν από τα σημεία τομής παράλληλες προς τη βάση. Μόλις δημιουργήσουν όλα τα σημεία τομής των παραλλήλων με τις συγκλίνουσες, αποκρύπτουν τις παράλληλες και ενώνουν με τμήματα τα σημεία τομής.

- Στόχος της δεύτερης και τρίτης δραστηριότητας είναι οι μαθητές να διαπιστώσουν ότι τα τμήματα που βρίσκονται στην ίδια οριζόντια ευθεία είναι μεταξύ τους ίσα, ανεξαρτήτως από τη θέση του ορίζοντα και του σημείου φυγής. Ο διδάσκων θα μπορούσε ακόμη να προτείνει στους μαθητές να μετρήσουν τα τμήματα που βρίσκονται πάνω σε μία συγκλίνουσα και να τα συγκρίνουν με τα αντίστοιχα που βρίσκονται σε μια άλλη συγκλίνουσα. Η σύγκριση υπονοεί τους λόγους των τμημάτων οι οποίοι παραμένουν σταθεροί.

- Στόχος της τέταρτης δραστηριότητας είναι οι μαθητές να αιτιολογήσουν με μαθηματικό τρόπο το εύρημα της ισότητας των τμημάτων πάνω σε μία παράλληλη. Μία πρόταση είναι να χρησιμοποιήσουν την έννοια της ομοιοθεσίας, η οποία είναι κατάλληλη, αφού τα αντίστοιχα τμήματα πάνω στις παράλληλες είναι ομοιόθετα, λόγω της σύγκλισης των τμημάτων προς το σημείο φυγής. Ένας ισοδύναμος τρόπος είναι προφανώς και η χρήση των ομοίων τριγώνων που αφθονούν στο προοπτικό δάπεδο με κορυφή το σημείο φυγής.

- Σε αυτό το σημείο ο διδάσκων θα μπορούσε να ζητήσει από τους μαθητές να μετρήσουν τα αντίστοιχα τμήματα που βρίσκονται πάνω στις συγκλίνουσες και να συγκρίνουν τους λόγους τους. Η ισότητα των λόγων μπορεί να οδηγήσει τους μαθητές σε διατυπώσεις του Θεωρήματος του Θαλή.

- Η πέμπτη δραστηριότητα έχει περισσότερο εικαστικό χαρακτήρα, αφού επιτρέπει στους μαθητές να επιλέξουν συνδυασμούς χρωμάτων για την κάλυψη του δαπέδου.
  Στόχος της είναι η μεταφορά της σωματικής - οπτικής εμπειρίας στην κατασκευή. Συγκεκριμένα, οι μαθητές, χαμηλώνοντας τον ορίζοντα, θα αναγνωρίσουν τον τρόπο με τον οποίο μεταβάλλεται η οπτική μας αντίληψη για το προοπτικό επίπεδο, καθώς χαμηλώνουμε προς το έδαφος και κοιτάζουμε προς τον ορίζοντα.

- Στην έκτη δραστηριότητα οι μαθητές με τη βοήθεια του διδάσκοντα έχουν την ευκαιρία να κατασκευάσουν ένα προοπτικό δωμάτιο καθώς μπορούν να κατασκευάσουν τους δύο προοπτικούς τοίχους (αριστερά και δεξιά) και την προοπτική οροφή. Είναι απαραίτητο να χωρίσουν και τις τέσσερις πλευρές του ορθογώνιου «παραθύρου» σε ίσα τμήματα. Η διαίρεση αυτή μπορεί να γίνει απλά με τη μέθοδο του μέσου, οπότε θα χωριστούν σε τέσσερα ή οκτώ ίσα τμήματα. Διαφορετικά θα πρέπει να χρησιμοποιηθεί η μέθοδος που περιγράφεται στο αρχείο Διαίρεση του λογισμικού.

- Τέλος η έβδομη δραστηριότητα αποτελεί, κατά κάποιον τρόπο, προέκταση της δραστηριότητας του προοπτικού δαπέδου στις τρεις διαστάσεις.

2.5 PROJECT ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ – Θεματική ενότητα: Το προοπτικό μοντέλο του Alberti

Η ιδέα του σεναρίου
Η κατασκευή προοπτικών μοντέλων, δηλαδή προτύπων αναπαράστασης της οπτικής μας αντίληψης, έχει προκύψει από τις προσπάθειες των καλλιτεχνών να λύσουν το πρόβλημα της δημιουργίας ενός πιο αληθοφανούς χώρου.

Οι προσπάθειες αυτές, ιδιαίτερα κατά την Αναγέννηση, πραγματοποιήθηκαν από καλλιτέχνες, οι οποίοι διέθεταν πολύ καλή γνώση της Ευκλείδειας Γεωμετρίας, αλλά και μαθηματικό ένστικτο. Ένας από αυτούς ήταν και ο Alberti, ο οποίος περιέγραψε με ακρίβεια τις γενικές αρχές κατασκευής ενός προοπτικού δαπέδου και δημιούργησε την πρώτη θεωρητική προσέγγιση του προβλήματος της προοπτικής αναπαράστασης του χώρου.

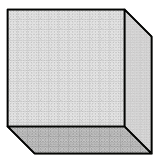
Το μοντέλο προοπτικής που δημιούργησε ο Alberti έχει προκύψει από την πρόθεση του καλλιτέχνη να κατασκευάσει μία τρισδιάστατη αντίληψη σε δύο διαστάσεις. Εκείνο που γνώριζε πολύ καλά, και χρησιμοποίησε ως βασικό εργαλείο για το μοντέλο του, ήταν το Θεώρημα του Θαλή και η αντίληψη ότι η παραλληλία μεταφέρει τις αναλογίες από μία ευθεία σε μία άλλη.

Το μοντέλο φέρει ενσωματωμένα μαθηματικά τα οποία είναι δυνατόν να αναδειχθούν σε διάφορα επίπεδα. Ο σχεδιασμός του σεναρίου έχει στόχο την εμπλοκή των μαθητών σε δραστηριότητες κατά τις οποίες θα αναζητήσουν απλές σχέσεις (γραμμικές ή μη) μεταξύ μεγεθών που μεταβάλλονται, καθώς χειρίζονται και μελετούν μία δυναμική προσομοίωση της ιδέας του Alberti. Δραστηριότητες αυτής της μορφής ενδείκνυνται για μαθητές των δύο τελευταίων τάξεων του γυμνασίου, κυρίως δε για την Γ΄ Γυμνασίου.

Παιδαγωγικό πλαίσιο
Τα μαθηματικά και η τέχνη είναι δύο χώροι που συνδέονται άρρηκτα. Δεκάδες καλλιτέχνες «πάντρεψαν» κυριολεκτικά τα δύο αυτά προϊόντα του ανθρώπινου πολιτισμού και καθιέρωσαν τάσεις και μορφές τέχνης που συνέθεταν αρμονικά και τα δύο. Ιδιαίτερα στη ζωγραφική, ο καλλιτέχνης δημιουργεί με βάση το πώς αντιλαμβάνεται το χώρο και τη δομή του και την αντίληψή του αυτή την επιβάλλει, καθώς δημιουργεί τον ιδιαίτερο χώρο των έργων του.

Οι αρχαίοι Έλληνες και Ρωμαίοι καλλιτέχνες ζωγράφιζαν μέσα από μία αξονομετρική αντίληψη για το χώρο, τον οποίο παρίσταναν με μορφή κύβου. Αυτή ακριβώς είναι η ευκλείδεια αντίληψη, που βασίζεται σε μία διατύπωση του πέμπτου αιτήματος, κατά την οποία από ένα σημείο μπορούμε να φέρουμε μόνο μία παράλληλη προς μία άλλη ευθεία.

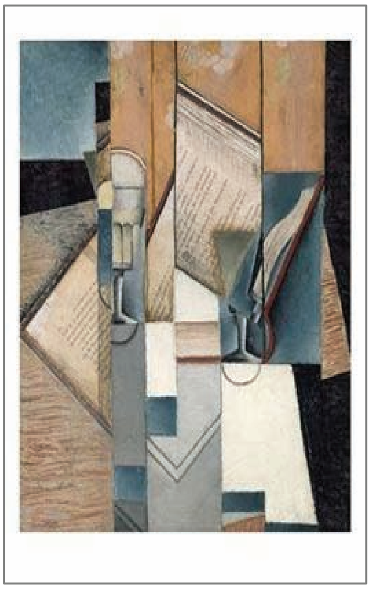
Επομένως, το δωμάτιο είναι ένας κύβος, το δε πάτωμα είναι ένα παραλληλόγραμμο.



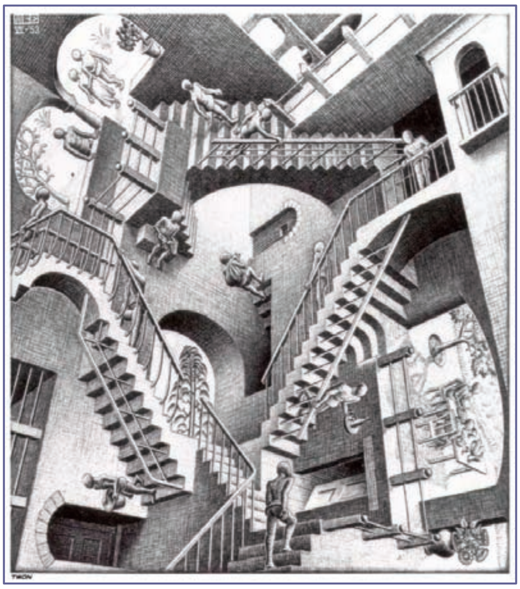
Εδώ ο χώρος δεν αναπαριστάται έτσι όπως «φαίνεται», αλλά με τρόπο ώστε να είναι συμβατός με το πέμπτο αίτημα.

Το «φαίνεσθαι» των πραγμάτων ήταν απάτη, ψευδαίσθηση, ενώ η Ευκλείδεια Γεωμετρία υπήρξε το ασφαλές καταφύγιο για την έγκυρη παράσταση των πραγμάτων. Η στροφή προς μία πιο ανθρωποκεντρική προσέγγιση των πραγμάτων, η οποία διαφαίνεται κατά την Αναγέννηση, κατευθύνει το ενδιαφέρον των μαθηματικών-καλλιτεχνών σε περαιτέρω μαθηματικοποίηση της οπτικής μας αντίληψης. Κέντρο του ενδιαφέροντος είναι το ανθρώπινο μάτι, ενώ εργαλείο της μαθηματικής επεξεργασίας είναι και πάλι οι ιδέες του Ευκλείδη. Το ρεύμα αυτό, που αποτελεί στην ουσία πνευματικό κίνημα, συνέβαλε στη δημιουργία των αρχών της προοπτικής και γέννησε ένα νέο μαθηματικό κλάδο, εκείνον της Προβολικής Γεωμετρίας.

Στη σύγχρονη ζωγραφική η παρουσία της γεωμετρικής αντίληψης είναι σε πολλές περιπτώσεις κάτι περισσότερο από εμφανής. Χαρακτηριστικά παραδείγματα είναι το αρκετά πρόσφατο ρεύμα του «κυβισμού» και οι ανατρεπτικές κατασκευές του Escher.



Juan Gris, «Το βιβλίο», 1913



Escher: Σχετικότητα

Οι δικτυακές διευθύνσεις των εικόνων τον 5/2008 είναι:
Ηλεκτρονική βιβλιοθήκη με το σύνολο των έργων του Escher: http://www.mcescher.net/target62.html
Ηλεκτρονική διεύθυνση με αφίσες από έργα καλλιτεχνών που ακολούθησαν την τεχνοτροπία του κυβισμού: http://www.allposters.com/-sp/The-Book-1913-Posters_i1989379_.htm

Οι δραστηριότητες του παρόντος σεναρίου έχουν στόχο να αναδείξουν τα μαθηματικά που είναι ενσωματωμένα σε μία συγκεκριμένη μορφή της ζωγραφικής τέχνης, την προοπτική. Η προοπτική συνιστά ένα κομβικό σημείο συνάντησης της τέχνης με τα μαθηματικά και αποτελεί μια πρώτης τάξεως ευκαιρία να εμπλακούν οι μαθητές σε διερευνήσεις των μαθηματικών ιδεών που δομούν τη χωρική μας αντίληψη.

Οι μαθητές οδηγούνται σε μία σταδιακή μαθηματικοποίηση του τρόπου με τον οποίο αντιλαμβανόμαστε ένα δάπεδο, του τρόπου με τον οποίο παριστάνονται τα αντικείμενα που βρίσκονται σε απόσταση, καθώς και των διαστάσεων που **φαίνεται** ότι έχουν τα αντικείμενα αυτά.

Με τον όρο μαθηματικοποίηση προσδιορίζεται η εν γένει διαδικασία δημιουργίας της μαθηματικής γνώσης. Κάθε μαθηματική δραστηριότητα θα μπορούσε να χαρακτηριστεί είτε ως οριζόντια μαθηματικοποίηση, όταν προχωρά από τα φαινόμενα προς τα μαθηματικά, είτε ως κατακόρυφη, όταν εντοπίζεται αποκλειστικά στο χώρο των μαθηματικών (Treffers, 1987). Στο συγκεκριμένο σενάριο οι μαθητές θα εμπλακούν τόσο σε δραστηριότητες οριζόντιας όσο και κάθετης μαθηματικοποίησης. Συγκεκριμένα, αφετηρία των δραστηριοτήτων είναι ένα φαινόμενο που αφορά στην οπτική μας αντίληψη. Στο φαινόμενο αυτό οι μαθητές θα εισάγουν μεταβλητές, θα πραγματοποιήσουν μετρήσεις και τελικά θα δημιουργήσουν μαθηματικό περιεχόμενο και δομή την οποία θα μελετήσουν με τα μαθηματικά εργαλεία που διαθέτουν. Αυτή η διαδικασία οδηγεί τους μαθητές στην επανακατασκευή των μαθηματικών εννοιών με τη σημασία που αποδίδει στον όρο ο Gravemeijer (2000), δηλαδή επαναλαμβάνουν, σε ατομικό πλέον επίπεδο, την κατασκευή της μαθηματικής γνώσης με τον τρόπο που υποδεικνύει η Ιστορία των Μαθηματικών. Η ιστορική πορεία έχει σημαίνοντα ρόλο, αφού θα μπορούσαμε να θεωρήσουμε ότι η δημιουργία της μαθηματικής γνώσης φαίνεται να προέρχεται από δράσεις μαθηματικοποίησης των μελών της κοινότητας και από επικοινωνία και διαπραγμάτευση των ιδεών που προκύπτουν.

Διδακτική αξία
Οι περιορισμοί που επιβάλλουν το Αναλυτικό Πρόγραμμα Σπουδών, το ωράριο διδασκαλίας και τα σχολικά εγχειρίδια καθορίζουν ένα συγκεκριμένο πλαίσιο διδακτικής πρακτικής για τα μαθηματικά τόσο στο γυμνάσιο όσο και στο λύκειο. Η ύλη είναι κατανεμημένη σε διακριτά κεφάλαια, καθένα από τα οποία πραγματεύεται μία συγκεκριμένη θεματική ενότητα. Η γεωμετρία αποτελεί ένα ξεχωριστό γνωστικό αντικείμενο, που φαίνεται να μην έχει καμιά σχέση με την ύλη της άλγεβρας και των συναρτήσεων. Με τον τρόπο αυτό δημιουργούνται στεγανά μεταξύ των θεματικών ενοτήτων.

Από την άλλη, η συνήθης διδακτική πρακτική οδηγεί σε διαπραγμάτευση της κατάστασης προβλήματος μέσω των στατικών εικόνων των γεωμετρικών σχημάτων και των γραφικών παραστάσεων πάνω στο χαρτί. Η πρακτική αυτή έχει ως αποτέλεσμα ο μαθητής να αποκτήσει τα εφόδια για τη λύση ασκήσεων που έχουν περισσότερο σχέση με καθαρά γεωμετρικά αντικείμενα παρά με πραγματικά προβλήματα. Αυτό έχει ως συνέπεια το νόημα των μαθηματικών εννοιών να αντλείται κατά κύριο λόγο από την εμπειρία των αφηρημένων στατικών σχημάτων, όσον αφορά στη γεωμετρία, ή από τους συντακτικούς κανόνες των συμβόλων, όσον αφορά στην άλγεβρα.

Με το συγκεκριμένο σενάριο οι μαθητές θα συνδέσουν διαφορετικές διδακτικές ενότητες, αλλά κυρίως θα συσχετίσουν μαθηματικές έννοιες με αυθεντικές καταστάσεις προβλήματος. Η διδασκαλία των μαθηματικών μέσα από τη διερεύνηση καταστάσεων προβλήματος αναγνωρίζεται από τη μαθηματική κοινότητα (Schoenfeld, 1985) ως το κατεξοχήν μέσον για να εμπλακούν οι μαθητές σε μαθηματικές δραστηριότητες. Κατά την Sfard (1997), η μαθηματική παιδεία θα πρέπει να επικεντρώσει το ενδιαφέρον της στην ανάπτυξη της μαθηματικοποίησης, αντί για τη μαθηματική γνώση από μόνη της, και αυτό δίνει μια άλλη κατεύθυνση στην έρευνα, αφού την απομακρύνει από την απλή αξιολόγηση της εκτέλεσης πράξεων (performance) από μεριάς μαθητών.

Η χρήση του υπολογιστή θα επιτρέψει στους μαθητές τη δημιουργία και μελέτη δυναμικών αναπαραστάσεων, καθώς και τον εντοπισμό σταθερών και μεταβλητών μεγεθών μέσα σε ένα μαθηματικό μοντέλο, και θα δημιουργήσει μέσα στην ομάδα ευκαιρίες για διατύπωση εικασιών, έλεγχο και διαπραγμάτευση.

Τέλος, η διδακτική πορεία θα ολοκληρωθεί με ένα στάδιο που είναι αδύνατον να υλοποιηθεί με τα στατικά μέσα του πίνακα και του τετραδίου. Πρόκειται για τη δημιουργία ενός δυναμικού προοπτικού χώρου, ο οποίος θα φέρει ενσωματωμένα τα μαθηματικά που κατασκεύασαν οι μαθητές, μελετώντας το μοντέλο του Alberti. Ο χώρος θα είναι κατά κάποιον τρόπο παραμετρικός, αφού θα μπορεί να μεταβάλλεται καθώς θα μεταβάλλονται οι παράμετροι της κατασκευής του. Στο στάδιο αυτό οι μαθητές θα υλοποιήσουν μία επέκταση της προοπτικής απεικόνισης από το δάπεδο στον εσωτερικό χώρο. Οι μαθηματικές έννοιες και σχέσεις που θα προκύψουν από τις δραστηριότητες θα συνδεθούν, για τους μαθητές, με αυθεντικές πραγματικές καταστάσεις και θα αντλήσουν νόημα από αυτές.

2.5.1 Ιστορικό πλαίσιο του εκπαιδευτικού σεναρίου

Η πρώτη πραγματεία για τη θεωρία της ζωγραφικής είναι το βιβλίο *Περί Ζωγραφικής* του Leon Battista Alberti. Αν και εμφανίστηκε σε μία χρονική στιγμή (1435-1436) κατά την οποία η παλιά και νέα τάξη πραγμάτων στην τέχνη εξακολουθούσαν να συνυπάρχουν στη Φλωρεντία, ήρθε σε ρήξη με το Μεσαίωνα και προετοίμασε το έδαφος για την τέχνη, τον καλλιτέχνη και τον προστάτη των τεχνών της Αναγέννησης. Η πρακτική της ζωγραφικής τόσο στο εσωτερικό όσο και στο εξωτερικό της Φλωρεντίας πέρασε γρήγορα στην επιρροή των ιδεών που προωθούνται στο σύγγραμμα. Η μετάφραση από το λατινικό πρωτότυπο στα ιταλικά από τον ίδιο τον Alberti έγινε ανάρπαστη, καθώς θεωρήθηκε «εμπνευσμένο εγχειρίδιο».

Το ίδιο έργο γνώρισε πολλές ακόμη μεταφράσεις και επανεκδόσεις, επηρεάζοντας και άλλες σχολές ζωγράφων στην Ευρώπη (Γαλλία και Αγγλία) από το 16ο μέχρι και το 18ο αιώνα. Όμως κάθε φορά οι ζωγράφοι υιοθετούσαν εκείνες τις ιδέες που εξυπηρετούσαν τις δικές τους ανάγκες και απαντούσαν στις προσωπικές τους αναζητήσεις για μια τέχνη πιο λογική και ρεαλιστική. Έτσι οι προτάσεις του Alberti εξελίχθηκαν σε αυστηρούς κανόνες και δόθηκε υπερβολική έμφαση στις αντιλήψεις του για τη λογική, την αληθοφάνεια και την αξιοπρέπεια στη ζωγραφική, επιτρέποντας σε πολλούς κριτικούς σήμερα να θεωρούν το *Περί Ζωγραφικής* ως την αιτία για τον ακαδημαϊσμό της τέχνης του 17ου και 18ου αιώνα.

Ωστόσο θα πρέπει να έχουμε στο μυαλό μας ότι το συγκεκριμένο έργο αναφέρεται και πηγάζει πρωτίστως από την τέχνη της Φλωρεντίας του 15ου αιώνα. Καθώς ο Alberti το 1434 ήταν μέλος της ακολουθίας του Πάπα Ευγενίου IV, είχε τη δυνατότητα να μελετά τα έργα των Brunelleschi, Donatello, Ghiberti και Masaccio. Αυτός ακριβώς ο θαυμασμός και η αισιοδοξία του για τα επιτεύγματα της νέας εποχής εκφράζονται στην πραγματεία του *Περί Ζωγραφικής*. Είναι επίσης χαρακτηριστικό ότι δείχνει να ενδιαφέρεται, προκειμένου όλη αυτή η γνώση που αποκτήθηκε από τους ουμανιστές –και ειδικότερα η νέα ουμανιστική τέχνη της Φλωρεντίας– να γίνει προσιτή στο ευρύτερο κοινό και όχι μόνο στους ήδη μυημένους.

Αξίζει να σημειωθεί ότι ο Alberti γνώριζε τα προβλήματα με τα οποία έρχεται αντιμέτωπος ένας καλλιτέχνης. Υπάρχουν στοιχεία ότι αν και δεν κατείχε όλες τις τέχνες σε βάθος, ωστόσο μπορούσε να ζωγραφίζει, να φτιάχνει σχέδια, έργα γλυπτικής και χαρακτικής. Επιπλέον, οι καλλιτεχνικές του γνώσεις περιελάμβαναν μια βαθιά αντίληψη της τέχνης της βόρειας Ιταλίας, μια γνωριμία με την τέχνη της Γαλλίας και των Κάτω Χωρών και ένα ζωηρό ενδιαφέρον για τα έργα της ρωμαϊκής Αρχαιότητας, καθώς εντυπωσιαστεί από αυτά κατά τη διαμονή του στη Ρώμη από το 1431.

Οι συχνές αναφορές του σε αρχαίους Έλληνες και Ρωμαίους συγγραφείς, καθώς και η συγγραφή δοκιμίων, φανερώνουν την εξοικείωση αλλά και την προσπάθειά του για δημιουργική αφομοίωση της αρχαίας διανόησης. Ο Alberti διέθετε ασφαλώς το ανάλογο πνευματικό υπόβαθρο, λόγω της ακαδημαϊκής του εκπαίδευσης, η οποία, ωστόσο, δεν διέφερε σημαντικά από εκείνη των υπόλοιπων ουμανιστών. Ο ουμανισμός ήταν το κίνημα που θεωρεί ότι η αλήθεια, η ηθική, η δικαιοσύνη θα πρέπει να προσδιορίζονται με βάση τις πανανθρώπινες αξίες, οι οποίες προέρχονται από την κοινή ανθρώπινη φύση.

Στη σχολή Barzizza στη Πάδουα γνώρισε τόσο τη μεσαιωνική διδασκόμενη ύλη όσο και τα πρόσφατα ανακαλυφθέντα χειρόγραφα της Αρχαιότητας, ενώ στο Πανεπιστήμιο της Bologna καλλιέργησε τις κριτικές και συνθετικές του ικανότητες.

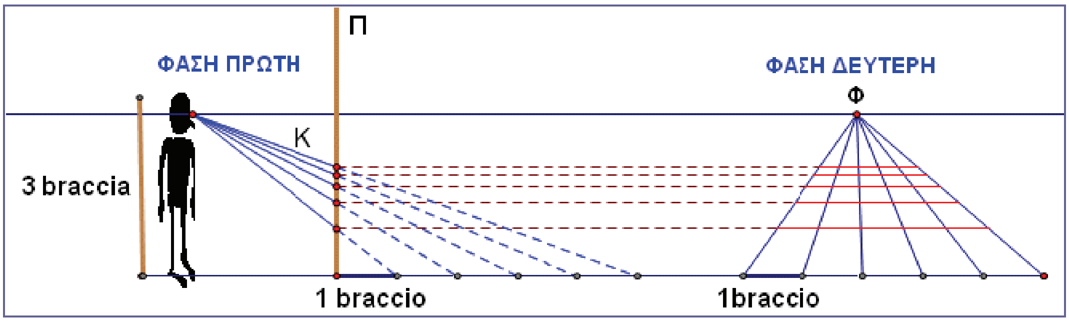
Απόρροια των παραπάνω ήταν η προσπάθειά του στο έργο του *Περί Ζωγραφικής* να στηρίξει με επιτυχία την επιχειρηματολογία του, η οποία εμπλουτίζεται με αναφορές σε αρχαίους συγγραφείς και μαθηματικές αποδείξεις.

Ο Alberti αντλεί από τον Κικέρωνα τη μέθοδο ανάλυσης και σύνθεσης, σύμφωνα με την οποία ο άνθρωπος και η ορθολογιστική του σκέψη τοποθετείται στο κέντρο της φύσης και της τέχνης. Η γνώση αποκτάται μέσω των αισθήσεων. Οι παρατηρήσεις που πραγματοποιούνται μέσω των αισθήσεων οδηγούν σε συμπεράσματα, τα οποία ο άνθρωπος σχηματίζει έπειτα από συγκρίσεις. Για τον Alberti και τους σύγχρονούς του η φύση είναι ομογενής και, καθώς είναι έτσι, το όλον γίνεται γνωστό από το σημείο του το οποίο αποτελεί αντικείμενο παρατήρησης. Εφόσον ο άνθρωπος, η φύση και τα μαθηματικά είναι όλα μέρη του ίδιου συνόλου, ο άνθρωπος δεν έχει παρά να χρησιμοποιήσει τα μαθηματικά, για να κατανοήσει και να ελέγξει τη φύση. Αυτό δεν γίνεται πουθενά αλλού φανερότερο όσο στην ερμηνεία που δίνει ο Alberti για την προοπτική. Εδώ τα μαθηματικά χρησιμοποιούνται ως μέσο για να κατασκευάσει και να ελέγξει ο άνθρωπος το χώρο, όπου θα κατοικήσει είτε ως δρων είτε ως παρατηρητής.

Περί Ζωγραφικής

Καθώς ο Brunelleschi δεν άφησε γραπτή αναφορά σχετικά με τα ευρήματά του περί προοπτικής, ο Alberti υπήρξε ο πρώτος που διατύπωσε γραπτώς τη θεωρία του στην πραγματεία του *Περί Ζωγραφικής* (*Della pittura*) το 1435. Εκεί δίνει πληροφορίες για τους ζωγράφους και πρακτικές συμβουλές για το πώς να ζωγραφίσει κανείς *istoria* ή ιστορικούς πίνακες. Στο σημείο αυτό θα συζητήσουμε μόνο το κομμάτι εκείνο, στο οποίο δίνεται η πρώτη γραπτή περιγραφή της γραμμικής προοπτικής.

Ο Alberti περιέγραψε τις γενικές αρχές για τη δημιουργία ενός συμμετρικά μειούμενου δικτυωτού πλέγματος τετραγώνων στο δάπεδο της εικόνας και παρείχε την πρώτη θεωρητική αναφορά αυτού που σήμερα αποκαλούμε γραμμική προοπτική.



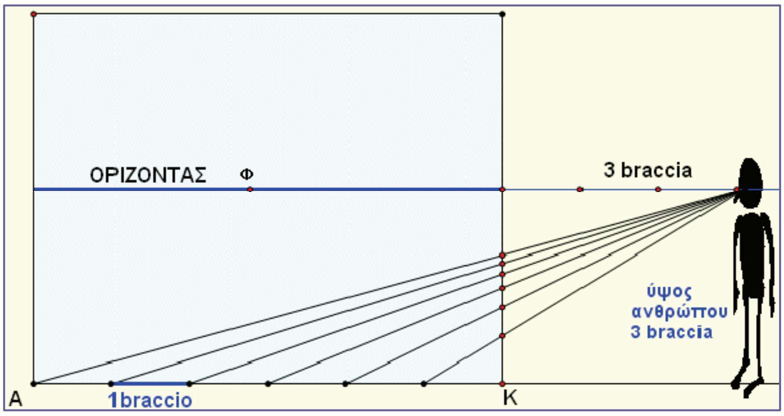
Την περιέγραψε σαν μία προβολή και εξήγησε τη σχέση ανάμεσα στη θέση του ματιού, του κώνου Κ της όρασης και της τομής του με το επίπεδο Π της εικόνας.

Διέκρινε την κατασκευή σε δύο φάσεις, οι οποίες συνδυάζονται και δημιουργούν ένα δικτυωτό πλέγμα προοπτικών τετραγώνων που συγκλίνει προς ένα σημείο Φ στο βάθος, το σημείο φυγής.

Ο Alberti προτείνει να συσχετιστεί το ύψος του θεατή (3 *braccia*) με το μέγεθος των τετραγώνων του δαπέδου (1 *braccio*) και επισημαίνει ότι ένας τρόπος να ελεγχθεί η ορθότητα του σχεδίου είναι η σύγκλιση των διαγωνίων των τετραγώνων σε ένα μοναδικό σημείο στο έδαφος.

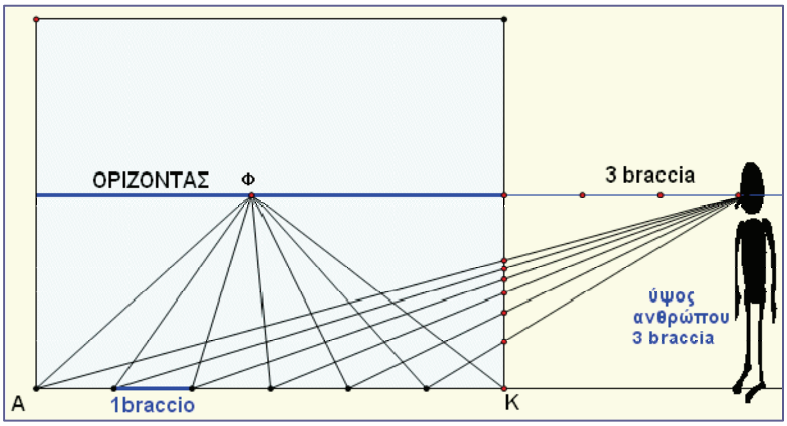
Η νόμιμη κατασκευή (Costruzione Legittima)

Ο Alberti περιγράφει τη μέθοδο για την κατασκευή μιας εικόνας οριζόντιου δικτυωτού πλέγματος τετραγώνων, όπως είναι οι λιθόστρωτες πλάκες σε μια πλατεία. Στην περιγραφή του τοποθετεί τις ορθές γωνίες και τις πλάγιες τομές σε αποστάσεις που ορίζονται από ένα *braccio*, μία φλωρεντίνικη μονάδα μέτρησης ίση με το 1/3 του ύψους ενός ανθρώπου, 23 περίπου ίντσες (58,42 εκ.). Αυτή η κατασκευή του ονομάστηκε *Costruzione Legittima*.



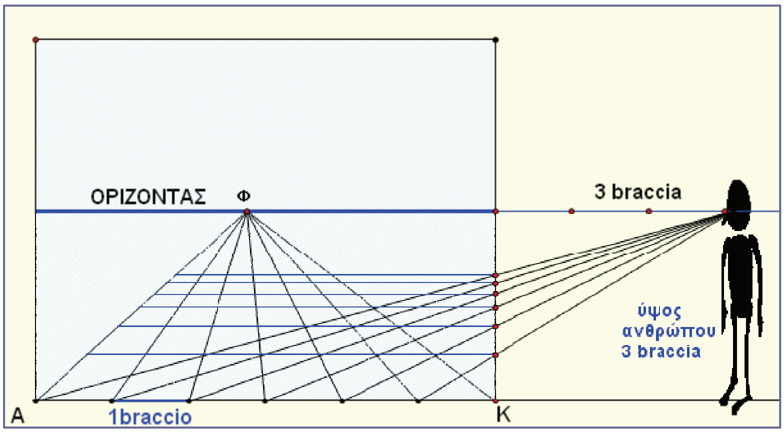
Η μονάδα μέτρησης *braccio* (1/3 του ύψους ενός ανθρώπου). Η βάση της εικόνας χωρίζεται σε *braccia*. Το ύψος του ανθρώπου στο μπροστινό πλάνο δίνει το επίπεδο του ορίζοντα.

Οι κάθετες ευθείες στα άκρα των *braccio* συγκλίνουν στο προοπτικό σημείο Φ που είναι το σημείο φυγής.



Οι πλευρικές τομές των οπτικών ακτίνων με την κατακόρυφη πλευρά του «παραθύρου» προσδιορίζουν τα σημεία από τα οποία θα φέρουμε τις παράλληλες.

Αυτές οι παράλληλες καθορίζουν τις οριζόντιες γραμμές του πλέγματος και σε συνδυασμό με τις συγκλίνουσες κάθετες μας δίνουν την αίσθηση του βάθους.



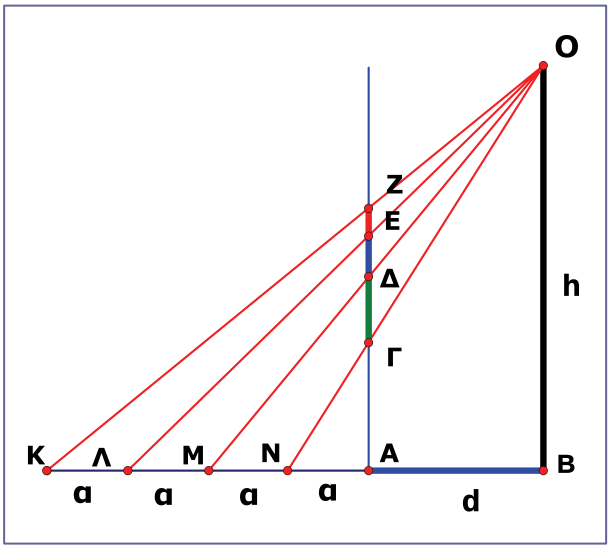
Ωστόσο, η περιγραφή του Alberti είναι λίγο ασαφής και ανοικτή σε ποικίλες ερμηνείες. Ο Samuel Y. Edgerton έδειξε ότι η περιγραφή του Alberti υπαινισσόταν ότι το σημείο θέασης έπρεπε να τοποθετηθεί στην άκρη του πίνακα και ότι ο καλλιτέχνης αποφασίζει συνεπώς τη θέση του επιπέδου της εικόνας. Τα δύο διαγράμματα που περιγράφει ο Alberti στην πραγματικότητα αλληλοκαλύπτονται και υπό ορισμένες συνθήκες, όταν το επίπεδο της εικόνας τοποθετείται στο κέντρο του πίνακα, έχουν ως αποτέλεσμα το σημείο εξ αποστάσεως και η θέση του θεατή να συμπίπτουν.

2.5.2 Μαθηματικά του μοντέλου του Alberti

Τα μαθηματικά που σχετίζονται με το μοντέλο του Alberti αφορούν κυρίως στις σχέσεις των τμημάτων που δημιουργούνται από τις τομές των οπτικών ακτίνων με την κατακόρυφη πλευρά του «παραθύρου» και των τμημάτων που ορίζονται από τις τομές των συγκλίνουσων καθέτων με τις παράλληλες.

Θα ξεκινήσουμε με τις αριθμητικές σχέσεις των τμημάτων που ορίζονται από τις οπτικές ακτίνες πάνω στο κατακόρυφο επίπεδο.

Στο σχήμα που ακολουθεί έχουμε θεωρήσει h το ύψος ΟΒ του παρατηρητή που βρίσκεται σε απόσταση ΑΒ=d από το κατακόρυφο επίπεδο.



Το δάπεδο είναι χωρισμένο σε ίσα τμήματα μήκους α. (Προφανώς τα τμήματα αυτά αντιστοιχούν στην κάλυψη του δαπέδου με τετράγωνα πλακίδια).

Αυτό που παρουσιάζει ενδιαφέρον είναι η σχέση των τμημάτων ΑΓ, ΑΔ, ΑΕ κ.λπ. Ακόμη μας ενδιαφέρει η σχέση των τμημάτων ΑΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΖ κ.λπ.

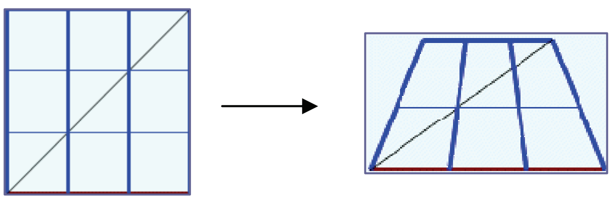
α) Από τα τρίγωνα ΟΒΝ και ΓΑΝ προκύπτει ότι $\beta_1 = \mathrm{A\Gamma} = \dfrac{\alpha.h}{d+\alpha}$ και από τα τρίγωνα ΟΜΒ και ΔΜΑ προκύπτει ότι $\beta_2 = \mathrm{A\Delta} = \dfrac{2\alpha.h}{d+2\alpha}$ οπότε εν γένει ισχύει $\beta_\nu = \dfrac{\nu.\alpha.h}{d+\nu.\alpha}$.

Η ακολουθία αυτή εκφράζει τη σχέση βάση της οποίας μπορούμε να υπολογίσουμε το ύψος του τυχόντος σημείου τομής πάνω στο κατακόρυφο επίπεδο. Αυτό που θα πρέπει να επισημάνουμε είναι ότι το συνεχές μοντέλο αυτής της ακολουθίας, δηλαδή το $f(x) = \dfrac{(\alpha.h).x}{\alpha.x+d}$, είναι συνάρτηση της οποίας η γραφική παράσταση είναι μία υπερβολή με ασύμπτωτες τις ευθείες y=h και $x = -\dfrac{d}{\alpha}$ (η ευθεία αυτή προφανώς δεν υλοποιείται, αφού χ>0). Αυτό σημαίνει ότι τα σημεία που θα προκύψουν από τη γραφική παράσταση της ακολουθίας θα είναι διατεταγμένα πάνω σε μία υπερβολική καμπύλη.

β) Με βάση την προηγούμενη ακολουθία μπορούμε να δημιουργήσουμε την ακολουθία των τμημάτων ΑΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΖ κ.λπ. Το τυχόν τμήμα α_ν θα προκύψει από τη διαφορά β_ν-$\beta_{\nu-1}$, οπότε $\alpha_\nu = \dfrac{\alpha.h.d}{(\alpha.\nu+d)[\alpha.(\nu\text{-}1)+d]}$.

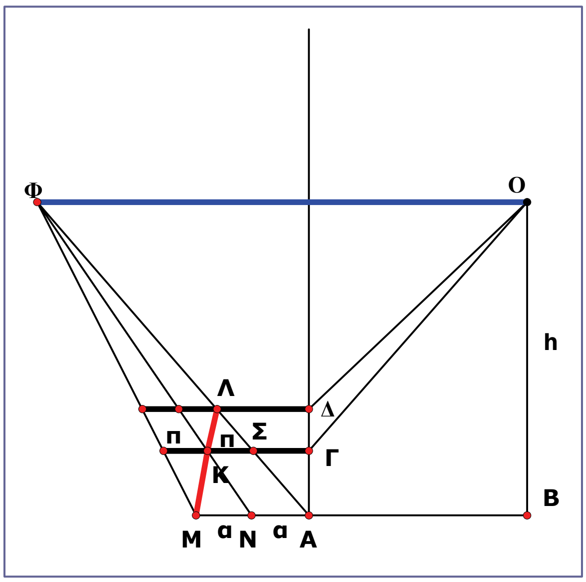
Εδώ παρατηρούμε ότι το συνεχές μοντέλο της ακολουθίας, δηλαδή η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{\alpha.h.d}{(\alpha.x+d)[\alpha.(x\text{-}1)+d]}$, έχει γραφική παράσταση καμπύλη και είναι φθίνουσα.

γ) Ας έρθουμε τώρα στην καταλληλότητα του μοντέλου, δηλαδή στην ικανότητά του να διατηρεί τη διαγώνιο του δαπέδου. Για να είναι κατάλληλο ένα μοντέλο, θα πρέπει να διατηρεί τις ιδιότητες του καθαρά γεωμετρικού τετραγώνου και να τις μεταβιβάζει στο προοπτικό τετράγωνο. Η βασική ιδιότητα που διατηρείται κατά τη μετατροπή ενός τετραγώνου σε προοπτικό είναι η εξής:



Όταν το τετράγωνο ή το προοπτικό τετράγωνο είναι χωρισμένο σε ν^2 τετράγωνα, ή προοπτικά τετράγωνα αντίστοιχα, τότε οι διαγώνιες των τετραγώνων που βρίσκονται στην κ γραμμή και κ στήλη θα ανήκουν πάνω στη διαγώνιο του μεγάλου τετραγώνου.

Αυτό που θα πρέπει να αποδειχτεί είναι ότι τα σημεία Μ, Κ, Λ βρίσκονται στην ίδια ευθεία. Για να αποδειχτεί η συνευθειακότητα, αρκεί να δειχτεί ότι υφίσταται η αναλογία $\dfrac{\pi}{2\alpha} = \dfrac{\Lambda\Sigma}{\Sigma\mathrm{A}}$.

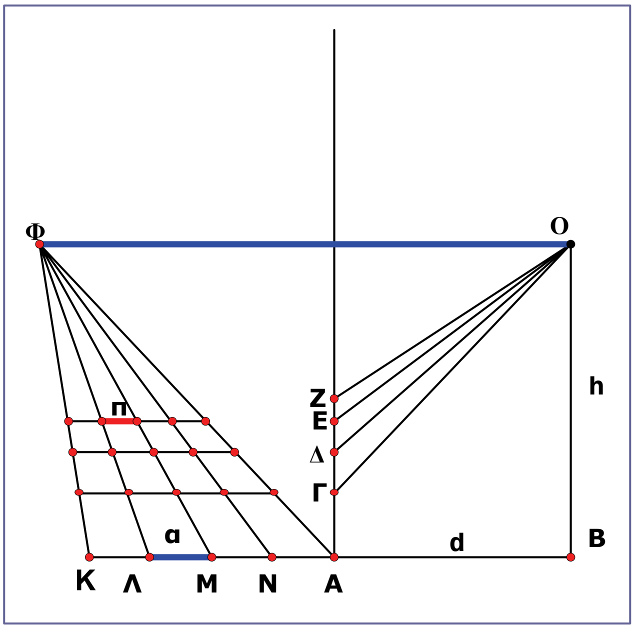


Η απόδειξη θα στηριχτεί στην ομοιότητα των τριγώνων και στο Θεώρημα του Θαλή.

- Ισχύει: $\frac{\Lambda\Sigma}{\Sigma A}=\frac{\Delta\Gamma}{\Delta A}$, αλλά $\frac{\Delta\Gamma}{\Delta A}=\frac{\alpha_2}{\beta_2}$ και επιπλέον $\frac{\alpha_2}{\beta_2}=\frac{\frac{\alpha h d}{(2\alpha+d)(\alpha+d)}}{\frac{2\alpha h}{2\alpha+d}}=\frac{d}{2(\alpha+d)}$.
- Ισχύει $\frac{\pi}{\alpha}=\frac{\Phi\Sigma}{\Phi A}$, αλλά $\frac{\Phi\Sigma}{\Phi A}=\frac{h-\beta_1}{h}=\frac{h-\frac{\alpha.h}{d+\alpha}}{h}=\frac{d}{d+a}$, επομένως $\frac{\pi}{2\alpha}=\frac{d}{2(d+\alpha)}$.

Όπως προκύπτει από τα παραπάνω, μία γενική απόδειξη ακολουθεί ακριβώς τα προηγούμενα βήματα, όμως το σπουδαιότερο συμπέρασμα είναι ότι το μοντέλο του Alberti διατηρεί τη διαγώνιο στο προοπτική τετράγωνο, άρα δημιουργεί μία φυσική αναπαράστασή του.

δ) Υπολογισμός του μήκους των τμημάτων π της τυχαίας σειράς κ των παραλλήλων.



Εδώ θα πρέπει να υπολογιστεί το τμήμα π της σειράς κ σε σχέση με τα βασικά μεγέθη της κατασκευής, δηλαδή το ύψος h, την απόσταση d και το μήκος α του τμήματος της πρώτης σειράς.

Αν υποθέσουμε ότι η παράλληλη κ περνά από το σημείο Ε, τότε $\frac{\pi}{\alpha}=\frac{h-\beta_\kappa}{h}$, όπου η ποσότητα β_κ είναι ίση με $\frac{\kappa.\alpha.h}{d+\kappa.\alpha}$. Από τη σχέση αυτή προκύπτει $\pi_\kappa=\alpha.(1-\frac{\alpha\kappa}{\alpha\kappa+d})$.
Εδώ είναι σημαντικό να κάνουμε το εξής σχόλιο: Ο τύπος που δίνει το π_κ δεν περιέχει την ποσότητα h. Αυτό σημαίνει ότι το μήκος των τμημάτων της σειράς κ είναι αφενός σταθερό και αφετέρου δεν εξαρτάται από το ύψος h.

2.5.3. Διδακτική προσέγγιση του σεναρίου

Μια διδακτική θεωρία

Η γνώση και η κατανόηση μιας κατάστασης δεν είναι ταυτόσημες έννοιες. «Μπορεί να γνωρίζω κάτι χωρίς να το έχω κατανοήσει, δηλαδή χωρίς να μπορώ να το χρησιμοποιήσω». (Gerace 1992)

Μια μαθησιακή διαδικασία, στην οποία ο διδάσκων έχει τον πρώτο ρόλο, δεν αποκλείεται να παρέχει στους μαθητές γνώσεις που τους είναι απαραίτητες για την επιτυχία τους στο πλαίσιο των μαθητικών τους υποχρεώσεων, εκείνο όμως που δεν είναι εξασφαλισμένο είναι η δυνατότητα εφαρμογής τους έξω από το χώρο αυτό. Η δυνατότητα, λοιπόν, εφαρμογής προϋποθέτει κατανόηση, δηλαδή δημιουργία πολλών και στιβαρών συνδέσεων μεταξύ των εννοιών, τις οποίες ο μαθητής γνωρίζει. Το πλήθος και η ποιότητα των συνδέσεων στο δίκτυο, το οποίο διαθέτει ο μαθητής, φαίνεται να συνιστούν ένα μέτρο για το βαθμό κατανόησης (Hiebert και Carpenter, 1992). Η κατανόηση διευρύνεται συνεχώς, καθώς αναπτύσσεται το δίκτυο και όσο οι σύνδεσμοι γίνονται ισχυρότεροι, για το λόγο αυτό δεν είναι δυνατό να θεωρούμε ότι μία έννοια κατανοείται ή δεν κατανοείται, αλλά ότι η κατανόηση της έννοιας είναι ισχυρή ή όχι, ότι το επίπεδο κατανόησης είναι υψηλό ή χαμηλό.

Σε ένα ενέργημα κατανόησης μπορούμε να διακρίνουμε από τη μια τη μαθηματική έννοια που πρόκειται να κατανοηθεί (target) και από την άλλη την πηγή ή τη βάση της κατανόησης (source) (Sierpinska, 1994). Η βάση της κατανόησης συγκροτείται από τα προϋπάρχοντα σχήματα, νοητικά μοντέλα, από τις εγκατεστημένες μαθηματικές έννοιες και γενικά από αυτό που συνήθως αποκαλούμε προϋπάρχουσες γνώσεις. Το υποκείμενο επιχειρεί προβολές (mappings) από τη βάση προς το στόχο, με αποτέλεσμα ο τελευταίος να αντλεί νόημα από τον ιδιαίτερο τρόπο με τον οποίο η συγκεκριμένη προβολή εγκαθιστά συνδέσεις μεταξύ των δύο χώρων.

Αρκετοί συγγραφείς (Lakoff and Núñez, 1997· Chiu, 2000) διακρίνουν δύο κατηγορίες προβολών, αυτές στις οποίες η πηγή είναι η διαισθητική και άτυπη γνώση του υποκειμένου και αυτές στις οποίες η πηγή είναι η τυπική γνώση. Στην πρώτη περίπτωση η κατανόηση χαρακτηρίζεται ως θεμελιώδης (grounded), ενώ στη δεύτερη ως σύνδεση (linking). Ο διαχωρισμός αυτός παραπέμπει στη διάκριση μεταξύ οριζόντιας και κατακόρυφης μαθηματικοποίησης και εδώ θα μπορούσαμε να συσχετίσουμε τη διαδικασία της μαθηματικοποίησης με εκείνη της κατανόησης, αφού και στις δύο οι γνωστικές διεργασίες είναι όμοιες. Συνοψίζοντας, θα μπορούσαμε να εκτιμήσουμε τη μαθηματική κατανόηση, ή καλύτερα το επίπεδο κατανόησης μιας μαθηματικής έννοιας, μέσω του πλήθους και της ποιότητας των συνδέσεών της στο εννοιολογικό δίκτυο του μαθητή. Η βιωσιμότητα των συνδέσμων, όμως, εξαρτάται από τον τρόπο που έχουν δημιουργηθεί και κυρίως από το αν προέρχονται από την προσωπική εμπειρία και δράση του μαθητή ή από τις πληροφορίες που έχει αποκομίσει από το διδάσκοντα. Η παραπάνω θέση οδηγεί στην ανάγκη δημιουργίας ενός μαθησιακού περιβάλλοντος που να προσομοιάζει περισσότερο σε ένα εργαστήριο έρευνας και διαπραγμάτευσης, παρά σε ένα ακροατήριο του διδάσκοντος.

Διδακτική διαδικασία στη σχολική τάξη

Ο διδάσκων

Όταν η δραστηριότητα υλοποιείται στο σχολικό περιβάλλον, ο διδάσκων έχει ένα σύνθετο ρόλο, καθώς καλείται να συνδυάσει τη συμπεριφορά του συν-ερευνητή και συμβούλου σε θέματα που σχετίζονται τόσο με τις τεχνικές ιδιαιτερότητες του περιβάλλοντος όσο και με το γνωστικό αντικείμενο. Στην αρχή της δραστηριότητας θα δημιουργήσει κίνητρα για περαιτέρω συζήτηση και διερεύνηση, θέτοντας ένα πρόβλημα που σχετίζεται με τις ιδιαιτερότητες της όρασής μας. Οι περιορισμοί που μας επιβάλλει η όρασή μας θα μπορούσαν να θεωρηθούν ως αφετηρία για τη μελέτη της οπτικής μας αντίληψης.

Κατά τη διάρκεια της δραστηριότητας ο διδάσκων επικοινωνεί με κάθε ομάδα και παρακολουθεί την εξέλιξή της, προτείνοντας, αν αυτό είναι απαραίτητο, στους μαθητές να διαπραγματευτούν πάνω σε κάποια νέα ιδέα.

Ο συντονισμός των ομάδων θα μπορούσε να γίνει κάθε φορά που ο διδάσκων καλεί την τάξη να συζητήσει ένα θέμα που παρουσιάζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον ή το εύρημα κάποιας ομάδας που ίσως να φανεί χρήσιμο και στις υπόλοιπες.

Στόχος σε όλες τις φάσεις της δραστηριότητας είναι η προώθηση μιας ερευνητικής στάσης των μαθητών, τους οποίους ο διδάσκων προτρέπει να πειραματιστούν, ώστε να επιβεβαιώσουν ή να απορρίψουν τις εικασίες που κάνουν, καθώς αλληλεπιδρούν με το μαθησιακό περιβάλλον. Το πλαίσιο αυτό καθαρίζει τον τρόπο με τον οποίο ο καθηγητής επικοινωνεί με την τάξη.

Καταρχήν *αποφεύγει να υποδείξει* ως σωστό κάτι που οι μαθητές έχουν τη δυνατότητα να ελέγξουν μόνοι τους και προτιμά να τους προτρέψει να το διαπραγματευτούν. *Επιτρέπει* στους μαθητές να αναπτύξουν την επιχειρηματολογία τους, ακόμη και αν αυτή δεν είναι μαθηματικά έγκυρη. *Κατευθύνει* τους μαθητές όχι προς μια συγκεκριμένη απάντηση, αλλά προς μια πολλαπλότητα προσεγγίσεων, οι οποίες γίνονται αποδεκτές ή απορρίπτονται από τους ίδιους τους μαθητές έπειτα από μια διαπραγμάτευση στην οποία συμμετέχει και ο ίδιος ισότιμα.

Οι μαθητές

Μέσα στην τάξη οι μαθητές λειτουργούν σε τρία επίπεδα: στο ατομικό, στο επίπεδο της μικρής ομάδας και στο επίπεδο της τάξης. Στο ατομικό επίπεδο ο μαθητής επικοινωνεί με τον άλλο ή με τους άλλους μαθητές της μικρής ομάδας, διατηρώντας το δικαίωμά του να εκφράζει τις προσωπικές του απόψεις και τις αντιρρήσεις.

Στο επίπεδο της μικρής ομάδας, τα μέλη της συνεργάζονται, ενώ, συγχρόνως, αναλαμβάνουν συγκεκριμένες υποχρεώσεις σχετικά με την εργασία που καλείται να ολοκληρώσει η ομάδα τους. Για παράδειγμα, ένα μέλος θα μπορούσε να αναλάβει τη συλλογή πληροφοριών και εικόνων από το διαδίκτυο σε σχέση με ορισμένους πίνακες, ενώ ένα άλλο μέλος θα αναζητήσει πληροφορίες στη σχολική βιβλιοθήκη.

Τέλος, σε επίπεδο τάξης, οι μαθητές αποτελούν μια ερευνητική κοινότητα, τα μέλη της οποίας επικοινωνούν κάθε φορά που ολοκληρώνεται ή έχει προχωρήσει η διαπραγμάτευση σε επίπεδο ομάδας.

Οι μαθητές εργάζονται είτε στο φυσικό τους χώρο κατ' ιδίαν, είτε στο εργαστήριο υπολογιστών, και είναι χωρισμένοι σε ομάδες. Κάθε ομάδα διαθέτει έναν υπολογιστή, ένα τετράδιο και ένα φύλλο εργασίας κοινό για όλα τα μέλη της.

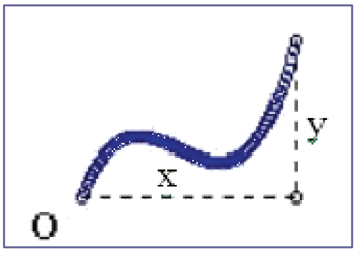
Τα υπολογιστικά εργαλεία

Η χρήση ενός δυναμικού γεωμετρικού λογισμικού θα μπορούσε να δημιουργήσει πολλές ευκαιρίες για διερεύνηση των μαθηματικών που σχετίζονται με την οπτική μας αντίληψη και κατ' επέκταση με το μοντέλο του Alberti. Συγκεκριμένα, η κατασκευή ενός μοντέλου με τη χρήση στατικών αναπαραστασιακών μέσων, όπως είναι το μολύβι και χαρτί, δεν επιτρέπει τη μελέτη των ιδιοτήτων του, την αποδόμηση και την ανασύνθεσή του. Αντιθέτως, στην περίπτωση ενός γεωμετρικού λογισμικού, ο χρήστης έχει τη δυνατότητα

να εκτελέσει πειράματα, να αποδομήσει το μοντέλο και να μελετήσει την κατασκευή του, να προσαρμόσει το μοντέλο πάνω σε ένα έργο τέχνης, δηλαδή να το μετατρέψει σε ένα δυναμικό εργαλείο για τη μελέτη έργων τέχνης, τα οποία είναι κατασκευασμένα με τις αρχές της προοπτικής.
Στην παρούσα δραστηριότητα η δυναμική αναπαράσταση του μοντέλου του Alberti δίνει την ευκαιρία στο μαθητή να διερευνήσει όχι απλά μια γεωμετρική αναπαράστασή του, αλλά μια όσο το δυνατόν πιο ρεαλιστική προσομοίωσή του.

Εδώ θα πρέπει να σημειωθεί ότι στους μαθητές προτείνεται μία μέθοδος διερεύνησης σχέσεων, η οποία μπορεί να υλοποιηθεί μόνο σε ένα δυναμικό περιβάλλον. Πρόκειται για τη μέθοδο του **δυναμικού σημείου**. Η βασική ιδέα της είναι η εξής:

Ας υποθέσουμε ότι διαθέτουμε ένα σημείο O το οποίο θεωρούμε ως το σημείο εκκίνησης οποιασδήποτε διαδρομής. Ας υποθέσουμε ακόμη ότι ο μόνος δυνατός μετασχηματισμός τον οποίο μπορούμε να εφαρμόσουμε στο O είναι η οριζόντια και κατακόρυφη μεταφορά. Σε αυτή την περίπτωση θα χαρακτηρίσουμε το επίπεδό μας καρτεσιανό, οπότε αν διαθέτουμε μια εξίσωση της μορφής $y=f(x)$(1), τότε η μεταβλητή x θα εκφράζει την οριζόντια και η y την κατακόρυφη μετακίνηση.
Αν τώρα μεταβάλλουμε με συνεχή τρόπο τις τιμές του x και επιβάλλουμε στο σημείο O να γράφει το ίχνος του, τότε το ίχνος αυτό θα διαγράψει μια καμπύλη.



Η καμπύλη αυτή (διπλανή εικόνα) είναι η καρτεσιανή γραφική αναπαράσταση της σχέσης (1).

2.5.4 Σχέδιο εκπαιδευτικών δραστηριοτήτων

Ορίζοντας την έννοια «σενάριο»
Ως σενάριο θα μπορούσε να οριστεί μία δομημένη, πλήρης και εφαρμόσιμη διδακτική πρόταση. Συνήθως το σενάριο έχει τη μορφή κειμένου.
Ο προσδιορισμός «δομημένη» αναφέρεται στη μορφή του σεναρίου, η οποία είναι σαφής, διακρίνεται σε θεματικές ενότητες (παραγράφους) και στηρίζεται σε ένα μοντέλο που αποτελεί τη βάση της συγγραφής και άλλων σεναρίων. Ο προσδιορισμός «πλήρης» αναφέρεται στο σύνολο των πτυχών της μαθησιακής διαδικασίας που θα πρέπει να αναδείξει το σενάριο, οι οποίες πτυχές θα πρέπει να καλύπτουν τόσο τα παιδαγωγικά όσο και τα γνωστικά και τα καθαρά μαθηματικά θέματα τα οποία πραγματεύεται το συγκεκριμένο σενάριο. Τέλος, ο όρος «εφαρμόσιμο» προσδιορίζει το πλαίσιο λειτουργίας και εφαρμογής του σεναρίου σε πραγματικές συνθήκες.

Το σενάριο αρθρώνεται πάνω σε ένα σύνολο δραστηριοτήτων που κλιμακώνονται σταδιακά και οδηγούν το μαθητή στην ολοκλήρωση μιας πορείας, την οποία έχει προσεκτικά σχεδιάσει ο δημιουργός του σεναρίου.
Σε κάθε φάση της δραστηριότητας υπάρχουν φύλλα εργασίας για τους μαθητές. Τα φύλλα αυτά περιέχουν ερωτήσεις που προκαλούν διαπραγμάτευση με βάση τα εργαλεία με τα οποία είναι εξοπλισμένο το περιβάλλον.

Ένταξη του σεναρίου στο Αναλυτικό Πρόγραμμα
Το σενάριο απευθύνεται στους μαθητές της Γ΄ Γυμνασίου και εντάσσεται στην ύλη του κεφαλαίου της γεωμετρίας και των συναρτήσεων. Υπάρχει, ωστόσο, δυνατότητα υλοποίησης στη Β΄ Γυμνασίου, στο αντίστοιχο κεφάλαιο, οπότε ο διδάσκων έχει τη δυνατότητα να τροποποιήσει ή και να αφαιρέσει ερωτήματα, μετατρέποντας τη δραστηριότητα σε λιγότερο απαιτητική.
Η υλοποίηση του σεναρίου καλό θα είναι να πραγματοποιηθεί στο τέλος του κεφαλαίου, όταν πλέον οι μαθητές έχουν αποκτήσει τις απαραίτητες μαθηματικές γνώσεις-εργαλεία που σχετίζονται με τις γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων. Η ενδεικτική διάρκεια υλοποίησής του είναι 10 περίπου ώρες και εξελίσσεται κλιμακούμενη από την απλή παρατήρηση προς τη μελέτη και διερεύνηση συσχετίσεων μεταξύ μεταβαλλόμενων μεγεθών.

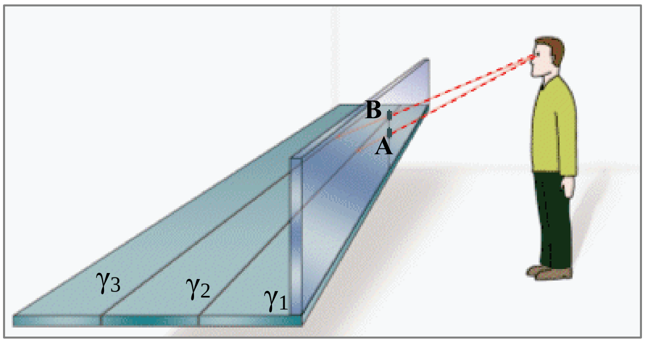
Προαπαιτούμενα για την υλοποίηση του σεναρίου
- Οι μαθητές γνωρίζουν ότι τα ανάλογα ποσά έχουν ως χαρακτηριστικό την ευθεία διάταξη σημείων στο καρτεσιανό επίπεδο. Επιπλέο,ν τα αντιστρόφως ανάλογα ποσά έχουν γραφικές παραστάσεις καμπύλες που κατευθύνονται ασυμπτωτικά προς τους άξονες.

- Επίσης γνωρίζουν τις βασικές λειτουργικότητες ενός δυναμικού γεωμετρικού λογισμικού (π.χ. *The Geometer's Sketchpad*) και ενός λογισμικού διερεύνησης συναρτήσεων (*Function Probe*). Έμφαση θα πρέπει να δοθεί στην κατασκευή και μέτρηση τμημάτων, καθώς και στην αποστολή σημείων από τον πίνακα στο γράφημα και στο δυναμικό μετασχηματισμό ενός γραφήματος.
- Οι μαθητές εργάζονται ανά ζεύγη ή τριάδες στο εργαστήριο υπολογιστών του σχολείου τους, στους οποίους έχουν εγκατασταθεί τα δύο λογισμικά. Κάθε ομάδα διαθέτει και ένα τετράδιο σημειώσεων.
- Έχει προηγηθεί μία δραστηριότητα κατά την οποία οι μαθητές έχουν κατασκευάσει με το γεωμετρικό λογισμικό το μοντέλο του Alberti. Εάν ο διδάσκων επιχειρήσει να υλοποιήσει τη δραστηριότητα αυτόνομα, χωρίς να έχει διεξαχθεί προηγουμένως μία άλλη, τότε θα πρέπει να ετοιμάσει ο ίδιος ένα αρχείο με το μοντέλο του Alberti και πριν από τη δραστηριότητα να γίνει μία σύντομη ενημέρωση των μαθητών για τη σημασία και την ιστορική προέλευση του μοντέλου προοπτικής του συγκεκριμένου καλλιτέχνη.

1η Δραστηριότητα: ΟΙ ΟΠΤΙΚΕΣ ΑΚΤΙΝΕΣ

Διάρκεια της δραστηριότητας: 3 διδακτικές ώρες.

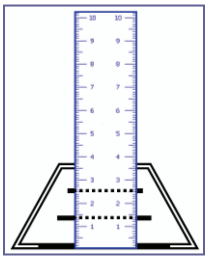
Η κατάσταση προβλήματος:
Ο διδάσκων επιχειρεί να κινητοποιήσει στους μαθητές, μέσα από την εκτέλεση ενός απλού πειράματος και θέτοντας προς διαπραγμάτευση το παρακάτω ερώτημα:



Σε πόση απόσταση από την πρώτη οπή Α πρέπει να τοποθετήσουμε μία δεύτερη οπή Β, ώστε ο άνθρωπος στην εικόνα να μπορεί να βλέπει από τις οπές τις γραμμές γ_2 και γ_3. Η γραμμή γ_3 απέχει από τη γ_2 όσο απέχει η γ_2 από τη γ_1.

Φύλλο εργασίας

1. Κάντε ένα πείραμα. Κρατήστε κατακόρυφα πάνω στο θρανίο σας ένα διαφανή (πλαστικό) χάρακα.



   Τοποθετήστε σε ίσες αποστάσεις κάποια αντικείμενα (π.χ. στυλό). Σημειώστε πάνω στο χάρακα τις αποστάσεις στις οποίες φαίνεται ότι βρίσκονται τα αντικείμενα αυτά. Επαναλάβετε το πείραμα με περισσότερα αντικείμενα αυτή φορά. Τι σχέση έχουν οι «φαινόμενες» αποστάσεις πάνω στο χάρακα;

2. Ας υποθέσουμε ότι ο άνθρωπος στην εικόνα (κατάσταση προβλήματος) βρίσκεται μπροστά σε ένα μικρό αδιαφανές τοιχίο, πίσω από το οποίο υπάρχουν παράλληλες προς αυτό γραμμές, σε ίσες αποστάσεις μεταξύ τους. Το τοιχίο διαθέτει δυο οπές Α και Β, από όπου ο άνθρωπος μπορεί να παρατηρεί δύο γραμμές. Αν η πρώτη οπή απέχει από τη βάση του τοιχίου 40 εκ., πόσο θα πρέπει να απέχει η δεύτερη;

3. Κατασκευάστε ένα γεωμετρικό σχήμα που να αναπαριστά την κατάσταση που περιγράφει το πρόβλημα.

4. Εξετάστε από ποια μεγέθη εξαρτάται η λύση του συγκεκριμένου προβλήματος.

5. Κάντε μία εκτίμηση για την απόσταση των οπών με βάση το σχήμα και αιτιολογήστε την.

6. Με τη βοήθεια των γεωμετρικών σας οργάνων ελέγξτε αν η εκτίμησή σας αυτή ήταν σωστή ή όχι.

7. Ανοίξτε το αρχείο Alberti_1. Αναγνωρίστε στο σχήμα που προβάλλεται στην οθόνη τα διάφορα στοιχεία του προβλήματος. Ελέγξτε τα σταθερά και μεταβλητά μεγέθη, σύροντας τα σημεία Μ, Β, Σ. Είναι η προσομοίωση αυτή όμοια με την αρχική κατάσταση του προβλήματος;

8. Με τη βοήθεια του λογισμικού μετρήστε τα μεγέθη που πρόκειται να διερευνήσετε. Καταγράψτε τις μετρήσεις σας.

9. Μεταβάλετε ένα προς ένα τα μεταβλητά μεγέθη και μελετήστε τις μετρήσεις που προβάλλονται στην οθόνη.
10. Μελετήστε στο καρτεσιανό επίπεδο τη σχέση των μεταβαλλόμενων μεγεθών με τη μέθοδο του **δυναμικού σημείου**.

11. Διατυπώστε κανόνες σχετικούς με τους τρόπους που μεταβάλλονται τα μεγέθη που μελετάτε.

Αναμενόμενη πορεία

Καλό θα είναι ο διδάσκων να διακρίνει τις βασικές φάσεις της δραστηριότητας, οπότε θα κάνει καλύτερη κατανομή του χρόνου.

Η πρώτη φάση θα μπορούσε να χαρακτηριστεί ως διαισθητική, κατά την οποία οι μαθητές διατυπώνουν τις αυθόρμητες απόψεις τους για τα αποτελέσματα του πειράματος και τη λύση του αρχικού προβλήματος, κατασκευάζουν ένα γεωμετρικό στατικό μοντέλο και κάνουν μία πρόχειρη εκτίμηση των όσων είχαν υποθέσει.

Στη δεύτερη φάση οι μαθητές μελετούν μία δυναμική προσομοίωση της κατάστασης, χρησιμοποιώντας τα εργαλεία που τους παρέχει το λογισμικό. Η φάση αυτή θα ολοκληρωθεί με μαθηματικές διατυπώσεις των σημαντικών παρατηρήσεων που έχουν κάνει οι μαθητές.

Αν ο διδάσκων επιθυμεί να ολοκληρώσει τη δραστηριότητα, όσον αφορά στη μαθηματική της αυστηρότητα, μπορεί να διαπραγματευτεί με τους μαθητές μία απόδειξη των όσων ανέδειξε το λογισμικό μέσω των μετρήσεων. Η φάση αυτή θα μπορούσε να χαρακτηριστεί ως φάση της επικύρωσης. Η αναμενόμενη διδακτική πορεία μπορεί συνοπτικά να περιγραφεί από την ακόλουθη σειρά δράσεων:

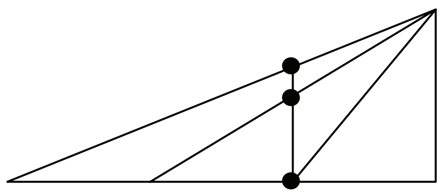
- Στην αρχή οι μαθητές εκτελούν ένα απλό πείραμα με το διαφανή χάρακα. Στόχος του πειράματος είναι οι μαθητές να συμπεράνουν ότι οι φαινόμενες αποστάσεις αντικειμένων που βρίσκονται στο οριζόντιο επίπεδο δεν είναι ανάλογες με τις πραγματικές.

- Στη συνέχεια οι μαθητές διαπραγματεύονται στο τετράδιό τους τη δεύτερη δραστηριότητα, επιχειρώντας να δημιουργήσουν ένα γεωμετρικό μοντέλο της κατάστασης προβλήματος.

- Η συζήτηση θα περιστραφεί γύρω από την αυθόρμητη εκτίμηση των μαθητών ότι η απόσταση του Α από το Β θα πρέπει να είναι ίση με την απόσταση του Α από τη βάση, αφού οι αποστάσεις των γραμμών γ_1, γ_2, γ_3 είναι ίσες.

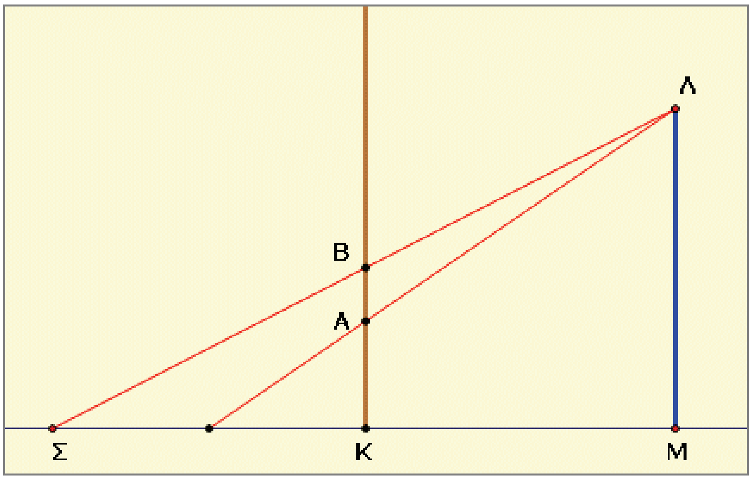
- Ο διδάσκων τους προτρέπει να ελέγξουν την υπόθεση αυτή μέσα από το γεωμετρικό μοντέλο και διαπραγματεύεται με τους μαθητές τον τρόπο κατασκευής και τα γεωμετρικά σχήματα που είναι απαραίτητα.

- Ένα αναμενόμενο σχήμα θα μπορούσε να είναι το παρακάτω:



- Ο διδάσκων ζητά από τους μαθητές να περιγράψουν και αν είναι δυνατόν να τεκμηριώσουν τις εικασίες που θα κάνουν για τη σχέση των αποστάσεων των σημείων, χωρίς ο ίδιος να απορρίψει ή να επιβεβαιώσει κάποια από αυτές. Εδώ θα ήταν χρήσιμο οι μαθητές να συνδυάσουν τα συμπεράσματά τους από το πείραμα και από τις δραστηριότητες 2-6.

- Οι μαθητές ανοίγουν το αρχείο Alberti_1 της προσομοίωσης και μεταβάλλουν τα μεγέθη ΛΜ και ΚΜ, που αντιστοιχούν στο ύψος του ανθρώπου και στην απόστασή του από το τοιχίο, χωρίς μετρήσεις, μελετώντας οπτικά τις μεταβολές των τμημάτων.



- Με τη βοήθεια του λογισμικού μετρούν τα μήκη ΚΑ και ΑΒ και μεταβάλλουν τα μεγέθη ΛΜ και ΜΚ, που αντιστοιχούν στο ύψος του ανθρώπου και στην απόστασή του από το τοιχίο. Χωρίς να χρησιμοποιήσουν μετρήσεις, μελετούν οπτικά τις μεταβολές των τμημάτων.

- Προσπαθούν να εντοπίσουν κανόνες συμμεταβολής και αλληλεξάρτησης των δύο μεγεθών, όταν μεταβάλλεται το ύψος ΜΛ, η απόσταση ΜΚ και η ΚΡ, και να διατυπώσουν κανόνες σχετικά με τη μεταβολή των δύο αυτών μεγεθών. Επικεντρώνονται κυρίως στο λόγο των τμημάτων αυτών και με τη βοήθεια της αριθμομηχανής εμφανίζουν στην οθόνη τη μέτρηση του λόγου.

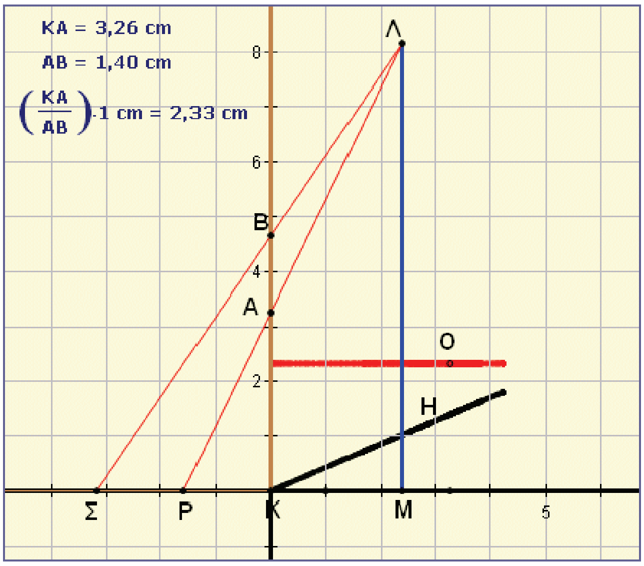
- Διακρίνουν περιπτώσεις για το πότε ο λόγος αυτός μεταβάλλεται, όταν μεταβάλλονται τα ΜΛ, ΚΡ και ΜΚ, πότε παραμένει σταθερός και πότε τείνει να πάρει την τιμή 1.

- Στη δέκατη δραστηριότητα οι μαθητές εμφανίζουν το καρτεσιανό σύστημα αξόνων που διαθέτει το λογισμικό. Θα ήταν χρήσιμο να ορίσουν ως αρχή το σημείο Κ που βρίσκεται πάνω στην κατακόρυφη. Ο διδάσκων συζητά μαζί τους για τη μέθοδο του δυναμικού σημείου που περιγράφεται στο βιβλίο των μαθητών. Εδώ θα πρέπει να αναδειχτεί η σημασία της κίνησης του σημείου που προκύπτει και στην κατεύθυνση αυτή θα ήταν χρήσιμο να ερωτηθούν οι μαθητές τι σημασία μπορεί να έχει η κίνηση αυτή πάνω σε μία ευθεία που περνά από την αρχή των αξόνων. Ο τελικός στόχος είναι να μετασχηματιστεί η μέθοδος του δυναμικού σημείου σε ένα εργαλείο διερεύνησης σχέσεων δύο ποσών, για τα οποία διαθέτουμε συνεχείς μετρήσεις, καθώς μεταβάλλονται.

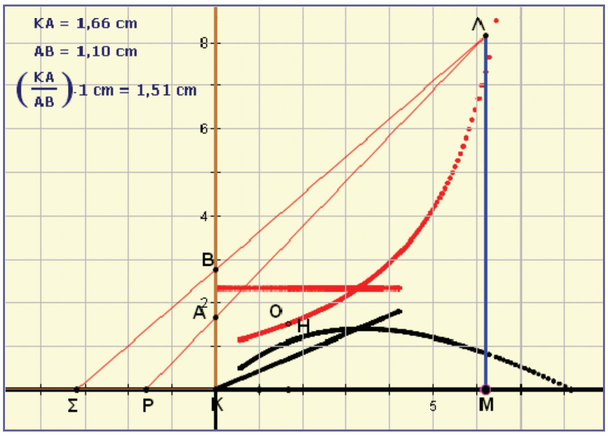
  Στη συνέχεια μεταφέρουν το Κ οριζόντια κατά το τμήμα ΚΑ, οπότε προκύπτει το σημείο Κ΄. Έπειτα μεταφέρουν κατακόρυφα το σημείο Κ΄ κατά το τμήμα ΑΒ, οπότε προκύπτει το σημείο Η στο οποίο θα εμφανίσουν το ίχνος του.

  Επιπλέον θα μπορούσε να ζητήσει από τους μαθητές να μεταφέρουν το σημείο Κ΄ κατακόρυφα όσο είναι και ο λόγος των τμημάτων ΚΑ/ΑΒ εκφρασμένος σε εκατοστά, οπότε θα προκύψει το σημείο Ο, του οποίου θα εμφανίσουν το ίχνος του.

  Μόλις μεταβληθεί το ΜΛ, τα σημεία Η και Ο θα γράψουν από μία γραμμή. Οι γραμμές αυτές θα αποτελέσουν αντικείμενο διαπραγμάτευσης για τους μαθητές, προκειμένου να εξηγήσουν τη συμμεταβολή των τμημάτων κάθε φορά που μεταβάλλεται η συγκεκριμένη παράμετρος ΜΛ της προσομοίωσης.



Εδώ οι μαθητές έχουν πλέον πολλαπλές και συγχρόνως δυναμικές αναπαραστάσεις της γραμμικότητας της σχέσης των δύο τμημάτων, όταν μεταβάλλεται το ύψος. Αν, τώρα, μεταβάλλουν μία άλλη παράμετρο, π.χ. την απόσταση ΜΚ του παρατηρητή από το τοιχίο, τότε οι γραφικές παραστάσεις θα μετασχηματιστούν σε καμπύλες οι οποίες και πάλι θα αποτελέσουν αντικείμενο διαπραγμάτευσης.



- Αν ο διδάσκων το κρίνει εφικτό, μπορεί να ζητήσει από τους μαθητές να αποδείξουν ένα σημαντικό εύρημα, ότι δηλαδή ο λόγος των δύο αποστάσεων δεν επηρεάζεται από το ύψος ΜΛ του παρατηρητή. Η απόδειξη περιγράφεται στην παράγραφο του μαθηματικού περιεχομένου του σεναρίου. Συγκεκριμένα, τα όμοια ορθογώνια τρίγωνα ΑΡΚ, ΛΡΜ και ΒΣΚ, ΛΣΜ επιτρέπουν τον υπολογισμό του τμήματος ΚΑ και στη συνέχεια του ΚΒ, άρα και του ΑΒ. Ο λόγος των δύο τμημάτων είναι απαλλαγμένος από το τμήμα ΜΛ.

2η Δραστηριότητα: Η ΜΕΛΕΤΗ ΤΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ ΤΟΥ ALBERTI

Διάρκεια της δραστηριότητας: 3 διδακτικές ώρες

Η δραστηριότητα αυτή διακρίνεται σε δύο επιμέρους φάσεις. Στην πρώτη φάση οι μαθητές θα μελετήσουν τα ιστορικά στοιχεία και θα συλλέξουν πληροφορίες για τον τρόπο με τον οποίο ο Alberti προτείνει την κατασκευή ενός προοπτικού δαπέδου. Στη δεύτερη φάση θα μελετήσουν μία δυναμική προσομοίωση, ένα δυναμικό μοντέλο της προοπτικής κάλυψης δαπέδου που πρότεινε ο Alberti.
Στόχος είναι οι μαθητές να αναγνωρίσουν τα βασικά στοιχεία του υλοποιημένου μοντέλου και να συγκροτήσουν τα μαθηματικά που σχετίζονται με το μοντέλο αυτό.

Φύλλο εργασίας

1) Μελετήστε το κείμενο όπου περιγράφεται ο τρόπος με τον οποίο ο Alberti προτείνει την κατασκευή ενός προοπτικού δαπέδου.

2) Με τη βοήθεια του μοντέλου κατασκευάστε στο τετράδιό σας ένα προοπτικό δάπεδο.

3) Ανοίξτε το αρχείο Alberti_2 της προσομοίωσης του μοντέλου του Alberti. Μελετήστε την προσομοίωση και προσδιορίστε τα σημαντικά στοιχεία της, δηλαδή το σημείο φυγής, το ύψος του παρατηρητή, την απόσταση του παρατηρητή από τον πίνακα, το μέγεθος του παραθύρου κ.λπ.

4) Μελετήστε τη σχέση των τμημάτων που βρίσκονται στην ίδια παράλληλη ευθεία. Τι παρατηρείτε;

5) Εξετάστε αν το μοντέλο είναι κατάλληλο, δηλαδή αν η διαγώνιος του δαπέδου περνά από όλα τα διαγώνια σημεία του δαπέδου.

6) Μελετήστε τα μήκη των κατακόρυφων τμημάτων β1, β2, β3 κ.λπ. και ελέγξτε αν υπάρχει κάποια σχέση που τα συνδέει. Επίσης εντοπίστε από ποια μεγέθη εξαρτάται το μήκος τους.

7) Με τη βοήθεια του λογισμικού διερεύνησης συναρτήσεων κάντε τη γραφική παράσταση των μετρήσεων των τμημάτων. Τι προτείνετε να περιέχουν οι δύο στήλες χ, ψ του πίνακα τιμών;

8) Μεταβάλετε το ύψος h και επαναλάβετε την κατασκευή της γραφικής παράστασης για τις νέες πλέον μετρήσεις. Τι παρατηρείτε;

9) Κατασκευάστε στην προέκταση του δαπέδου και άλλα ίσα τμήματα. Υπολογίστε τα αντίστοιχα τμήματα β10, β11 κ.λπ. και επαναλάβετε τη γραφική παράσταση. Τι παρατηρείτε;

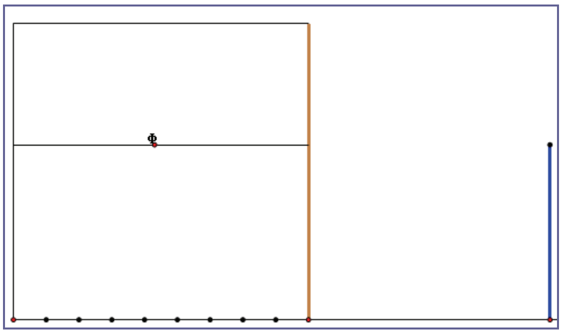
10) Μελετήστε τον τρόπο με τον οποίο αυξάνεται το μήκος των τμημάτων β1, β2 κ.λπ. με τη βοήθεια της μεθόδου του δυναμικού σημείου. Σε τι διαφέρει και σε τι είναι όμοιο το αποτέλεσμα της μελέτης σας αυτής από τη μελέτη που κάνατε με το λογισμικό διερεύνησης συναρτήσεων;

Αναμενόμενη πορεία

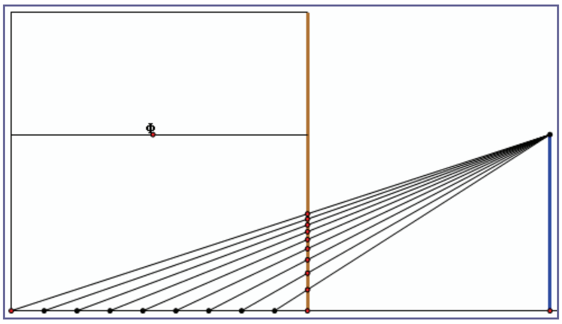
Καλό θα είναι ο διδάσκων να διακρίνει τις βασικές φάσεις τις δραστηριότητας, οπότε θα κάνει καλύτερη κατανομή του χρόνου.
Η πρώτη φάση θα μπορούσε να χαρακτηριστεί ως ενημερωτική, κατά την οποία οι μαθητές μελετούν και σχολιάζουν την τεχνική της κατασκευής του μοντέλου από τον Alberti. Η δεύτερη φάση περιλαμβάνει τη μελέτη της δυναμικής αναπαράστασης του μοντέλου, με στόχο να εντοπίσουν οι μαθητές τις μαθηματικές σχέσεις μεταξύ των τμημάτων του.

- Στην αρχή οι μαθητές μελετούν και διαπραγματεύονται το κείμενο το οποίο περιγράφει τη «νόμιμη κατασκευή» που προτείνει ο Alberti. Ο διδάσκων τους επισημαίνει ότι στην ουσία ο Alberti επιχειρεί με τις παράλληλες να μεταφέρει τους λόγους από την κατακόρυφη πλευρά του παραθύρου μέσα στο προοπτικό επίπεδο. Στη συνέχεια οι μαθητές επιχειρούν με τα γεωμετρικά τους όργανα να κατασκευάσουν σταδιακά το μοντέλο.Συγκεκριμένα:

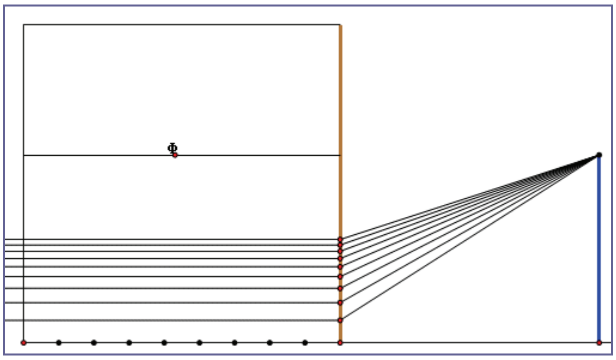
- Δημιουργούν το «παράθυρο», δηλαδή ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, όπου διακρίνεται η γραμμή του ορίζοντα και το σημείο φυγής Φ. Στο ύψος της γραμμής του ορίζοντα και σε απόσταση από το παράθυρο κατασκευάζουν ένα τμήμα που παριστάνει τον παρατηρητή. Τέλος χωρίζουν τη βάση του «παραθύρου» σε ίσα τμήματα.



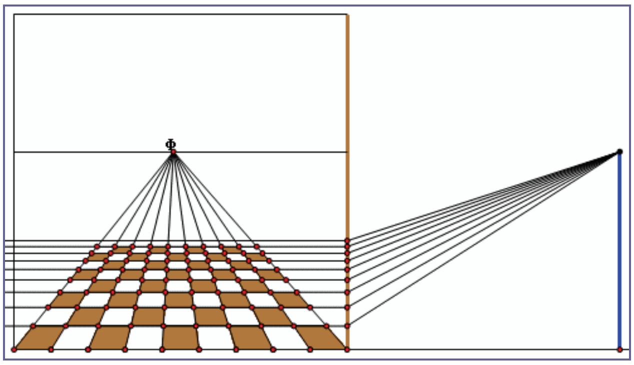
- Κατασκευάζουν τις οπτικές ακτίνες από τον παρατηρητή προς το πάτωμα.



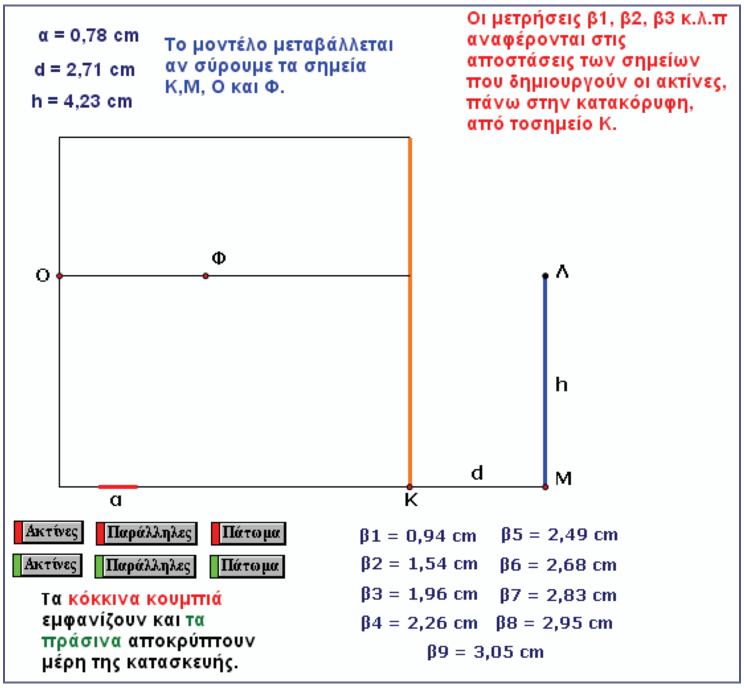
- Φέρουν παράλληλες από τα σημεία τομής των ακτίνων με την κατακόρυφη.



- Συνδέουν με ευθύγραμμα τμήματα το σημείο φυγής με τα σημεία που χωρίζουν τη βάση. Τα τμήματα αυτά τέμνουν τις παράλληλες και ορίζουν την προοπτική κάλυψη του δαπέδου.



- Μόλις ολοκληρωθεί η κατασκευή, οι μαθητές ανοίγουν το αρχείο Alberti_2 και μελετούν τις πληροφορίες που εμφανίζονται στην οθόνη.



- Με τη βοήθεια των κουμπιών εμφανίζουν ή αποκρύπτουν τα μέρη της κατασκευής. Αναγνωρίζουν την ομοιότητα του μοντέλου με εκείνο που κατασκεύασαν οι ίδιοι στο τετράδιό τους.

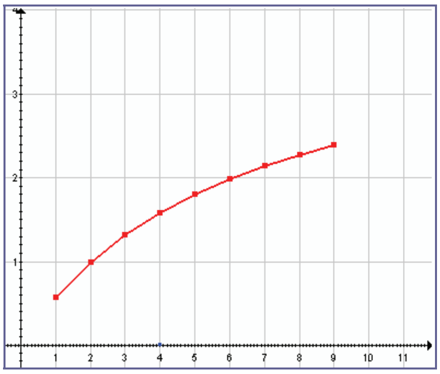
- Μεταβάλουν τα διάφορα τμήματα και αποστάσεις και παρατηρούν τον τρόπο με τον οποίο μεταβάλλονται οι μετρήσεις των τμημάτων.

- Μετρούν τα τμήματα που βρίσκονται στην ίδια ευθεία και διαπιστώνουν ότι είναι ίσα, δηλαδή ότι κάθε παράλληλη είναι χωρισμένη σε ίσα τμήματα.

- Φέρουν τη διαγώνιο του δαπέδου και διαπιστώνουν ότι περνά από όλα τα διαγώνια σημεία.

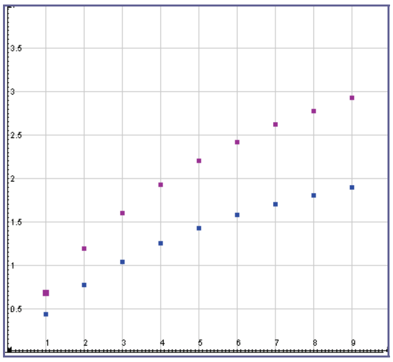
- Μελετούν τις μετρήσεις των τμημάτων β1, β2, β3 κ.λπ. Ωστόσο, εδώ δεν είναι δυνατόν να εντοπίσουν κάποια φανερή σχέση, οπότε ο διδάσκων προτείνει να χρησιμοποιήσουν το λογισμικό διερεύνησης συναρτήσεων.

- Οι μαθητές, προκειμένου να δημιουργήσουν ζεύγη αριθμών, συμπληρώνουν την πρώτη στήλη με τον αύξοντα αριθμό του τμήματος και τη δεύτερη στήλη με το μήκος του τμήματος. Αποστέλλουν τα ζεύγη στο γράφημα, οπότε προκύπτει μία διάταξη σημείων που παραπέμπει σε συναρτησιακή σχέση.



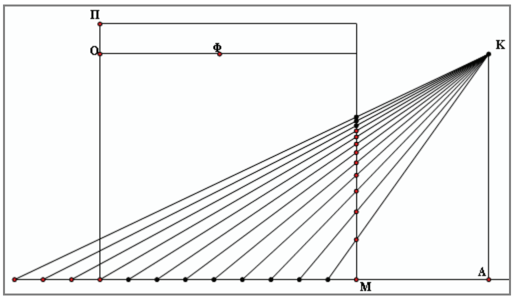
- Ο διδάσκων συζητά με τους μαθητές για τη συνάρτηση η οποία θα μπορούσε να έχει τη συγκεκριμένη γραφική παράσταση. Οι μαθητές επιχειρούν να ερμηνεύσουν τη διάταξη των σημείων, καθώς το ύψος τους αυξάνεται, αλλά με ρυθμό που συνεχώς φθίνει. Ένα από τα θέματα που θα επισημανθούν είναι και το γεγονός ότι η σχέση δεν είναι γραμμική, δηλαδή τα τμήματα δεν μεταβάλλονται με τον ίδιο τρόπο.

- Οι μαθητές θα μεταβάλουν το ύψος h και θα επαναλάβουν τη διερεύνηση με το λογισμικό συναρτήσεων. Θα παρατηρήσουν τη θέση των νέων σημείων και θα επιχειρήσουν να δικαιολογήσουν το αποτέλεσμα.



Εδώ ο διδάσκων θα μπορούσε να προτρέψει τους μαθητές να μελετήσουν επιπλέον συσχετίσεις, π.χ. τον τρόπο με τον οποίο μεταβάλλεται η διαφορά των αποστάσεων των αντίστοιχων σημείων.

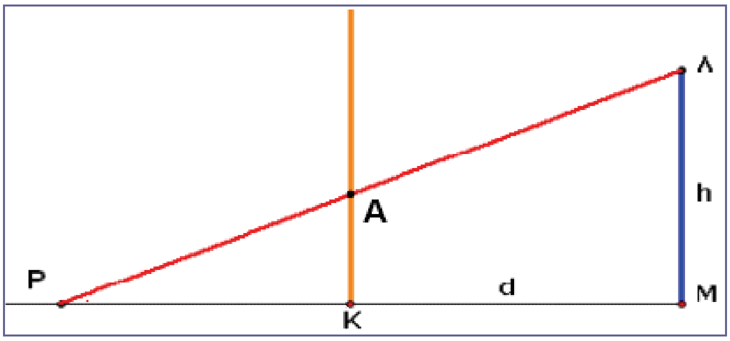
- Στην ένατη άσκηση οι μαθητές θα αυξήσουν με κάποιον τρόπο τον αριθμό των τμημάτων, για παράδειγμα, θα προσθέσουν δύο ή τρία ίσα οριζόντια τμήματα, οπότε θα προκύψουν δύο ή τρία επιπλέον κατακόρυφα τμήματα.



Μία άλλη λύση είναι η πύκνωση των τμημάτων που βρίσκονται στη βάση του πλαισίου, οπότε θα δημιουργηθούν τα μέσα των ίσων οριζόντιων τμημάτων. Με τον τρόπο αυτό διπλασιάζεται ο αριθμός των οριζόντιων ίσων τμημάτων, ενώ συγχρόνως διπλασιάζεται και ο αριθμός των κατακόρυφων τμημάτων. Ο διδάσκων θα διαπραγματευτεί με τους μαθητές τη σημασία της μελέτης των αποστάσεων αυτών. Στόχος της διαπραγμάτευσης αυτής είναι να συνδεθεί η ακολουθία των αποστάσεων με τον τρόπο με τον οποίο μεταβάλλεται η αντίληψη που έχουμε για τις αποστάσεις των παραλλήλων πάνω στο δάπεδο. Συνεπώς, η γραφική παράσταση των αποστάσεων αυτών αναπαριστά, κατά μία έννοια, την οπτική μας αντίληψη.

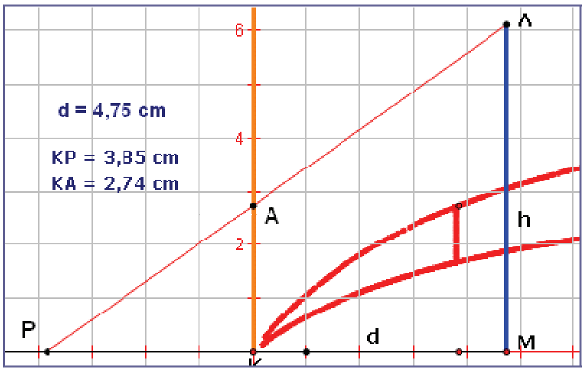
- Στην τελευταία άσκηση ο διδάσκων διαπραγματεύεται με τους μαθητές την κατασκευή μίας απλής προσομοίωσης της κατάστασης του προβλήματος. Ένα απλοποιημένο μοντέλο θα μπορούσε να κατασκευαστεί ως εξής:
  α) Απαλείφουμε τα τμήματα της κατασκευής και διατηρούμε μόνο το μεταβαλλόμενο ύψος ΜΛ και την κατακόρυφη που περνά από το Κ.

  β) Κατασκευάζουμε ένα ελεύθερο σημείο Ρ πάνω στην οριζόντια και το ενώνουμε με το Λ. Κατασκευάζουμε το σημείο τομής Α.



γ) Ορίζουμε ως αρχή των αξόνων το σημείο Κ και εμφανίζουμε τους άξονες.

δ) Μετράμε τις αποστάσεις ΚΡ και ΚΑ και μεταφέρουμε το σημείο Κ οριζόντια κατά ΚΡ και κατακόρυφα κατά ΚΑ. Ορίζουμε εμφάνιση ίχνους για το τελικό σημείο.



Αλλάζοντας τις τιμές του ύψους ΜΛ, το τελικό σημείο γράφει διαφορετικές καμπύλες, τις οποίες οι μαθητές θα συγκρίνουν με τη διάταξη των σημείων στο λογισμικό διερεύνησης συναρτήσεων.

Αυτό που είναι διδακτικά χρήσιμο να αναδειχτεί από τη διαπραγμάτευση που θα ακολουθήσει είναι η διαφορά μεταξύ του διακριτού και του συνεχούς. Η συνεχής πύκνωση των σημείων στην άσκηση 9 θα μπορούσε πλέον να θεωρηθεί ως μία διαδικασία που οδηγεί από το διακριτό στο συνεχές. Αυτό που επίσης μπορεί να αναδειχθεί είναι ότι οι αναπαραστάσεις ενός φαινομένου εξαρτώνται από τα αναπαραστασιακά μέσα-εργαλεία που διαθέτουμε.

Στο τέλος ο διδάσκων ζητά από τους μαθητές να συντάξουν μία περιγραφή της πορείας και των συμπερασμάτων τους.

3η Δραστηριότητα: ΜΕΛΕΤΗ ΕΡΓΩΝ ΤΕΧΝΗΣ

Στην τρίτη δραστηριότητα οι μαθητές θα χρησιμοποιήσουν το δυναμικό μοντέλο που έχουν ήδη ερευνήσει, προκειμένου να μελετήσουν τους πίνακες ζωγραφικής που κατασκεύασαν με βάση το μοντέλο του Alberti.
Στόχος είναι οι μαθητές να χρησιμοποιήσουν την προσομοίωση ως ένα δημιουργικό εργαλείο με το οποίο θα μπορούν να μελετήσουν τις προθέσεις ενός καλλιτέχνη, όπως το σημείο φυγής, το ύψος και την απόσταση παρατήρησης του έργου του.
Θα αξιοποιηθεί η δυνατότητα του λογισμικού η οποία επιτρέπει στο χρήστη να εισάγει εικόνες στο αρχείο που επεξεργάζεται και να τις τοποθετεί κατά βούληση σε οποιοδήποτε σημείο.

Διάρκεια της δραστηριότητας: 2 διδακτικές ώρες

Η κατάσταση προβλήματος:
Ο διδάσκων επιχειρεί να θέσει τους μαθητές σε κινητοποίηση, θέτοντας προς διαπραγμάτευση το παρακάτω ερώτημα:
Υπάρχουν καλλιτέχνες της Αναγέννησης οι οποίοι χρησιμοποίησαν το μοντέλο του Alberti για την κατασκευή του προοπτικού τους δαπέδου. Πώς μπορούμε, με τη βοήθεια του δυναμικού μοντέλου, να εντοπίσουμε το σημείο φυγής, τη σχετική απόσταση του παρατηρητή από τον πίνακα και γενικά τον τρόπο με τον οποίο ο καλλιτέχνης δημιούργησε το χώρο μέσα στον πίνακα;

Φύλλο εργασίας

1) Επισκεφθείτε επιλεγμένες διευθύνσεις στο διαδίκτυο (Olga's Gallery και Web Gallery of Art[12]):
   Για παράδειγμα, στην http://www.abcgallery.com/E/eyck/eyck.html μπορείτε να εντοπίσετε πίνακες στους οποίους ο καλλιτέχνης έχει χρησιμοποιήσει τις αρχές της προοπτικής με ένα σημείο φυγής.

   Αν έχετε διάθεση να ερευνήσετε περισσότερους καλλιτέχνες, μπορείτε να επισκεφθείτε τη διεύθυνση: http://www.abcgallery.com/movemind.html#Renaissance και να επιλέξετε ονόματα καλλιτεχνών, όπως ο Raphael.

   Σχολιάστε τα έργα που έχουν δημιουργηθεί με πρόθεση την προοπτική απεικόνιση, χωρίς όμως κάποιο μοντέλο: http://www.abcgallery.com/I/italy/crivelli2.html.

   Επισκεφτείτε τη διεύθυνση: http://www.wga.hu/frames-e.html?/html/p/piero/francesc/girolamo.html. Στη συνέχεια, από το γράμμα U των επιλογών, ανοίξτε τις εικόνες που έχει κατασκευάσει ο Uccello. Συγκεκριμένα, ανοίξτε τις εικόνες με τίτλο: Miracle of the Desecrated Host (predella paintings) και αποθηκεύστε την πρώτη από αυτές.

2) Εισάγετε σε ένα αρχείο word την εικόνα που αποθηκεύσατε και αυξήστε τη φωτεινότητά της. Στη συνέχεια κάντε αντιγραφή της εικόνας αυτής. Ορίστε ένα σημείο Π πάνω στην αριστερή κατακόρυφη πλευρά του «παραθύρου» στο μοντέλο του Albert. Κάντε δεξί κλικ στην οθόνη και επιλέξτε επικόλληση.

3) Προσαρμόστε το προοπτικό δάπεδο του μοντέλου πάνω στην εικόνα. Ερευνήστε τη θέση του σημείου φυγής της εικόνας. Εκτιμήστε το ύψος της γυναίκας που φαίνεται στην εικόνα και στη συνέχεια το βάθος και το ύψος του δωματίου.

4) Απαλείψτε την εικόνα του πίνακα και εισάγετε μία άλλη η οποία δεν διαθέτει σαφές δάπεδο. Βρείτε τα στοιχεία του πίνακα στην περίπτωση αυτή.

[12] Όλες οι διευθύνσεις είναι ενεργές τον 4/2008.

Αναμενόμενη πορεία:

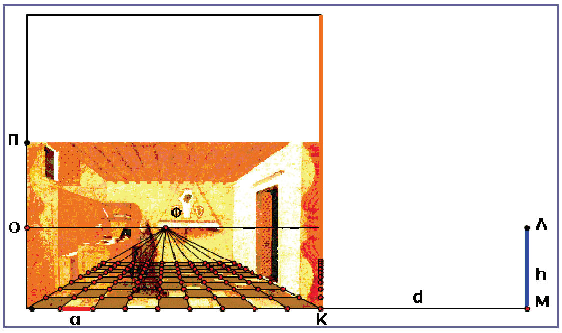
- Η δραστηριότητα είναι σχεδιασμένη με στόχο την όσο το δυνατόν μεγαλύτερη αυτονομία, την εκδήλωση πρωτοβουλιών και τη δημιουργία κινητοποίησης για τους μαθητές.

- Οι μαθητές αναζητούν εικόνες στις επιλεγμένες διευθύνσεις, ενώ μπορούν και μέσα από μηχανές αναζήτησης να επισκεφθούν σχετικούς δικτυακούς τόπους. Η απλή αναζήτηση, η διαπραγμάτευση της καταλληλότητας των διαφόρων πινάκων ζωγραφικής, η διάκριση της ύπαρξης προοπτικών τεχνασμάτων ή όχι στους πίνακες, αποτελούν έμμεσο στόχο, αφού φέρνουν το μαθητή σε επαφή με σημαντικά έργα τέχνης.

- Όσον αφορά στη δεύτερη ερώτηση, καλό θα είναι ο διδάσκων να έχει ήδη υλοποιήσει τη δραστηριότητα, ώστε να έχει αντιμετωπίσει τυχόν τεχνικά προβλήματα. Το σημαντικότερο είναι η ποιότητα των εικόνων και το γεγονός ότι θα πρέπει να γίνουν αρκετές τροποποιήσεις στη φωτεινότητά τους, ώστε να είναι ευδιάκριτες μέσα στο αρχείο του λογισμικού.

- Ένας τρόπος για να εντοπίσουν οι μαθητές εύκολα πολλές συγκεντρωμένες ελεύθερες εικόνες είναι να επισκεφθούν τη διεύθυνση: http://commons.wikimedia.org/wiki/Main_Page της γνωστής ελεύθερης εγκυκλοπαίδειας Wikipedia και στη θεματική ενότητα «Τέχνη» να αναζητήσουν εικόνες αναγεννησιακής ζωγραφικής.

- Όταν πλέον οι μαθητές έχουν προσαρμόσει την εικόνα του πίνακα του Uccelo στο παράθυρο του μοντέλου, τότε μεταβάλουν τα τρία βασικά μεγέθη (h, d, a) και αποφασίζουν πότε το μοντέλο έχει προσαρμοστεί στο παράθυρο.



- Η αναζήτηση της θέσης του σημείου φυγής θα γίνει, λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι αυτό βρίσκεται στη γραμμή του ορίζοντα, άρα στο ύψος των ματιών του παρατηρητή, και ίσως και των σημαντικών προσώπων που απεικονίζονται στον πίνακα.

- Στο θέμα της μονάδας μέτρησης οι μαθητές έχουν τη δυνατότητα να επιλέξουν τα εκατοστά των μετρήσεων και να λάβουν υπ' όψιν ότι ο Alberti είχε καθορίσει το ύψος του ανθρώπου ίσο με 3 braccio, δηλαδή με 3 πλακάκια.

- Για το βάθος και το ύψος του δωματίου οι μαθητές μπορούν να μετρήσουν αποστάσεις σημείων με τη βοήθεια του λογισμικού και στη συνέχεια να κάνουν αναγωγή στις μονάδες που έχουν χρησιμοποιήσει από την αρχή.

- Είναι σημαντικό να τονιστεί από το διδάσκοντα ότι τα μοντέλα αποτελούν προσεγγίσεις του κόσμου που μας περιβάλλει και ότι στην πραγματικότητα ένα μοντέλο είναι μία απλοποιημένη εκδοχή του κόσμου αυτού. Τέλος, ως εξίσου σημαντικό, θα πρέπει να επισημάνει και το γεγονός ότι τα μοντέλα δίνουν στον κόσμο δομή και επομένως μπορούμε με αυτά να ανακατασκευάσουμε τον κόσμο και να τον καταλάβουμε καλύτερα.

4η Δραστηριότητα: Ο ΠΡΟΟΠΤΙΚΟΣ ΧΩΡΟΣ

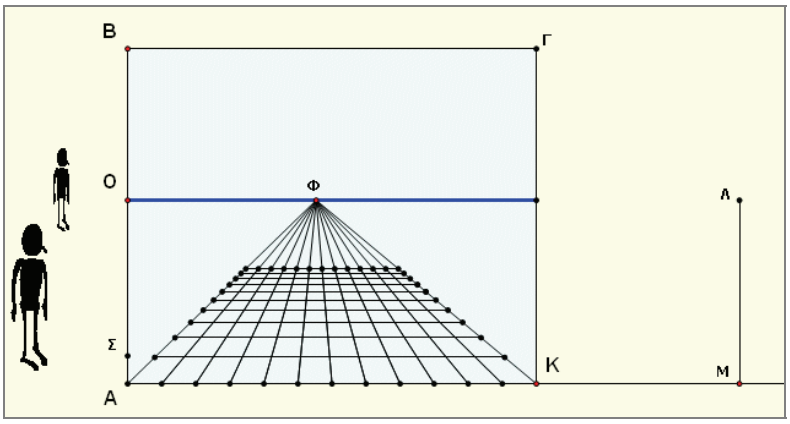
Στην τέταρτη δραστηριότητα οι μαθητές θα κατασκευάσουν, με βάση το μοντέλο του Alberti, ένα προοπτικό δωμάτιο, δηλαδή το εσωτερικό ενός προοπτικού κύβου.
Εδώ η βασική ιδέα στηρίζεται στο γεγονός ότι με βάση το προοπτικό δάπεδο και τις κατάλληλες παράλληλες δομείται σταδιακά ένας τρισδιάστατος χώρος ο οποίος διαθέτει το ίδιο σημείο φυγής, όπως και το δάπεδο.
Βασικός στόχος της δραστηριότητας αυτής είναι η επέκταση των προηγούμενων δραστηριοτήτων και η σταδιακή σύνθεση του προοπτικού περιβάλλοντος, η οποία ξεκίνησε από την πρώτη δραστηριότητα. Επιπλέον, οι μαθητές θα χρησιμοποιήσουν αναλογίες, για να εκτιμήσουν είτε τη σωστή τοποθέτηση ενός αντικειμένου μέσα στο προοπτικό δωμάτιο, είτε το φυσικό μέγεθος ενός αντικειμένου με βάση το φαινόμενο μέγεθός του.

Διάρκεια της δραστηριότητας: 2 διδακτικές ώρες

Φύλλο εργασίας

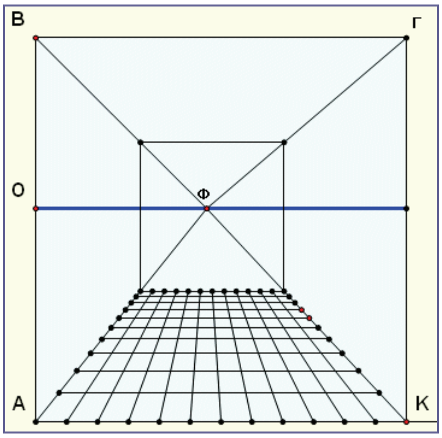
Έχετε σκεφτεί πώς μπορούμε να μετρήσουμε το πραγματικό ύψος ενός ανθρώπου, όταν διαθέτουμε μία ολόσωμη φωτογραφία του τραβηγμένη από απόσταση; Για να μπορέσουμε να πραγματοποιήσουμε μία τέτοια μέτρηση, θα πρέπει πρώτα να μελετήσουμε τις ιδιότητες αυτού που ονομάζουμε προοπτικό χώρο, δηλαδή του χώρου των πραγμάτων έτσι όπως τα αντιλαμβανόμαστε και όχι έτσι όπως είναι πραγματικά.
Σε προηγούμενες δραστηριότητες μελετήσαμε ένα μοντέλο με το οποίο μπορούμε να κατασκευάσουμε το προοπτικό επίπεδο. Αυτό που θα προσπαθήσουμε εδώ είναι η κατασκευή του προοπτικού χώρου, δηλαδή το εσωτερικό ενός δωματίου έτσι όπως φαίνεται. Μέσα σε έναν τέτοιο χώρο οι μετρήσεις θα πρέπει να ακολουθούν ορισμένους κανόνες, τους οποίους μπορούμε να εφαρμόσουμε και στην περίπτωση της φωτογραφίας.

Ανοίξτε το αρχείο Alberti_3. Στην οθόνη εμφανίζεται: το «παράθυρο» ΑΒΓΚ, το προοπτικό δάπεδο, η γραμμή του ορίζοντα με το σημείο φυγής Φ, το ύψος του παρατηρητή ΜΛ και τέλος δύο άτομα που περιμένουν την κατασκευή του δωματίου, για να τοποθετηθούν μέσα σε αυτό. Τα άτομα αυτά καλό θα είναι να μετακινούνται από τα σημεία που βρίσκονται στο επάνω αριστερό τους μέρος.

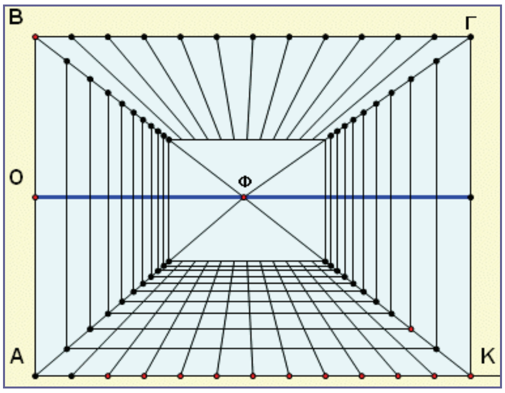


Από εδώ αρχίζει η σταδιακή κατασκευή του προοπτικού δωματίου.

1) Κατασκευάστε τα τμήματα που είναι απαραίτητα για τη δημιουργία του τοίχου που βρίσκεται στο βάθος του δωματίου.



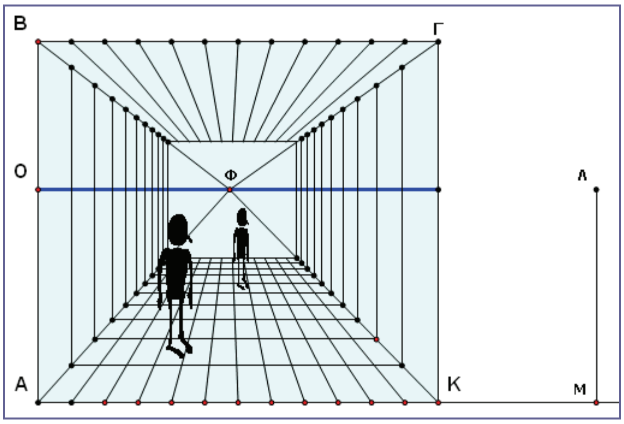
2) Φέρτε τις κατάλληλες παράλληλες ευθείες, ώστε να δημιουργηθεί το παρακάτω σχήμα.



Όπως θα παρατηρήσετε, έχει κατασκευαστεί ένα προοπτικό δωμάτιο το οποίο είναι δυναμικό, αφού μεταβάλλεται καθώς μεταβάλλουμε την απόσταση του παρατηρητή από το «παράθυρο» ή τη γραμμή του ορίζοντα.

Ας τοποθετήσουμε τώρα τους δύο ανθρώπους μέσα στο δωμάτιο αυτό.

3) Ας υποθέσουμε ότι τα ύψη των δύο ανθρώπων είναι ίσα. Ποια είναι η σωστή θέση του ανθρώπου που βρίσκεται στο βάθος του δωματίου;



4) Αν υποθέσουμε ότι το ύψος των ανθρώπων είναι 1,80 μ., πόσο θα είναι το ύψος του δωματίου;

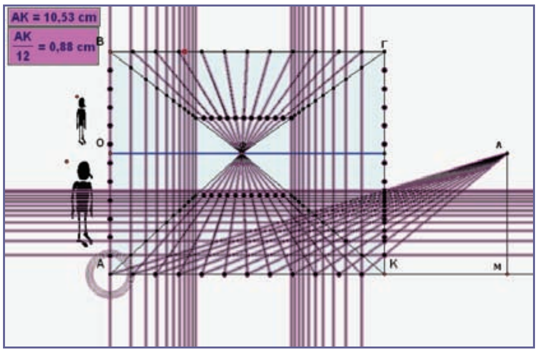
5) Μετακινήστε το σημείο Μ, δηλαδή τον παρατηρητή. Είναι απαραίτητη η διόρθωση της θέσης των δύο ανθρώπων;

6) Μεταβάλετε το ύψος της γραμμής του ορίζοντα. Πώς πρέπει να αλλάξει η θέση των δύο ανθρώπων;

Αναμενόμενη πορεία

Ο διδάσκων έχει δύο δυνατότητες: αφενός να εμπλέξει τους μαθητές στη διαδικασία κατασκευής του προοπτικού χώρου και αφετέρου να χρησιμοποιήσει το έτοιμο αρχείο του χώρου και να προχωρήσει στις επιμέρους δραστηριότητες.

Η πρώτη επιλογή δίνει στους μαθητές την ευκαιρία να δημιουργήσουν βήμα προς βήμα τον προοπτικό χώρο, με βάση τις δυνατότητες του λογισμικού, και να αποκτήσουν μία σαφή αντίληψη της δομής του.
Η δεύτερη επιλογή τους δίνει την ευκαιρία να υλοποιήσουν δραστηριότητες εξίσου δημιουργικές. Συγκεκριμένα μπορούν να χρησιμοποιήσουν το ήδη κατασκευασμένο αρχείο (Alberti complete), να ζητήσουν από το λογισμικό την αποκάλυψη των αντικειμένων που έχουν υποστεί απόκρυψη, να μελετήσουν τις επιλογές του κατασκευαστεί και να ερμηνεύσουν τη σημασία των διαφόρων βοηθητικών γεωμετρικών κατασκευών, όπως είναι οι κάθετες, οι κύκλοι, οι μετρήσεις, οι πράξεις κ.λπ.



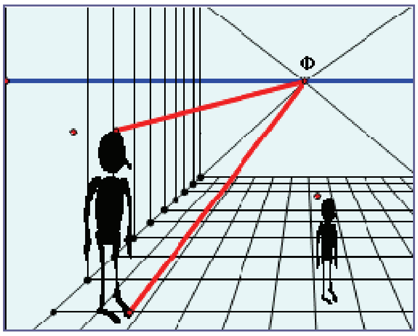
- Εφόσον ο διδάσκων επιλέξει την κατασκευή του χώρου, στη συνέχεια καλεί τους μαθητές να μεταβάλλουν τα διάφορα μεγέθη της βασικής κατασκευής που παρουσιάζεται αρχικά στο αρχείο. Στόχος είναι οι μαθητές να αναγνωρίσουν τις βασικές έννοιες του μοντέλου του Alberti, όπως το «παράθυρο», το ύψος του παρατηρητή, η γραμμή του ορίζοντα και το σημείο φυγής από το οποίο ξεκινούν οι κάθετες.

- Στην πρώτη άσκηση οι μαθητές αναγνωρίζουν στην εικόνα του φύλλου εργασίας την πίσω πλευρά του δωματίου και τον τρόπο με τον οποίο είναι κατασκευασμένη. Συγκεκριμένα, κατασκευάζουν τα τμήματα ΦΒ και ΦΓ και φέρουν από τα ακραία σημεία του δαπέδου κατακόρυφες. Οι κατακόρυφες αυτές τέμνουν τα τμήματα ΦΒ και ΦΓ σε σημεία που θα αποτελέσουν τη βάση της κατασκευής ορθογωνίων παραλληλογράμμων.

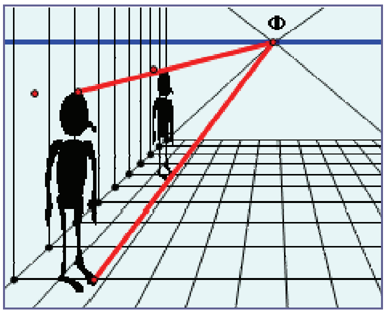
- Στην επόμενη κατασκευή οι μαθητές φέρνουν παράλληλες από όλα τα σημεία που περιβάλλουν το δάπεδο. Τα σημεία τομής των παραλλήλων αυτών θα χρησιμοποιηθούν για την κατασκευή των υπόλοιπων τμημάτων του χώρου.

- Όταν έχει πλέον δημιουργηθεί ο προοπτικός χώρος αρχίζει η διαπραγμάτευση για την ανάγκη κατάλληλης τοποθέτησης των δύο ανθρώπων, ώστε να ενσωματωθούν στο χώρο με βάση τους κανόνες της προοπτικής. Αυτό σημαίνει ότι ο διδάσκων θα πρέπει να επισημάνει στους μαθητές ότι προέχει η διατήρηση των λόγων μεταξύ των μεγεθών. Στο σημείο αυτό οι μαθητές μπορούν να τοποθετήσουν αυθαίρετα τους δύο ανθρώπους και στη συνέχεια να εξετάσουν αν η τοποθέτησή τους ήταν σωστή.

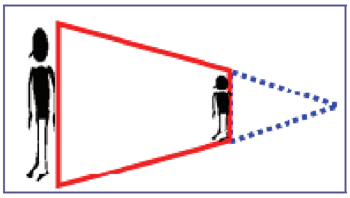
- Ένας τρόπος εξέτασης της ορθότητας μιας τοποθέτησης είναι και ο εξής:
  Οι μαθητές φέρουν ένα τμήμα με ένα άκρο πάνω στον άνθρωπο και ως άλλο άκρο θεωρούν το σημείο φυγής και ένα τμήμα που ενώνει το σημείο φυγής με το κάτω μέρος του ανθρώπου.



Στη συνέχεια τοποθετείται ο δεύτερος άνθρωπος κατά τρόπο που να προσαρμόζεται στις πλευρές της γωνίας του δημιουργείται.



Η επιλογή αυτή μπορεί να γίνει από τους μαθητές με τη βοήθεια συγχρόνως του διδάσκοντα, ο οποίος επισημαίνει την ύπαρξη νοητών ισοσκελών τριγώνων στο χώρο και την ανάγκη τα τρίγωνα αυτά να είναι όμοια. Οι μαθητές έχουν τη δυνατότητα να διαπραγματευτούν στο τετράδιό τους ένα σχήμα που θα αναπαριστά τα νοητά ισοσκελή τρίγωνα.



Στη συνέχεια μπορούν να πραγματοποιήσουν μετρήσεις και υπολογισμούς με τη βοήθεια του λογισμικού.

- Στο τέλος της δραστηριότητας ο διδάσκων διαπραγματεύεται με τους μαθητές τη σημασία της δημιουργίας ενός δυναμικού χώρου. Στόχος εδώ είναι να προκύψει το συμπέρασμα ότι οι δυνατότητες του υπολογιστή μας επιτρέπουν να υλοποιούμε με δυναμικό τρόπο μοντέλα άλλων εποχών. Η δυνατότητα αυτή να δημιουργούμε εικονικά περιβάλλοντα προσδιορίζει την αντίληψή μας για την πραγματικότητα, αφού πλέον μπορούμε να τη μετασχηματίσουμε κατά βούληση, ακόμη και να την παραμορφώσουμε.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΕΣ ΑΝΑΦΟΡΕΣ

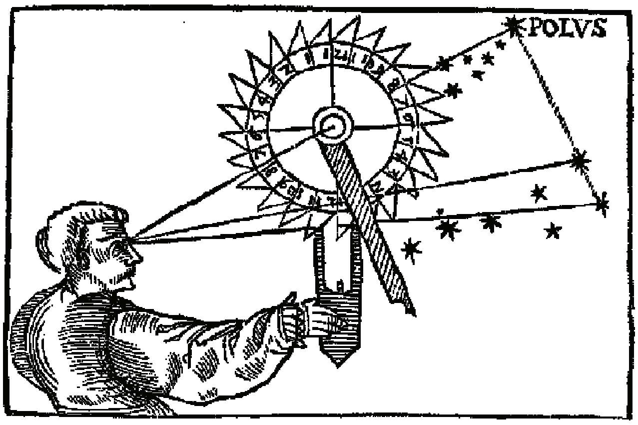
1. Chiu, M. M. (2000), *Metaphorical reasoning: Origins, uses, development and interactions in mathematics*, *Education Journal*, 28, 1, 13-46
2. Gerace J. William (1992), *Proceedings of the Workshop on Research in Science and Mathematics Education*, 25-44, Pietermaritzburg, South Africa: Teeanem Printers (Pty) Ltd. (1992) D. Grayson (Ed.)
3. Hiebert-Carpenter (1992), "Learning and teaching with understanding" in D. Grouws (Ed.), NMTC, Handbook of ''Research in teaching and learning Mathematics''
4. Lakoff, G. & Nunez, R. (2000), *Where Mathematics Comes From: How the Embodied Mind Brings Mathematics into Being*, Basic Books, New York
5. Schoenfeld, Alan H. (1985), *Mathematical problem solving.* Orlando, FL: Academic Press Sfard, A. (1997), *The many faces of mathematics: Do mathematicians and researchers in mathematics education speak about the same thing?* in A. Sierpinska & J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics education as a research domain: A search for identity*, Vol. 2, 491-512, Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic
6. Sierpinska A(1994), *Understanding in Mathematics*, The Falmer Press
7. Treffers, A. (1987), *Three dimensions. A model of goal and theory description in mathematics education: The Wiskobas project*, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΕΣ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ ΓΙΑ ΤΟ ΛΥΚΕΙΟ

3.1 Θεματική ενότητα: Μετρήσεις μέσω ακτίνων (οπτικών – φωτός)

Η βασική ιδέα του σεναρίου

Οι δραστηριότητες που ακολουθούν εντάσσονται σε ένα γενικότερο πλαίσιο στο οποίο προσομοιώσεις πραγματικών καταστάσεων και εργαλείων δίνουν την ευκαιρία στο μαθητή του λυκείου να προσεγγίσει μια σειρά μαθηματικών εννοιών. Οι έννοιες αυτές έχουν άμεση σχέση με τις οπτικές ακτίνες ή τις ακτίνες φωτός, οι οποίες, σε συνδυασμό με απλά εργαλεία, ή και ανεξάρτητα από αυτά, αποτελούν την κεντρική έννοια γύρω από την οποία δομείται το περιβάλλον των προσομοιώσεων. Η δεύτερη κεντρική έννοια για ορισμένες δραστηριότητες είναι εκείνη της οπτικής γωνίας θέασης ενός αντικειμένου. Η οπτική γωνία έχει κορυφή τον οφθαλμό του παρατηρητή και δημιουργείται από τις ακραίες οπτικές ακτίνες που καταλήγουν στο παρατηρούμενο αντικείμενο. Η κατασκευή των πρώτων εργαλείων μέτρησης αποστάσεων βασίστηκε στις οπτικές γωνίες και στις οπτικές μας ακτίνες και, χωρίς υπερβολή, ορισμένες μαθηματικές έννοιες αναπτύχθηκαν για την αξιοποίηση των εργαλείων αυτών.



Η εικόνα προέρχεται από το άρθρο «Οι χρήσεις της ιστορίας στη διδασκαλία της επιστήμης» του Γκούντρουν Βόλφσμιντ και τον 4/2008 η ηλεκτρονική της διεύθυνση στον κόμβο του Πανεπιστημίου του Αμβούργου είναι: http://www.math.uni-hamburg.de/spag/ign/xyz/ca00-v5.htm

Αν θα έπρεπε να προσδιορίσουμε τις μαθηματικές περιοχές που κατ' εξοχήν αναπτύχθηκαν για τις ανάγκες των μετρήσεων, θα αναφέραμε την ομοιότητα των σχημάτων και την τριγωνομετρία.
Με βάση τα προηγούμενα θα μπορούσαμε να υποθέσουμε ότι δραστηριότητες βασισμένες σε προσομοιώσεις μετρήσεων ή οργάνων μετρήσεων είναι δυνατόν να υποστηρίξουν τη διδασκαλία των μαθηματικών εννοιών που σχετίζονται με τις μετρήσεις.

Παιδαγωγικό πλαίσιο

Μία από τις δυνατές διδακτικές, και όχι μόνο, προσεγγίσεις των μαθηματικών είναι και εκείνη που θεωρεί τις μαθηματικές έννοιες και προτάσεις ως αφηρημένα μοντέλα των αντικειμένων και των καταστάσεων του φυσικού μας χώρου. Η προσέγγιση αυτή έχει ιδιαίτερη διδακτική σημασία, όταν οι μαθητές εμπλέκονται σε διαδικασίες επιλύσης προβλήματος. Τα προβλήματα που αφορούν σε αυθεντικές πραγματικές καταστάσεις, δηλαδή σε καταστάσεις σχετικές με την εμπειρία και τα ενδιαφέροντα των μαθητών, αποτελούν την αφετηρία της διδασκαλίας στο πλαίσιο μιας ρεαλιστικής μαθηματικής εκπαίδευσης, η οποία στο εξής θα αναφέρεται ως **RME** (Realistic Mathematics Education).

Οι ρίζες της RME ανάγονται στις απόψεις του Freudenthal (1991), από τις οποίες τρεις είναι οι καθοριστικές για τις δραστηριότητες του σεναρίου:

- Τα μαθηματικά θα πρέπει να είναι συνδεδεμένα με πραγματικές καταστάσεις.
- Τα μαθηματικά αποτελούν μία ανθρώπινη δραστηριότητα η οποία συνίσταται στην αναδιοργάνωση των γνώσεων που ήδη υπάρχουν και των σχημάτων. Η αναδιοργάνωση αυτή έχει συνήθως την έννοια της μαθηματικοποίησης.
- Κεντρικό ρόλο στη μαθησιακή διαδικασία έχει ο μαθητής με τις προσδοκίες του, τις ιδιαιτερότητές του, τα πιστεύω του.

Σε αυτό το πλαίσιο αρχών, η διδασκαλία των μαθηματικών αναδεικνύεται σε καθοδηγούμενη ανακάλυψη από τους μαθητές, ενώ η λύση προβλήματος αποτελεί το κατεξοχήν διδακτικό εργαλείο.

Με βάση τις παραπάνω επιστημολογικές θεωρήσεις θα μπορούσαμε να προσεγγίσουμε τα μαθηματικά και το περιεχόμενό τους ως ανθρώπινη δραστηριότητα, ενταγμένη στο κοινωνικό και πολιτισμικό πλαίσιο. Η δραστηριότητα αυτή έχει ως αφετηρία άτυπα αξιώματα και εικασίες που δημιουργούνται με βάση τη σωματικότητά μας, ενώ η διαδρομή προς την αυστηρή, τυπική έκφραση έχει την ίδια αξία με το τελικό προϊόν. Τα μαθηματικά δεν ανακαλύπτονται πλέον, αλλά επινοούνται ή, μάλλον, προκύπτουν ως αποτελέσματα επινοήσεων κυρίως, παρά ανακαλύψεων (Ernest 1996), και η αντικειμενική τους υπόσταση δομείται μέσω της διυποκειμενικής τους αποδοχής.

Οι δραστηριότητες, μέσω των οποίων επιλύεται ένα πραγματικό πρόβλημα, προσδιορίζονται από τον όρο μαθηματικοποίηση. Ως μαθηματικοποίηση ορίζουμε τη διαδικασία κατά την οποία οι μαθητές οργανώνουν τα δεδομένα ενός προβλήματος και στη συνέχεια τα επεξεργάζονται με καθαρά μαθηματικό τρόπο. Ο σχεδιασμός του παρόντος σεναρίου έχει ως στόχο να εμπλέξει τους μαθητές σε μια διαδικασία σταδιακής μαθηματικοποίησης ενός πραγματικού προβλήματος, μιας αυθεντικής κατάστασης που αφορά στην οπτική μας αντίληψη. Μέσα από τη διαδικασία αυτή αναμένεται να μετασχηματίσουν το αρχικό, μη μαθηματικό, πρόβλημα σε μαθηματικό πρόβλημα το οποίο θα οδηγήσει στη δημιουργία ενός μαθηματικού μοντέλου.
Η δημιουργία ενός μαθηματικού μοντέλου μιας πραγματικής κατάστασης έχει τη σημασία της μαθηματικής περιγραφής της κατάστασης αυτής, η οποία περιγραφή μας επιτρέπει την ερμηνεία της κατάστασης και επομένως την καλύτερη κατανόησή της. Γενικά η κατασκευή μοντέλων μιας πραγματικής κατάστασης έχει στόχο την κατανόησή της μέσα από τη διαδικασία δημιουργίας μιας κατάλληλης μαθηματικής δομής, δηλαδή οργάνωσης. Ούτως ή άλλως, δεν είναι δυνατόν να έρθουμε σε επαφή με τη φυσική πραγματικότητα, αν προηγουμένως δεν την έχουμε δομήσει με κάποιον τρόπο.

Κατά τη διαδικασία της μαθηματικοποίησης, τα μαθηματικά γίνονται μέρος του εννοιολογικού πλαισίου το οποίο χρησιμοποιούμε για να μεταφράζουμε την πραγματικότητα, ενώ, χάρη σε αυτό, η καθημερινή πραγματικότητα δομείται κατά τρόπο μαθηματικό.

Ορίζοντας την έννοια του μαθηματικού μοντέλου

Ο Fischbein (1977) ορίζει το μοντέλο μιας κατάστασης ως «μια απλοποιημένη εκδοχή της, η οποία μας επιτρέπει ευκολότερο και πληρέστερο έλεγχο των παραμέτρων της». Επιπλέον θεωρεί ότι ένα από τα βασικά χαρακτηριστικά που θα πρέπει να διαθέτει ένα μοντέλο, για να είναι αποτελεσματικό, είναι η καταλληλότητα της δομής του. Η καταλληλότητα αυτή μπορεί να εκτιμηθεί από την ισομορφία της δομής του μοντέλου προς τη δομή της αρχικής κατάστασης. Η γενική αντίληψη για τη σχέση κατάστασης προβλήματος και μοντέλου είναι ότι αποτελούν δύο ξεχωριστές οντότητες. Ο μαθητής θα πρέπει να έχει κατανοήσει τη διάκριση και να είναι σε θέση να αξιολογεί την καταλληλότητα του μοντέλου με βάση τη δεδομένη κατάσταση και τους στόχους που έχει αρχικά θέσει (Greer, 1997).

Αντιθέτως, στο πλαίσιο της RME, ένα μοντέλο είναι αποτέλεσμα μαθηματικοποίησης και προκύπτει κατά την προσπάθεια του μαθητή να δομήσει την κατάσταση στη διάρκεια δημιουργίας του μοντέλου. Αυτό σημαίνει ότι το μοντέλο αναδύεται σταδιακά και συγκροτείται μαζί με την κατάσταση προβλήματος, η οποία ερμηνεύεται με μαθηματικό τρόπο, δηλαδή μαθηματικοποιείται, μέσω της διαδικασίας κατασκευής του μοντέλου (Gravemeijer, 2002).

Η σχέση μοντέλου και πραγματικής κατάστασης είναι επομένως αμφίδρομη και κρίνουμε ότι παρουσιάζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον ο τρόπος με τον οποίο ένας μετασχηματισμός του μοντέλου μπορεί να ερμηνευτεί μέσω ενός μετασχηματισμού των παραμέτρων της κατάστασης προβλήματος. Αυτή ακριβώς η διερεύνηση είναι δυνατόν να υλοποιηθεί αποτελεσματικότερα με τη χρήση ενός κατάλληλου λογισμικού, μέσω του οποίου είναι δυνατόν να κατασκευαστεί μία προσομοίωση της κατάστασης προβλήματος.

Η χρήση υπολογιστή, εκτός από την οπτικοποίηση, επιτρέπει στο μαθητή να πειραματιστεί και να αναζητήσει ακραίες καταστάσεις του προβλήματος μέσα από μετρήσεις, συγκρίσεις, δυναμικές αλλαγές ή και παραμορφώσεις των σχημάτων (Arcavi & Hadas, 2000).

Συνοψίζοντας, θα μπορούσαμε να επισημάνουμε ότι στο πλαίσιο της RME η χρήση υπολογιστικών εργαλείων δίνει τη δυνατότητα δημιουργίας και διερεύνησης μοντέλων πραγματικών καταστάσεων, τα οποία πλέον προσεγγίζονται με δύο διαφορετικούς τρόπους, το συμβολικό και το δυναμικό.

Στο συγκεκριμένο σενάριο θεωρείται ως αφετηρία ένα ποιοτικό φαινόμενο, για παράδειγμα, η οπτική μας αντίληψη. Οι μαθητές μελετούν τρόπους με τους οποίους είχε παλαιότερα μελετηθεί το φαινόμενο αυτό και στη συνέχεια επιχειρούν μία διαφορετική μαθηματική προσέγγιση η οποία υποστηρίζεται και από τη χρήση της τεχνολογίας.

Το παιδαγωγικό πλαίσιο, στο οποίο θα υλοποιηθούν οι δραστηριότητες του σεναρίου, χαρακτηρίζεται από τη σύνθεση παλαιότερων και νεότερων μαθηματικών προσεγγίσεων ενός φαινομένου, με αυθεντικές διαδικασίες μαθηματικοποίησης.

Διδακτική αξία

Δύο από τους τέσσερις στόχους που περιγράφονται στο βιβλίο του καθηγητή για τη διδασκαλία των μαθηματικών στο λύκειο είναι οι εξής:

«Να ασκηθούν οι μαθητές στο να χρησιμοποιούν τα μαθηματικά όχι μόνο ως γνώση, αλλά και ως μέθοδο σκέψης και πράξης στην καθημερινή ζωή. Να έρθουν οι μαθητές σε επαφή με τις ποικίλες εφαρμογές των μαθηματικών στις άλλες επιστήμες και στη σύγχρονη πραγματικότητα». Επιπλέον, στις γενικές οδηγίες τονίζεται ότι: «Σε κάθε ώρα διδασκαλίας των μαθηματικών πρέπει να υπάρχει η προσωπική εργασία των μαθητών. Η τάξη πρέπει να είναι ένας τόπος όπου οι μαθητές δεν είναι παθητικοί δέκτες, αλλά θα εξερευνούν καταστάσεις, θα ανακαλύπτουν νέες γνώσεις και θα προσπαθούν να ερμηνεύουν και να χρησιμοποιούν τις γνώσεις που απέκτησαν» (*Εγχειρίδιο οδηγιών για τον διδάσκοντα*, τεύχος Β΄).

Εντούτοις, η διδασκαλία των μαθηματικών, ιδιαίτερα στο λύκειο, πραγματοποιείται σε ένα ασφυκτικό πλαίσιο υποχρεώσεων που αφορούν στην ολοκλήρωση μιας συγκεκριμένης ύλης από συγκεκριμένα βιβλία και με συγκεκριμένες οδηγίες. Η συντριπτική πλειοψηφία των ασκήσεων των σχολικών εγχειριδίων αφορούν στην αυστηρή μαθηματική επεξεργασία ενός θέματος, ενώ η ύλη είναι κατανεμημένη σε διακριτά κεφάλαια, καθένα από τα οποία πραγματεύεται μία συγκεκριμένη θεματική ενότητα. Η γεωμετρία είναι ένα ξεχωριστό γνωστικό αντικείμενο, το οποίο φαίνεται να μην έχει καμια σύνδεση με την ύλη της άλγεβρας και των συναρτήσεων. Με τον τρόπο αυτό δημιουργούνται στεγανά μεταξύ των θεματικών ενοτήτων, με συνέπεια να μην είναι εφικτές οι πολλαπλές προσεγγίσεις ενός προβλήματος και να παραμένει περιορισμένη η δυνατότητα διερεύνησης και σύνδεσης της μαθηματικής γνώσης.

Ένα άλλο εμπόδιο στην ανάπτυξη διερευνητικών πρωτοβουλιών από μεριάς μαθητών είναι και η έλλειψη κατάλληλων, δυναμικών διδακτικών εργαλείων. Τα στατικά διδακτικά μέσα (μολύβι, χαρτί, πίνακας κιμωλία) περιορίζουν τις δυνατότητες για πειραματισμό, τη δημιουργία εικασιών και τον έλεγχο υποθέσεων κατά την επεξεργασία ενός προβλήματος.

Στην αναζήτηση διεξόδου και εναλλακτικών τρόπων διδασκαλίας των μαθηματικών θα μπορούσαν να συμβάλλουν αποτελεσματικά δύο ισχυρά διδακτικά εργαλεία, η Ιστορία των Μαθηματικών και η χρήση της τεχνολογίας.

Η μελέτη της ιστορικής πορείας μιας μαθηματικής έννοιας μας βοηθά να κατανοήσουμε καλύτερα τα στάδια ανάπτυξής της, τις έννοιες που προηγήθηκαν και συνέβαλαν στη διαμόρφωσή της, καθώς και τα εμπόδια που συνάντησε η κοινότητα μέχρι την τελική διαμόρφωση της σύγχρονης μορφής της συγκεκριμένης έννοιας.

Η Ιστορία αποτελεί μια πηγή ιδεών για το σχεδιασμό δραστηριοτήτων πιο συμβατών με τις ανάγκες και τις δυνατότητες των μαθητών και άρα πιο αποτελεσματικών.

Εδώ θα πρέπει να υπογραμμίσουμε ότι η χρήση της Ιστορίας δεν θα πρέπει να γίνει με τον τρόπο και τις μεθόδους ενός ιστορικού. Κατά τον Bachelard (1983), ο ιστορικός ανιχνεύει τα γεγονότα μέσα από τις ιδέες, εμείς αναζητούμε τις ιδέες μέσα στα γεγονότα.

Ο τρόπος με τον οποίο μπορεί να χρησιμοποιηθεί η Ιστορία αποτελεί τα τελευταία χρόνια αντικείμενο έρευνας σημαντικών ανθρώπων στο χώρο της διδακτικής των μαθηματικών. Ο Polya (1961) υποστηρίζει ότι αν κατανοήσουμε τον τρόπο με τον οποίο ο άνθρωπος κατέκτησε τις μαθηματικές έννοιες μέσα από την Ιστορία, τότε, διδακτικά τουλάχιστον, θα αποκτήσουμε καλύτερα εφόδια για την προσπάθειά μας να οδηγήσουμε τους μαθητές στην κατάκτηση των εννοιών αυτών.

Ο Freudenthal (1981) υποδεικνύει τον τρόπο με τον οποίο θα πρέπει να χρησιμοποιηθεί η Ιστορία, τονίζοντας ότι ο διδάσκων θα πρέπει να μελετήσει και να αναδείξει τη διαδικασία μέσω της οποίας αναπτύχθηκε η μαθηματική έννοια και όχι απλά το αποτέλεσμα της διαδικασίας αυτής. Η ανάδειξη της διαδικασίας, μέσω της οποίας αναπτύχθηκε μία έννοια, προσφέρει κατά τον Katz (1986) ένα σημαντικό πλεονέκτημα, την κινητοποίηση (motivation) των μαθητών, που είναι η βασική συνιστώσα της διδακτικής πράξης.

Ο Peter Ransom (1995) προτείνει για τη διδασκαλία της τριγωνομετρίας μια ενδιαφέρουσα εφαρμογή η οποία στηρίζεται στη χρήση αρχαίων οργάνων, π.χ. ηλιακά ωρολόγια. Σύμφωνα και πάλι με τον ίδιο, η εμπλοκή των μαθητών σε πρακτικά μαθηματικά προσφέρει ισχυρά πλεονεκτήματα για την κατανόηση των μαθηματικών εννοιών.

Μία άλλη συνιστώσα της διδακτικής αξιοποίησης της Ιστορίας είναι η χρήση αυθεντικών κειμένων, η οποία έχει χαρακτηριστεί ως σημαντική παιδαγωγική παρέμβαση, αφού διαμορφώνει την αντίληψη της πολιτιστικής αξίας των μαθηματικών (Barbin & Menghini, 2000).

Η χρήση των σύγχρονων τεχνολογικών εργαλείων μπορεί να συμπληρώσει το διδακτικό εργαλείο της ιστορίας και να δημιουργήσει επιπλέον δυνατότητες για διερεύνηση, πολλαπλές αναπαραστάσεις, δυναμικό χειρισμό των γεωμετρικών αντικειμένων. Η μελέτη προβλημάτων, που παλαιοτέρα είχαν αντιμετωπιστεί με τις υπάρχουσες γνώσεις της συγκεκριμένης εποχής, με σύγχρονα τεχνολογικά και μαθηματικά εργαλεία αναδεικνύει τον κοινωνικό ρόλο των μαθηματικών και την πολιτιστική τους υπόσταση.

Με το συγκεκριμένο σενάριο οι μαθητές θα συνδέσουν διαφορετικές διδακτικές ενότητες, αλλά κυρίως θα συσχετίσουν μαθηματικές έννοιες με αυθεντικές καταστάσεις προβλήματος. Η διδασκαλία των μαθηματικών μέσα από τη διερεύνηση καταστάσεων προβλήματος αναγνωρίζεται από τη μαθηματική κοινότητα ως το κατεξοχήν μέσον για να «κάνουν μαθηματικά» οι μαθητές. Η χρήση των ΤΠΕ θα δημιουργήσει επιπλέον δυνατότητες για διερεύνηση, πολλαπλές αναπαραστάσεις και δυναμικό χειρισμό των γεωμετρικών αντικειμένων.

Η διδακτική πορεία θα ολοκληρωθεί με ένα στάδιο το οποίο είναι αδύνατον να υλοποιηθεί με τα στατικά μέσα του πίνακα και του τετραδίου. Το στάδιο αυτό είναι η εφαρμογή των μαθηματικών μοντέλων στη μελέτη της οπτικής μας αντίληψης, δηλαδή στην ανάδειξη των γεωμετρικών και συναρτησιακών της χαρακτηριστικών.

Τελικά, τα μαθηματικά που σχετίζονται με τη δραστηριότητα αντλούν το νόημά τους από την πραγματική κατάσταση του προβλήματος το οποίο επιχειρούν οι μαθητές να λύσουν.

ΣΧΕΔΙΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΩΝ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΩΝ

Ένταξη του σεναρίου στο Αναλυτικό Πρόγραμμα

Το σενάριο απευθύνεται στους μαθητές της Α΄, Β΄ και Γ΄ Λυκείου και πραγματεύεται έννοιες και προτάσεις της γεωμετρίας, της τριγωνομετρίας και των συναρτήσεων.

Ο διδάσκων έχει τη δυνατότητα να τροποποιήσει ή και να αφαιρέσει ερωτήματα, μετατρέποντας τις δραστηριότητες σε λιγότερο ή περισσότερο απαιτητικές. Για παράδειγμα, στο θέμα της μελέτης μιας έτοιμης προσομοίωσης, θα μπορούσε να ζητήσει από τους μαθητές να κατασκευάσουν οι ίδιοι τη δική τους εκδοχή του μοντέλου και όχι να χρησιμοποιήσουν το έτοιμο αρχείο του λογισμικού.

Οι δραστηριότητες είναι χωρισμένες σε τρεις ομάδες, μία για κάθε τάξη.

Οι δραστηριότητες της Α΄ Λυκείου στηρίζονται στην έννοια της οπτικής ακτίνας και της οπτικής γωνίας και στη δυνατότητα μέτρησης του ύψους ενός απομακρυσμένου αντικειμένου με βάση τις δύο αυτές έννοιες που συνδέονται με τον τρόπο που λειτουργεί η όρασή μας. Οι βασικές μαθηματικές έννοιες, με τις οποίες εμπλέκονται οι μαθητές της τάξης αυτής, είναι τα αντιστρόφως ανάλογα ποσά, από την άλγεβρα, καθώς και οι παράλληλες ευθείες και η ομοιότητα, από τη γεωμετρία.

Οι δραστηριότητες της Β΄ Λυκείου στηρίζονται στον τρόπο με τον οποίο συνδέεται η οπτική μας γωνία με το ύψος που παρατηρούμε, ενώ οι μαθηματικές έννοιες που συνδέονται με τις δραστηριότητες είναι η τριγωνομετρική εφαπτομένη και η γραφική της παράσταση, καθώς και το θεώρημα των ημιτόνων.

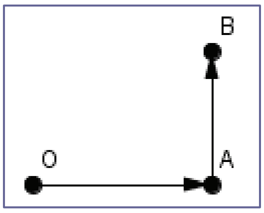
Οι δραστηριότητες της Γ΄ Λυκείου σχετίζονται και πάλι με την οπτική μας γωνία, όμως οι μαθηματικές έννοιες αναφέρονται στη μελέτη των ακροτάτων μιας συνάρτησης, στις ασύμπτωτες και στη γραφική της παράσταση.

Αυτό που έχει ιδιαίτερη σημασία σε ορισμένες δραστηριότητες είναι η διερεύνηση της σχέσης δύο ποσών που συμμεταβάλλονται με τη μέθοδο του δυναμικού σημείου, η οποία περιγράφεται στη συνέχεια.

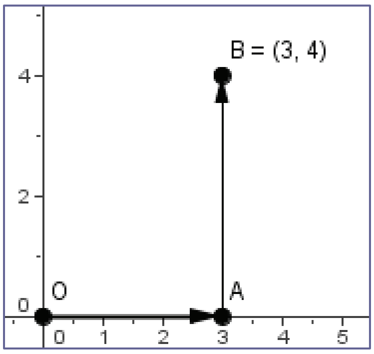
Το καρτεσιανό επίπεδο και η μέθοδος του δυναμικού σημείου

Φανταστείτε ένα επίπεδο πάνω στο οποίο υπάρχει ένα σημείο Ο που μπορεί να κινηθεί. Το σημείο αυτό θα το ονομάζουμε δυναμικό σημείο.

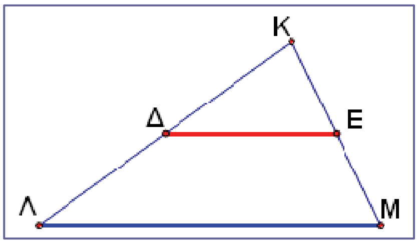
Ας υποθέσουμε τώρα ότι ο μόνος δυνατός τρόπος για να κινηθεί το σημείο αυτό είναι να μετατοπιστεί πρώτα δεξιά ή αριστερά στη θέση Α, και στη συνέχεια πάνω ή κάτω, οπότε θα βρίσκεται τελικά στη θέση Β.



Στην περίπτωση αυτή θα λέμε ότι το επίπεδο είναι καρτεσιανό. Για παράδειγμα, αν στο σημείο Ο, που είναι η αρχή των αξόνων, δώσουμε εντολή να μετακινηθεί οριζόντια κατά 3 μονάδες και κατακόρυφα κατά 4 μονάδες, τότε θα εμφανιστεί στη θέση (3, 4).



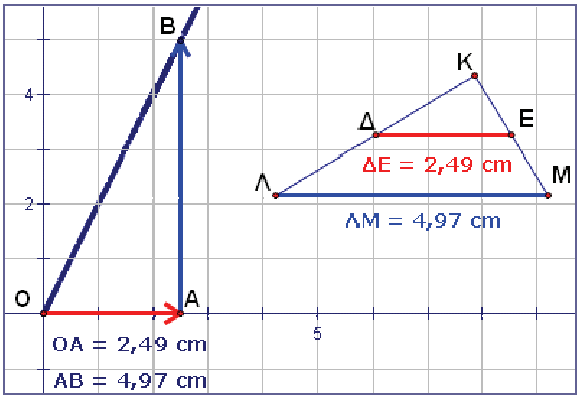
Ας υποθέσουμε τώρα ότι θέλουμε να μελετήσουμε τη σχέση δύο ποσών που μεταβάλλονται συγχρόνως (συμμεταβάλλονται). Πιο συγκεκριμένα, σε ένα δυναμικό τρίγωνο ΚΛΜ θέλουμε να μελετήσουμε τη σχέση της βάσης του ΛΜ και του ευθύγραμμου τμήματος ΔΕ που ενώνει τα μέσα των πλευρών ΚΛ και ΚΜ.



Το λογισμικό *The Geometer's Sketchpad* μας δίνει τη δυνατότητα να πραγματοποιήσουμε τη μελέτη αυτή με δύο τρόπους: μετακινώντας την αρχή των αξόνων ή αποτυπώνοντας τις μετρήσεις σε ζεύγη (χ, ψ).

Η μέθοδος της μετακίνησης της αρχής των αξόνων

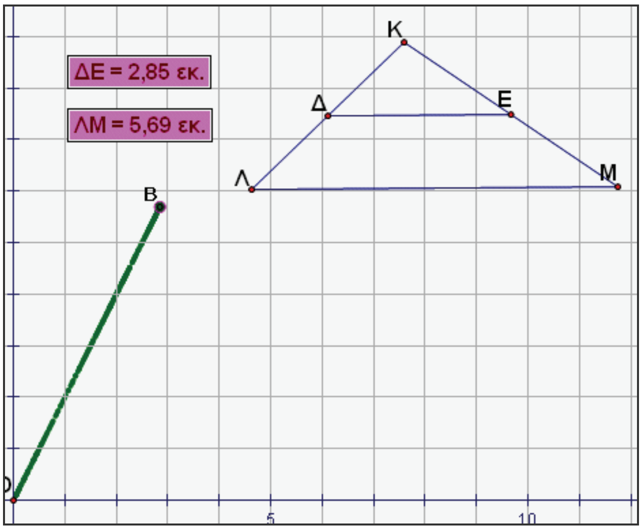
- Μετράμε τα δύο τμήματα ΛΜ και ΔΕ.
- Μεταφέρουμε την αρχή Ο οριζόντια κατά το μήκος του ενός από τα δύο τμήματα, π.χ. του ΔΕ, οπότε μετακινείται στη θέση Α.
- Μεταφέρουμε το σημείο Α κατακόρυφα κατά το μήκος του ΛΜ, οπότε μετακινείται στη θέση Β.
- Εμφανίζουμε το ίχνος του Β και μεταβάλουμε τη βάση ΛΜ, σύροντας το ένα της άκρο.



Η μέθοδος της αποτύπωσης των μετρήσεων σε ζεύγη (χ, ψ)

- Μετράμε τα δύο τμήματα ΛΜ και ΔΕ.

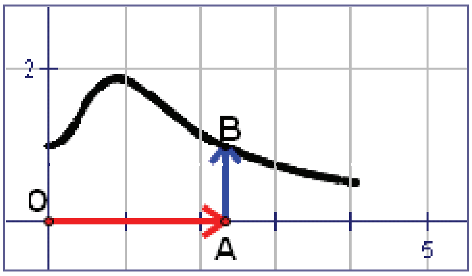
- Επιλέγουμε πρώτα τη μέτρηση που θέλουμε να είναι η ανεξάρτητη μεταβλητή χ και μετά τη μέτρηση που θέλουμε να είναι η εξαρτημένη μεταβλητή ψ.
- Από το μενού «Γράφημα» επιλέγουμε «Αποτύπωση με (χ, ψ)», οπότε εμφανίζεται το δυναμικό σημείο.
- Κάνουμε δεξί κλικ στο σημείο αυτό και επιλέγουμε να εμφανιστεί το ίχνος του. Μεταβάλουμε τη βάση ΛΜ, σύροντας το ένα της άκρο.



Αυτό που θα προκύψει, καθώς κινείται το Β, είναι μία γραμμή η οποία μας «αποκαλύπτει» τη σχέση των δύο ποσών που μεταβάλλονται. Στη συνέχεια θα πρέπει να μελετήσουμε τη γραμμή, να τη συνδέσουμε με γνωστές γραφικές παραστάσεις και να συμπεράνουμε ποια σχέση συνδέει τα δύο ποσά.

Σημείωση
Μπορείτε και εσείς να κατασκευάσετε το αρχείο με τη βοήθεια του λογισμικού ή να μελετήσετε τη μέθοδο του δυναμικού σημείου, χρησιμοποιώντας το έτοιμο αρχείο του λογισμικού με τίτλο Dynamiko Shmeio.

Αν τώρα η καμπύλη που θα προκύψει δεν είναι κάποια από τις γνωστές (παραβολή: $ψ=α.χ^2$ ή υπερβολή $ψ=\frac{α}{χ}$), τότε θα έχουμε εντοπίσει μία νέα συνάρτηση της οποίας διαθέτουμε μόνο τη γραφική της παράσταση και όχι τον τύπο της.



Επομένως, αυτό που πρέπει να σημειώσουμε είναι το γεγονός ότι δεν υπάρχουν τρία μόνο είδη σχέσεων μεταξύ δύο μεταβλητών ποσών χ και ψ ($ψ=α.χ+β$, $ψ=α\cdot χ^2$ και $ψ=\frac{α}{χ}$). Με τη μέθοδο του δυναμικού σημείου μπορούμε να εντοπίσουμε πολλές και διαφορετικές σχέσεις, όμως, τις περισσότερες φορές, μόνο ως προς τη γραφική τους παράσταση.

3.2 Δραστηριότητες για την Α' Λυκείου

1η Δραστηριότητα: ΕΡΓΑΛΕΙΑ ΜΕΤΡΗΣΕΩΝ

Διάρκεια της δραστηριότητας: 2-3 διδακτικές ώρες

Τάξη: Α΄ Λυκείου

Γνωστικά αντικείμενα:

- Η έννοια της γραφικής παράστασης συνάρτησης
- Αντιστρόφως ανάλογα ποσά
- Ομοιότητα τριγώνων

Η κατάσταση προβλήματος:
Κατά τον πρώιμο αλλά και κατά τον ύστερο Μεσαίωνα, κυρίως δε κατά τη διάρκεια της Αναγέννησης, χρησιμοποιήθηκαν απλά εργαλεία μέτρησης ενός απομακρυσμένου αντικειμένου τα οποία αξιοποίησαν τις οπτικές μας ακτίνες και την οπτική γωνία. Ωστόσο, η πρώτη συστηματική προσπάθεια μέτρησης με απλό εργαλείο είναι καταγεγραμμένη στα *Οπτικά* του Ευκλείδη, το δε εργαλείο είναι ένας απλός καθρέπτης. Με ποιον όμως τρόπο ο χρήστης ενός τέτοιου εργαλείου μπορεί να κάνει μία μέτρηση; Ποια μαθηματικά τεκμηριώνουν την αξιοπιστία των μετρήσεων;
Αυτά είναι τα βασικά ερωτήματα με τα οποία θα εμπλακούν οι μαθητές, καθώς θα μελετούν στις δύο επόμενες δραστηριότητες τις προσομοιώσεις των εργαλείων.

Φύλλο εργασίας 1
Βρισκόσαστε μπροστά σε ένα κτήριο και στο έδαφος υπάρχει ένα μικρός καθρέφτης.

Προχωράτε μπρος πίσω, μέχρι να δείτε την κορυφή του κτηρίου στον καθρέφτη. Μπορείτε να υπολογίσετε το ύψος του κτηρίου;

Με τη δραστηριότητα αυτή θα διαπιστώσετε ότι δεν πρόκειται για μια ιδιαίτερα δύσκολη διαδικασία, αρκεί βέβαια να είναι γνωστές μερικές αποστάσεις, όπως η απόσταση του καθρέφτη από το κτήριο και η απόστασή μας από τον καθρέφτη.

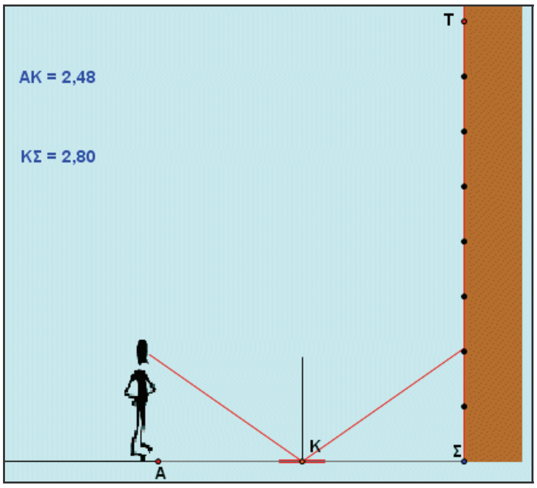
Ανοίξτε το αρχείο katoptro metrisis_1 του λογισμικού. Στην οθόνη προβάλλονται:

α) Ένας άνθρωπος που κοιτάζει στον καθρέφτη που βρίσκεται στο έδαφος. Ας υποθέσουμε ότι η οπτική του ακτίνα ξεκινά από τα μάτια του, ανακλάται στον καθρέφτη και καταλήγει σε κάποιο ύψος του κτηρίου. (Στη φύση η πορεία της φωτεινής ακτίνας είναι βέβαια αντίστροφη.)

β) Αν θέλουμε να μετακινήσουμε τον άνθρωπο, θα πρέπει σύρουμε το σημείο Α. Η οπτική ακτίνα ακολουθεί το βασικό νόμο της ανάκλασης, δηλαδή η γωνία πρόσπτωσης είναι ίση με τη γωνία ανάκλασης. Η απόσταση ΑΚ του ανθρώπου από το κάτοπτρο Κ εμφανίζεται στην οθόνη.

γ) Αν θέλουμε να μετακινήσουμε το κάτοπτρο, θα πρέπει να σύρουμε το σημείο Κ.

δ) Η προσομοίωση της πρόσοψης ΣΤ του κτηρίου έχει μεταβλητό ύψος, το οποίο μπορούμε να μεταβάλλουμε σύροντας το σημείο Τ. Επιπλέον, είναι χωρισμένη σε ίσα τμήματα. Σύρετε τα σημεία Α και Τ, για να διαπιστώσετε πώς αλλάζουν τα μήκη των τμημάτων.



Ας ξεκινήσουμε τώρα τη μελέτη των μεγεθών που μεταβάλλονται.

1) Τοποθετήστε τον άνθρωπο σε μια μικρή απόσταση από το κάτοπτρο, π.χ. 1 μονάδα (αν στη θέση αυτή ο άνθρωπος δεν βλέπει το κτήριο στον καθρέφτη, τότε μετακινήστε και τον καθρέφτη). Αν διπλασιάσουμε την απόσταση του ανθρώπου από το κάτοπτρο, πώς θα μεταβληθεί το ύψος στο οποίο βλέπει ο άνθρωπος;

2) Τοποθετήστε τον άνθρωπο σε αρκετή απόσταση από τον καθρέφτη. Αν τον σύρετε στη μισή απόσταση, πώς θα μεταβληθεί το ύψος στο οποίο βλέπει ο άνθρωπος;

3) Επαναλάβετε τις παραπάνω ενέργειες, τριπλασιάζοντας την απόσταση ή μειώνοντάς τη στο 1/3 της αρχικής. Υπάρχει κάποιος κανόνας με τον οποίο φαίνεται να μεταβάλλονται τα δύο ποσά;

Οδηγίες και προτάσεις υλοποίησης (1η φάση)

Στη φάση αυτή η μαθητές, αφού εξοικειωθούν με το περιβάλλον και τη λειτουργία του λογισμικού, θα ερευνήσουν, με βάση τις πληροφορίες που τους παρέχονται στην οθόνη, τον τρόπο που συμμεταβάλλεται η απόσταση του ανθρώπου από το κάτοπτρο και το ύψος στο οποίο φτάνει η ανάκλαση της οπτικής του ακτίνας.

- Καταρχάς μπορούν να χρησιμοποιήσουν τη διαίρεση της πρόσοψης του κτηρίου σε ίσα μέρη, ώστε να διαπιστώνουν με απλό τρόπο αν το ύψος της ανακλώμενης ακτίνας πάνω στο κτήριο διπλασιάζεται, τριπλασιάζεται ή υποδιπλασιάζεται, υποτριπλασιάζεται κ.λπ.

- Η τοποθέτηση του ανθρώπου και του κατόπτρου στην αρχή της δραστηριότητας μπορεί να γίνει με δύο τρόπους: είτε η απόσταση ΕΚ θα είναι ακέραιος αριθμός, ώστε ο μαθητής να αναγνωρίζει εύκολα το διπλασιασμό ή τον υποδιπλασιασμό της, είτε η ανακλώμενη ακτίνα θα πρέπει να βρίσκεται πάνω σε σημείο της πρόσοψης του κτηρίου.

- Στη δεύτερη περίπτωση φροντίζουμε να μετακινηθεί ο άνθρωπος, ώστε η ανακλώμενη ακτίνα να φτάνει και πάλι σε σημείο διπλάσιας ή μισής απόστασης από το Σ.

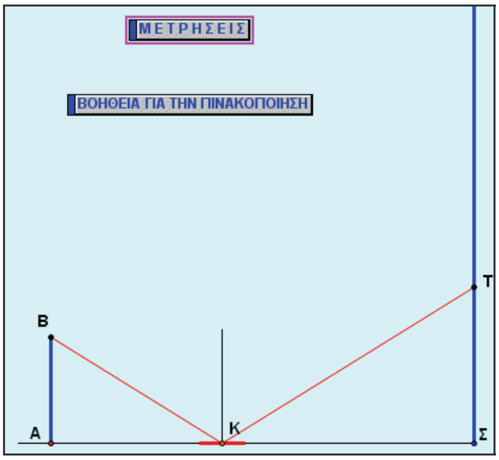
- Σε κάθε περίπτωση, οι μαθητές θα παρατηρήσουν ότι τα δύο ποσά είναι αντιστρόφως ανάλογα, κάτι που θα πρέπει να επιβεβαιωθεί με αρκετές δοκιμές διπλασιασμού, τριπλασιασμού, καθώς και υποδιπλασιασμού, υποτριπλασιασμού κ.λπ.

Φύλλο εργασίας 2

Στην προηγούμενη δραστηριότητα προέκυψαν κάποια συμπεράσματα για τον τρόπο που συνδέεται η απόσταση του ανθρώπου από τον καθρέφτη,καθώς και για το ύψος του κτηρίου στο οποίο βλέπει ο άνθρωπος. Τα συμπεράσματα όμως αυτά θα πρέπει να τα ελέγξουμε με μαθηματικά εργαλεία, όπως είναι ο πίνακας τιμών και η γραφική παράσταση.

Ανοίξτε το αρχείο katoptro metrisis_2 του λογισμικού. Στην οθόνη προβάλλονται:
Ένα τμήμα ΑΒ που μπορεί να μετακινείται από το σημείο Α.
Η οπτική ακτίνα ΒΚ που είναι ουσιαστικά η ανάκλαση της ακτίνας ΤΚ πάνω στο κάτοπτρο Κ, το οποίο μπορεί να μετακινηθεί από το σημείο Κ.
Τα κουμπί «Μετρήσεις», από όπου εμφανίζονται μετρήσεις διαφόρων μεγεθών.

Επίσης, εμφανίζονται διάφορα κουμπιά βοήθειας για την κατασκευή συνάρτησης, για τη μέτρηση γωνιών και για την κατασκευή πινάκων από ζεύγη μετρήσεων.



1) Τοποθετήστε τον καθρέφτη σε μια σταθερή θέση, π.χ. σε απόσταση 3 μονάδων από το κτήριο, και μετακινήστε το τμήμα ΑΒ. Κατασκευάστε έναν πίνακα, που να περιλαμβάνει αρκετές τιμές, τοποθετώντας στην πρώτη στήλη του τις μετρήσεις για το ΑΚ και στη δεύτερη τις μετρήσεις για το ύψος ΣΤ στο οποίο φτάνει η οπτική ακτίνα.

2) Με βάση τη διάταξη των σημείων στους άξονες, επαληθεύεται ή απορρίπτεται ο κανόνας στον οποίο καταλήξατε στο πρώτο μέρος της δραστηριότητας; Τι σχέση έχουν τα δύο ποσά μεταξύ τους;

3) Πώς μπορούμε από τον πίνακα τιμών να εντοπίσουμε αυτή τη σχέση;

4) Μετρήστε τις γωνίες των δύο τριγώνων ΑΒΚ και ΣΤΚ. Τι παρατηρείτε; Ποια είναι η σχέση των δύο τριγώνων;

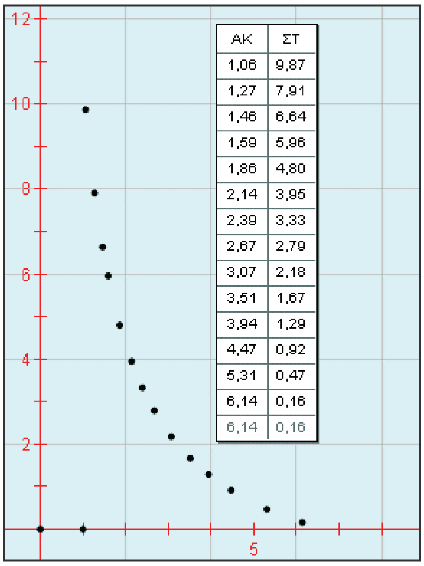
5) Πώς δικαιολογούμε, μέσω της σχέσης των δύο τριγώνων, τα συμπεράσματα για τα μήκη των τμημάτων ΑΚ και ΣΤ;

6) Με ποιον τρόπο μπορούμε πλέον να μετράμε, με έναν καθρέφτη, το ύψος ενός κτηρίου, όταν γνωρίζουμε τις αποστάσεις που είναι απαραίτητες για τη συγκεκριμένη μέτρηση;

Οδηγίες και προτάσεις υλοποίησης

Στόχος του δεύτερου μέρους της δραστηριότητας είναι οι μαθητές να μελετήσουν, με τη βοήθεια των μαθηματικών, το πρόβλημα της μέτρησης και να καταλήξουν τόσο σε γεωμετρικά όσο και σε αλγεβρικά συμπεράσματα για τη σχέση των μεγεθών.

- Στην πρώτη άσκηση η διάταξη των σημείων θα πρέπει να οδηγήσει τους μαθητές στο συμπέρασμα ότι τα ποσά είναι μάλλον αντιστρόφως ανάλογα. Το γινόμενο δύο αντίστοιχων τιμών για τις μεταβλητές θα υποδείξει τη σταθερά λ στη σχέση ψ=λ/χ.



ΑΚ	ΣΤ
1,06	9,87
1,27	7,91
1,46	6,64
1,59	5,96
1,86	4,80
2,14	3,95
2,39	3,33
2,67	2,79
3,07	2,18
3,51	1,67
3,94	1,29
4,47	0,92
5,31	0,47
6,14	0,16
6,14	0,16

- Στην τρίτη άσκηση καλό θα είναι ο διδάσκων να υποδείξει στους μαθητές ότι η σταθερά λ είναι ίση περίπου (από τις μετρήσεις) με το γινόμενο του ύψους ΑΒ επί την απόσταση ΚΣ.

- Στην τέταρτη άσκηση οι μαθητές θα μετρήσουν τις γωνίες των δύο τριγώνων και θα διαπιστώσουν ότι είναι ίσες μία προς μία. Από αυτό μπορούν να καταλήξουν στο συμπέρασμα ότι τα δύο τρίγωνα είναι όμοια.

- Στην πέμπτη άσκηση οι μαθητές αναμένεται να γράψουν τις αναλογίες των πλευρών και μέσω αυτών να δικαιολογήσουν το γεγονός ότι τα δύο ποσά που συσχέτισαν είναι αντιστρόφως ανάλογα.

- Στόχος της τελευταίας άσκησης είναι οι μαθητές να περιγράψουν μία σειρά συγκεκριμένων δραστηριοτήτων μετρήσεων και πράξεων, με τις οποίες θα μπορούν να αξιοποιήσουν το κάτοπτρο για τη μέτρηση ενός ζητούμενου ύψους.

Επέκταση

Η δραστηριότητα θα μπορούσε να ολοκληρωθεί, αν οι μαθητές εφάρμοζαν τα συμπεράσματά τους σε πραγματικές συνθήκες. Συγκεκριμένα, θα μπορούσαν να χρησιμοποιήσουν ένα μικρό καθρέφτη, να τοποθετηθούν σε απόσταση 1 ή 2 μ. από αυτόν και στη συνέχεια, με τη βοήθεια της προσομοίωσης, να προσπαθήσουν να υπολογίσουν το ύψος του κτηρίου στο οποίο φτάνει η οπτική τους ακτίνα. Εδώ βέβαια θα χρειαζόταν ή ένας μαθητής με ύψος 1,85 μ. ή ένας με μικρότερο ύψος, ο οποίος θα ανέβει σε κάποιο αντικείμενο, ώστε το ύψος των ματιών του από το έδαφος να είναι 1,80 μ. Κάτι τέτοιο όμως δεν είναι απαραίτητο, αν δεν χρησιμοποιηθεί η προσομοίωση, αφού θα μπορεί να εφαρμοστεί απευθείας ο τύπος που προέκυψε στο τέλος της δραστηριότητας.

2η Δραστηριότητα: ΚΑΤΟΠΤΡΑ

Διάρκεια της δραστηριότητας: 1-2 διδακτικές ώρες

Τάξη: Α΄ Λυκείου

Γνωστικό αντικείμενο:

- Παράλληλες ευθείες

Η κατάσταση προβλήματος

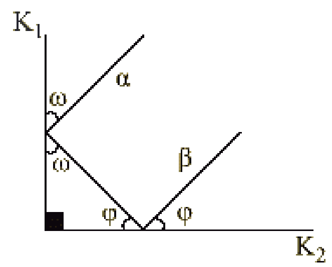
Το πρόβλημα που καλούνται να μελετήσουν οι μαθητές στηρίζεται σε μία άσκηση του σχολικού βιβλίου στο κεφάλαιο που αναφέρεται στις παράλληλες ευθείες. Συγκεκριμένα, η άσκηση αναφέρεται σε δύο κάθετα κάτοπτρα και σε μία ακτίνα φωτός η οποία πέφτει και ανακλάται στο ένα κάτοπτρο και κατόπιν προσπίπτει στο άλλο, όπου και ανακλάται. Το ζητούμενο είναι οι μαθητές να διερευνήσουν τη σχετική θέση της αρχικής προσπίπτουσας με την τελική ανακλώμενη ακτίνα.

Εδώ ο στόχος δεν είναι απλά η λύση της άσκησης, αλλά η επέκταση και διερεύνηση όσο το δυνατόν περισσοτέρων περιπτώσεων. Επιπλέον, επιδιώκεται η ανάδειξη των τρόπων με τους οποίους μπορεί να εμπλουτιστεί η διδασκαλία με βάση το σχολικό εγχειρίδιο και σε συνδυασμό με τις δυνατότητες της τεχνολογίας.

Φύλλο εργασίας 1

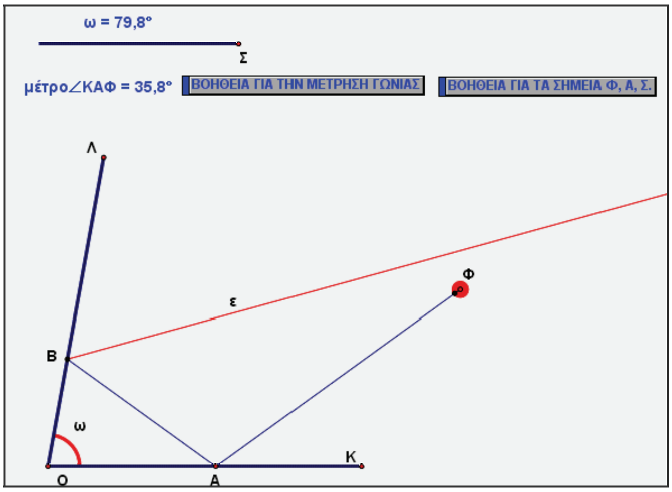
Ας υποθέσουμε ότι πρόκειται να λύσουμε την παρακάτω άσκηση του βιβλίου.

7. Δύο επίπεδα κάτοπτρα K_1, K_2 είναι κάθετα. Φωτεινή ακτίνα α προσπίπτει αρχικά στο K_1 και μετά την ανάκλαση στο K_2, εξέρχεται κατά την ακτίνα β. Τι πορεία θα ακολουθήσει, σε σχέση με την αρχική ακτίνα α;



Απόσπασμα από το σχολικό βιβλίο της Γεωμετρίας της Α΄ και Β΄ Λυκείου σ. 88.

Το ερώτημα που τίθεται είναι το εξής: Όταν τα κάτοπτρα δεν είναι κάθετα, τι μπορεί να συμβαίνει;
Ανοίξτε το αρχείο katoptra του λογισμικού. Στην οθόνη προβάλλονται:



Μία προσομοίωση των κατόπτρων ΟΚ και ΟΛ.
Μία προσομοίωση της διαδρομής της φωτεινής ακτίνας από την πηγή Φ μέχρι και την τελικά ανακλώμενη ακτίνα ε.
Ένας μεταβολέας με άκρο το σημείο Σ, με το οποίο μπορούμε να μεταβάλλουμε τη γωνία ω των δύο κατόπτρων.
Το μέτρο της γωνίας ΚΑΦ, δηλαδή της γωνίας πρόσπτωσης της αρχικής ακτίνας.
Δύο κουμπιά βοήθειας που αναφέρονται στον τρόπο με τον οποίο μπορούμε να μετράμε γωνίες και στη χρήση συγκεκριμένων σημείων της προσομοίωσης.

1) Μεταβάλετε μόνο την τιμή της γωνίας ω από το σημείο Σ, ώστε τα δύο κάτοπτρα να γίνουν κάθετα. Διερευνήστε την κατεύθυνση της τελικής ανακλώμενης ακτίνας ε. Ποια φαίνεται να είναι η θέση της ε ως προς την αρχική ακτίνα ΦΑ;

2) Διατηρήστε τη γωνία ω ορθή και μεταβάλετε μόνο τη θέση της φωτεινής πηγής Φ. Ποια φαίνεται να είναι η θέση της ε ως προς την αρχική ακτίνα ΦΑ;

3) Μετρήστε τις κατάλληλες γωνίες, ώστε να επιβεβαιώσετε ή να απορρίψετε τα συμπεράσματά σας από τις δύο προηγούμενες ασκήσεις.

4) Αποδείξτε με αυστηρά μαθηματικό τρόπο τα τελικά σας συμπεράσματα.

Οδηγίες και προτάσεις υλοποίησης
Καλό θα ήταν στην αρχή να γίνει μία διαπραγμάτευση μεταξύ του διδάσκοντα και των μαθητών για την προσομοίωση στην οθόνη, ώστε να αναδειχτεί η βασική της διαφορά από την εικόνα του βιβλίου. Η διαφορά αυτή είναι προφανώς το γεγονός ότι η προσομοίωση είναι δυναμική και επομένως δίνει τη δυνατότητα για περαιτέρω διερεύνηση της πραγματικής κατάστασης.

- Στις δύο πρώτες ασκήσεις οι μαθητές θα κάνουν εικασίες για τη θέση των δύο ακτίνων (αρχικής τελικής), οι οποίες φαίνεται να είναι παράλληλες. Η εικασία αναμένεται να ενισχυθεί, όταν οι μαθητές μεταφέρουν τη θέση της πηγής φωτός Φ.

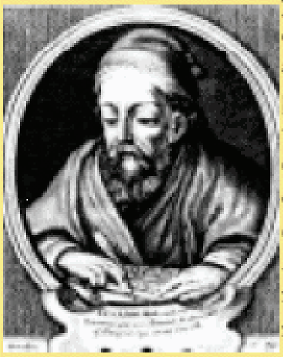
- Στόχος της τρίτης άσκησης είναι οι μαθητές να χρησιμοποιήσουν μετρήσεις, για να ενισχύσουν ακόμη περισσότερο τη διαίσθηση της παραλληλίας των δύο ακτίνων. Συγκεκριμένα ο διδάσκων θα ζητήσει από τους μαθητές να διαπραγματευτούν ποιες γωνίες θα πρέπει να μετρηθούν, ώστε να διαπιστωθεί η παραλληλία των δύο ακτίνων. Μία προτεινόμενη μέτρηση είναι εκείνη της γωνίας ΦΑΒ και της γωνίας ΑΒΜ (Μ σημείο πάνω στην ε). Οι δύο αυτές γωνίες έχουν μέτρα με άθροισμα 180^o, γεγονός που υποδεικνύει την παραλληλία των δύο ακτίνων.

- Στόχος της τέταρτης άσκησης είναι η καθαρά μαθηματική επεξεργασία του θέματος και εδώ ο διδάσκων θα πρέπει να υποδείξει στους μαθητές τη βασική σχέση ισότητας της γωνίας πρόσπτωσης με τη γωνία ανάκλασης.

Φύλλο εργασίας 2
Ο Ευκλείδης έχει διατυπώσει μία σειρά προτάσεων/αιτημάτων, εκ των οποίων εκείνο που έχει προκαλέσει τις περισσότερες συζητήσεις είναι το πέμπτο. Ας δούμε πώς περιγράφεται το αίτημα αυτό στα ιστορικά σημειώματα που περιλαμβάνονται στο σχολικό εγχειρίδιο, στο κεφάλαιο των παραλλήλων.

Η θεωρία των παραλλήλων

Το αίτημα του Ευκλείδη. Στο Βιβλίο Ι των «Στοιχείων» του ο Ευκλείδης ορίζει ως παράλληλες «τις ευθείες εκείνες που βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο και προεκτεινόμενες επ᾽ άπειρον και από τα δύο μέρη δε συναντώνται σε κανένα απ᾽ αυτά» (Ορισμός 23). Αμέσως μετά διατυπώνει πέντε αιτήματα, τα τέσσερα πρώτα από τα οποία εκφράζουν τις βασικές ιδιότητες των γεωμετρικών κατασκευών με τη βοήθεια του κανόνα και του διαβήτη, ενώ το πέμπτο αποφαίνεται ότι:

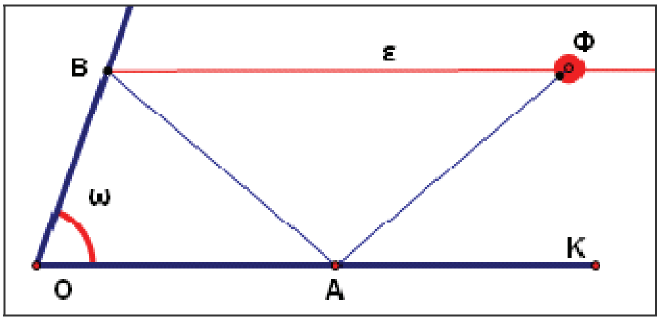


«Εάν μια ευθεία που τέμνει δύο ευθείες σχηματίζει τις εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες μικρότερες από δύο ορθές, τότε οι δύο ευθείες προεκτεινόμενες επ᾽ άπειρον συναντώνται στο μέρος που οι σχηματιζόμενες γωνίες είναι μικρότερες από δύο ορθές» (Αίτημα V).

Αυτό ακριβώς το πέμπτο αίτημα θα αποτελέσει ένα μαθηματικό εργαλείο-κριτήριο με το οποίο μπορούμε να διερευνήσουμε τη σχετική θέση δύο ευθειών στην οθόνη του υπολογιστή.

1) Μεταβάλετε τη γωνία ω από το σημείο Σ, ώστε να είναι οξεία. Ποια είναι η σχετική θέση της ε ως προς την αρχική ακτίνα ΦΑ; Πώς μπορούμε να δικαιολογήσουμε τη σχετική θέση των δύο ευθειών με τη βοήθεια του πέμπτου αιτήματος του Ευκλείδη;

2) Σύρετε το σημείο Σ, ώστε η γωνία ω να πάρει ακέραια τιμή, π.χ. 70^o. Μετακινήστε τη φωτεινή πηγή Φ, ώστε η τελική ακτίνα ε να γίνει παράλληλη προς το οριζόντιο κάτοπτρο. Ποιες γωνίες θα πρέπει να μετρήσουμε, ώστε να βεβαιωθούμε μέσω των μετρήσεων ότι πράγματι οι δύο ευθείες (ε και ΟΚ) είναι παράλληλες;

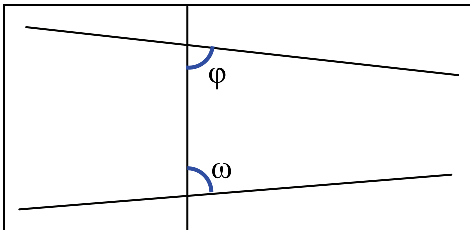


3) Υπολογίστε με αυστηρά μαθηματικό τρόπο τη γωνία πρόσπτωσης ΚΑΦ, όταν $ω=70^o$, ώστε η ε να είναι παράλληλη προς το οριζόντιο κάτοπτρο.

4) Μεταβάλετε τη γωνία ω, ώστε να γίνει αμβλεία. Ποια είναι η σχετική θέση της ε ως προς την αρχική ακτίνα ΦΑ; Πώς μπορούμε να δικαιολογήσουμε τη σχετική θέση των δύο ευθειών με τη βοήθεια του πέμπτου αιτήματος του Ευκλείδη;

Οδηγίες και προτάσεις υλοποίησης

- Αρχικά ο διδάσκων σχολιάζει με τους μαθητές το πέμπτο αίτημα του Ευκλείδη. Στη συνέχεια κατασκευάζει στον πίνακα ένα σχήμα ή ζητά από τους μαθητές να κατασκευάσουν το αντίστοιχο σχήμα στο τετράδιό τους.

	Αν $φ+ω<180^o$, τότε οι δύο ευθείες τέμνονται προς το μέρος των γωνιών αυτών.

- Στη συνέχεια οι μαθητές, σύροντας το σημείο Σ, μεταβάλλουν τη γωνία ω, ώστε να γίνει οξεία. Τώρα πλέον η τελική ακτίνα φαίνεται να τέμνει την αρχική, γεγόνος που οι μαθητές θα δικαιολογήσουν με την εφαρμογή του πέμπτου αιτήματος, αφού οι γωνίες ΦΑΒ και ΑΒΜ (Μ σημείο της ε) έχουν άθροισμα μικρότερο των 180^o.
- Στην περίπτωση που η ε είναι παράλληλη στο οριζόντιο κάτοπτρο, τότε καλό θα είναι ο διδάσκων να ζητήσει από τους μαθητές να μετρήσουν τις γωνίες, οι οποίοι και θα παρατηρήσουν ότι η γωνία ΑΒΟ είναι επίσης 70^o. Επιπλέον, το τρίγωνο ΑΒΦ είναι ισοσκελές, γεγονός που μπορεί να αποτελέσει ερώτημα του διδάσκοντα προς τους μαθητές. Η απόδειξη είναι απλή, με τη βοήθεια της παραλληλίας και της μεταφοράς των γωνιών.
- Τέλος, όταν η γωνία ω είναι αμβλεία, η τελική και η αρχική ακτίνα συγκλίνουν σε αντίθετη κατεύθυνση από ό,τι στην προηγούμενη άσκηση. Αυτό θα αιτιολογηθεί από τους μαθητές και πάλι με βάση το ευκλείδειο αίτημα.

3.3. Δραστηριότητες για τη Β' Λυκείου

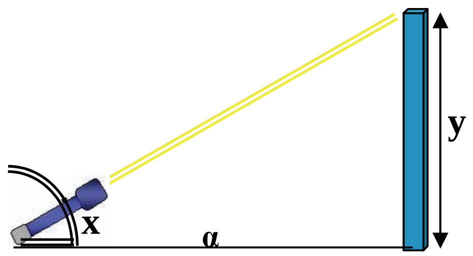
1η Δραστηριότητα: Ο ΠΡΟΒΟΛΕΑΣ

Διάρκεια της δραστηριότητας: 1-2 διδακτικές ώρες

Τάξη: Β΄ Λυκείου

Γνωστικό αντικείμενο:
- Η τριγωνομετρική εφαπτομένη και η γραφική της παράσταση
- Περιοδική συνάρτηση και ιδιότητες της γραφικής παράστασης της τριγωνομετρικής εφαπτομένης

Η κατάσταση προβλήματος
Η βασική ιδέα της δραστηριότητας θα μπορούσε να περιγραφεί ως εξής:



Αν διαθέτουμε ένα μικρό φακό σε σταθερή απόσταση α από ένα απομακρυσμένο αντικείμενο, τότε μπορούμε να μετρήσουμε το ύψος y του αντικειμένου, όταν είναι γνωστή η γωνία x του φακού ως προς το οριζόντιο επίπεδο.

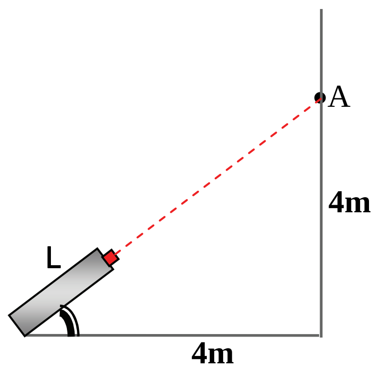
Τα μεγέθη που εμπλέκονται σε μια τέτοια μέτρηση, δηλαδή τα α, x και y, συνδέονται με τη σχέση y=α·εφx.

Γενικός στόχος της δραστηριότητας είναι οι μαθητές να συνδέσουν την έννοια της τριγωνομετρικής εφαπτομένης με προβλήματα που σχετίζονται με τη μέτρηση του ύψους ενός απομακρυσμένου αντικειμένου.

Η δραστηριότητα του περιστρεφόμενου προβολέα έχει σχεδιαστεί με την προοπτική να αποτελέσει συμπληρωματική δραστηριότητα αυτού του σταθερού προβολέα. Με τον τρόπο αυτό, οι μαθητές θα συνδέσουν την έννοια της ομοιότητας των ορθογώνιων τριγώνων με την τριγωνομετρική εφαπτομένη. Η δραστηριότητα μπορεί να διεξαχθεί σε δύο διδακτικές ώρες.

Φύλλο εργασίας

Στο παρακάτω σχήμα ο προβολέας L φωτίζει το σημείο Α πάνω σε έναν τοίχο. Για να φωτίσει σε ένα σημείο που βρίσκεται σε διπλάσιο ύψος, θα πρέπει:



Α) Να διπλασιαστεί η γωνία.

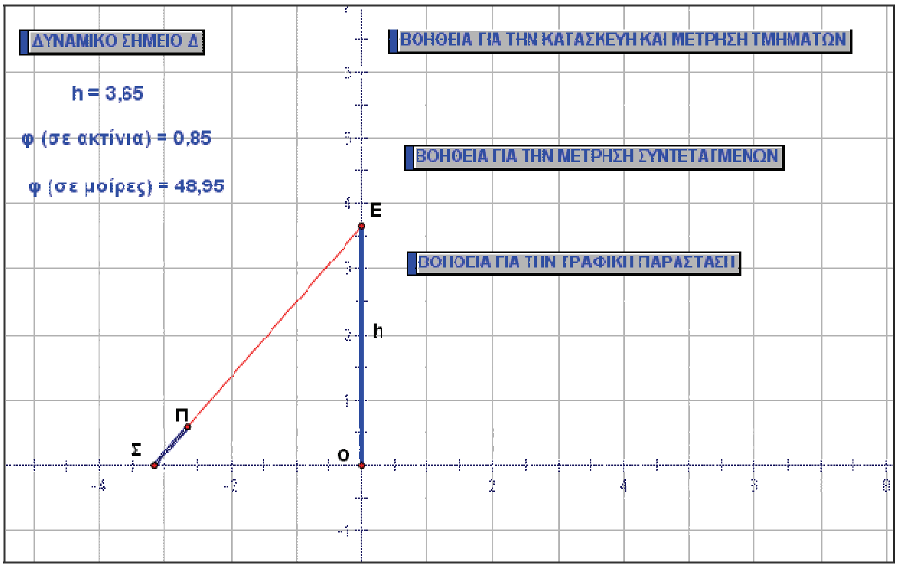
Β) Να πλησιάσει ο προβολέας προς τον τοίχο.

Γ) Να αυξηθεί η γωνία κατά 18^{o}.

Δ) Να αυξηθεί η γωνία κατά 40^{o}.

Επιχειρώντας να απαντήσουμε στο ερώτημα αυτό, θα διαπιστώσουμε ότι δεν είναι και το ευκολότερο, αν δεν διαθέτουμε κάποια ιδιαίτερα εργαλεία, έστω και έναν υπολογιστή τσέπης. Στην παρακάτω δραστηριότητα θα διερευνήσουμε σε βάθος την κατάσταση προβλήματος που σχετίζεται με τον προβολέα, με τη βοήθεια μιας προσομοίωσής του.

Ανοίξτε το αρχείο proboleas του λογισμικού. Στην οθόνη προβάλλονται:



α) Μία προσομοίωση του προβολέα ΣΠ, ο οποίος εστιάζει σε ένα ύψος ΟΕ=h. Ο προβολέας μπορεί και μετακινείται μπρος πίσω από το σημείο Σ και να περιστρέφεται γύρω από το σημείο Π.
β) Οι μετρήσεις του ύψους h (χωρίς μονάδες μέτρησης) και της γωνίας φ του προβολέα με τον οριζόντιο άξονα.
γ) Το κουμπί «Δυναμικό σημείο Δ», με το οποίο εμφανίζεται ένα σημείο Δ που οι συντεταγμένες του μεταβάλλονται, καθώς περιστρέφεται ο προβολέας.
δ) Τα κουμπιά βοήθειας τα οποία μπορείτε να χρησιμοποιείτε, καθώς προσπαθείτε να απαντήσετε στις ερωτήσεις του φύλλου εργασίας.

Φύλλο εργασίας 1

1) Ελέγξτε με τη βοήθεια της προσομοίωσης και των μετρήσεων αν τα ποσά «γωνία φ» και «ύψος h» είναι ανάλογα ή όχι.

2) Διερευνήστε ποια από τις απαντήσεις του αρχικού ερωτήματος είναι η σωστή.

3) Υπολογίστε στο τετράδιό σας το ύψος h με βάση τη γωνία φ και την απόσταση ΟΣ του προβολέα.

4) Με βάση την προηγούμενη άσκηση, πώς μπορούμε να μετρήσουμε το ύψος ενός κτηρίου, χρησιμοποιώντας έναν προβολέα όπως εκείνον που εμφανίζεται στην προσομοίωση;

5) Υποθέστε ότι ο προβολέας μπορεί να περιστρέφεται και προς τα κάτω, δηλαδή ότι το h είναι πλέον βάθος και όχι ύψος. Εστιάστε σε βάθος 4 μονάδων. Με ποιον τρόπο το λογισμικό συμβολίζει το βάθος και την προς τα κάτω περιστροφή του προβολέα;

Οδηγίες και προτάσεις υλοποίησης

Αρχικά ο διδάσκων θα μπορούσε να ζητήσει από τους μαθητές να διαπραγματευτούν την αρχική ερώτηση και κατόπιν να εκτελέσουν το πείραμα που περιγράφει το φύλλο εργασίας, εφόσον είναι δυνατόν, με ένα μικρό λέιζερ. Αυτό που αναμένεται να διαπιστώσουν οι μαθητές είναι ότι η σχέση γωνίας και ύψους δεν είναι γραμμική, οπότε δημιουργείται η αφόρμιση για διερεύνηση μέσω της προσομοίωσης.

- Στην πρώτη άσκηση οι μαθητές θα περιστρέψουν τον προβολέα από το σημείο Π. Καλό θα είναι η μελέτη των μετρήσεων του ύψους και της γωνίας να μην γίνει με τυχαίες τιμές, αλλά, όσον αφορά στις τιμές της γωνίας, να έχουν συγκεκριμένη σχέση μεταξύ τους. Για παράδειγμα, μπορεί να επιλέξουν ως γωνία τις 10^o, να μετρήσουν το ύψος και στη συνέχεια να περιστρέψουν τον προβολέα στις 20^o, για να μελετήσουν τη μεταβολή του ύψους.

- Στη δεύτερη άσκηση οι μαθητές θα μετρήσουν την απόσταση ΟΣ και θα σύρουν το σημείο σε απόσταση 4 μονάδων από το Ο. Στη συνέχεια θα περιστρέψουν τον προβολέα, έως ότου το h πάρει την τιμή 4, οπότε και θα καταγράψουν την τιμή της γωνίας. Ακολούθως θα περιστρέψουν τον προβολέα, ώστε το h να γίνει 8, και θα καταγράψουν την τιμή της γωνίας. Συγκρίνοντας τις δύο τιμές της γωνίας, θα εντοπίσουν τη σωστή απάντηση.

- Στην τρίτη άσκηση οι μαθητές, με τη βοήθεια του διδάσκοντα, θα χρησιμοποιήσουν την τριγωνομετρική εφαπτομένη, προκειμένου να υπολογίσουν το ύψος από τον τύπο $h = ΟΣ \cdot εφφ$.

- Στην τέταρτη άσκηση οι μαθητές θα διαπραγματευτούν μια διαδικασία, μέσω της οποίας θα αξιοποιήσουν τον εικονικό προβολέα. Η διαδικασία αυτή καλό θα είναι να καταγραφεί βήμα προς βήμα. Για παράδειγμα:
  α) Μέτρηση της απόστασης από τον τοίχο
  β) Περιστροφή έως ότου η ακτίνα φωτός φτάσει στην κορυφή του κτηρίου
  γ) Μέτρηση της γωνίας και εφαρμογή του τύπου $h = ΟΣ \cdot εφφ$.

- Στόχος της πέμπτης άσκησης είναι να προετοιμάσει τους μαθητές για τις αρνητικές τιμές τόσο της γωνίας όσο και του ύψους, ώστε στη συνέχεια να αποδώσουν νόημα στην αρνητική περιοχή της γραφικής παράστασης που θα προκύψει.

Φύλλο εργασίας 2

Τώρα πλέον είναι ευκαιρία να δούμε ποια είναι η γραφική παράσταση της σχέσης που συνδέει τη γωνία φ με το ύψος h.

1) Εμφανίστε το σημείο Δ και μετρήστε τις συντεταγμένες του. Περιστρέψτε τον προβολέα και συγκρίνετε τις συντεταγμένες του Δ με τις μετρήσεις που προβάλλονται στην οθόνη. Τι παρατηρείτε;

2) Εμφανίστε το ίχνος του σημείου Δ και περιστρέψτε τον προβολέα. Ποια είναι η μορφή της καμπύλης που δημιουργείται; Ποια είναι η συνάρτηση της οποίας η γραφική παράσταση είναι η καμπύλη που εμφανίστηκε;

3) Σύρετε το σημείο Σ, έως ότου η απόστασή του από το Ο γίνει 1. Επαναλάβετε την κατασκευή της γραφικής παράστασης. Ποια σχέση παριστάνεται τώρα με τη συγκεκριμένη καμπύλη;

4) Κατασκευάστε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης που αντιστοιχεί στη σχέση που βρήκατε με τη βοήθεια του λογισμικού. Τι σχέση έχει η καμπύλη που κατασκεύασε το ίχνος του Δ με τη γραφική παράσταση που κατασκεύασε το λογισμικό;

5) Είναι η συνάρτηση περιοδική; Ποια είναι η περίοδος; Είναι άρτια ή περιττή συνάρτηση;

6) Μεταφέρετε το σημείο Σ σε απόσταση 2 μονάδων από το Ο και κατασκευάστε την καμπύλη του ίχνους του Δ. Ποιας συνάρτησης η γραφική παράσταση εμφανίζεται στην οθόνη;

Οδηγίες και προτάσεις υλοποίησης

Πριν από την υλοποίηση της γραφικής παράστασης μέσω του λογισμικού, ο διδάσκων θα διαπραγματευτεί με τους μαθητές τη μορφή που θα έχει η γραφική παράσταση της σχέσης που συνδέει το ύψος με τη γωνίας. Οι μαθητές θα ισχυριστούν ότι η γραφική παράσταση πρέπει να είναι μία καμπύλη, αφού η σχέση δεν είναι γραμμική.

- Στην πρώτη άσκηση οι μαθητές θα εμφανίσουν το δυναμικό σημείο Δ με το αντίστοιχο κουμπί. Εδώ ο διδάσκων θα μπορούσε, αν το κρίνει εφικτό, να ζητήσει από τους μαθητές να κατασκευάσουν οι ίδιοι το δυναμικό σημείο. Στη συνέχει θα διαβάσουν την οδηγία για τις συντεταγμένες του σημείου και θα εμφανίσουν τις μετρήσεις των συντεταγμένων του Δ. Οι μαθητές αναμένεται να παρατηρήσουν ότι οι συντεταγμένες του σημείου είναι η γωνία (σε ακτίνια) και το ύψος. Στο σημείο αυτό ο διδάσκων θα πρέπει να συζητήσει με τους μαθητές του το γεγονός ότι καθώς θα μεταβάλλεται η γωνία, το Δ θα διαγράψει τη γραφική παράσταση της σχέσης που συνδέει τη γωνία με το ύψος.

- Στη δεύτερη άσκηση οι μαθητές θα δημιουργήσουν την καμπύλη της σχέσης $h = ΟΣ \cdot εφφ$ και με τη βοήθεια του διδάσκοντα θα τη μετασχηματίσουν σε $f(x) = (ΟΣ) \cdot εφx$.

- Στόχος της τρίτης άσκησης είναι οι μαθητές να κατασκευάσουν τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = εφx$, αφού το μήκος του τμήματος ΟΣ είναι 1.

- Στην τέταρτη άσκηση οι μαθητές θα κατασκευάσουν τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $h = ΟΣ \cdot εφφ$ και θα διαπιστώσουν ότι συμπίπτει με την καμπύλη που έχει διαγράψει το σημείο Δ, όταν ΟΣ έχει μία τυχαία τιμή.

- Στην πέμπτη άσκηση ο διδάσκων θα διαπραγματευτεί με τους μαθητές το γεγονός ότι η γραφική παράσταση εμφανίζεται σε τμήματα, με στόχο να διατυπώσουν την άποψη ότι η συνάρτηση είναι περιοδική. Η συμμετρία ως προς την αρχή των αξόνων θα οδηγήσει τους μαθητές στο συμπέρασμα ότι η συνάρτηση είναι περιττή. Ο διδάσκων θα ζητήσει από τους μαθητές να αποδείξουν με καθαρά αλγεβρικό τρόπο ότι η συνάρτηση είναι περιττή.

- Στην τελευταία άσκηση οι μαθητές θα δημιουργήσουν την καμπύλη της συνάρτησης $f(x) = 2εφχ$ με το ίχνος του σημείου Δ. Αυτό που θα μπορούσε να επισημανθεί είναι το γεγονός ότι σε κάθε περίπτωση η γραφική παράσταση διαθέτει κατακόρυφη ασύμπτωτη, η οποία αποκτά και φυσικό νόημα, όταν ο προβολέας περιστραφεί κατά γωνία που πλησιάζει τις 90^o.

2η Δραστηριότητα: Η ΠΙΣΙΝΑ

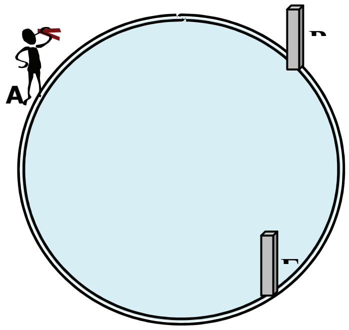
Διάρκεια της δραστηριότητας: 1-2 διδακτικές ώρες

Τάξη: Β΄ Λυκείου

Γνωστικό αντικείμενο:
- Ο νόμος των ημιτόνων

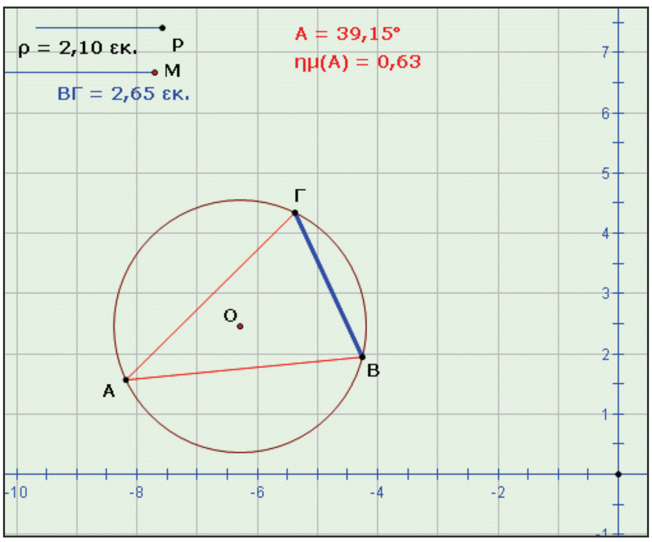
Η κατάσταση προβλήματος
Ο υπολογισμός της ακτίνας ενός κύκλου, όταν είναι γνωστή μία εγγεγραμμένη γωνία και η αντίστοιχη χορδή, μπορεί να αποτελέσει το μαθηματικό περιεχόμενο πραγματικών προβλημάτων. Ο κύκλος μπορεί να είναι το μαθηματικό μοντέλο μιας πισίνας, ενώ η εγγεγραμμένη γωνία μπορεί να προέρχεται από ένα γωνιόμετρο τοποθετημένο στην περιφέρειά της.
Οι μαθητές, με βάση ένα πρόβλημα υπολογισμού της ακτίνας μιας πισίνας, θα εντοπίσουν τη σχέση που συνδέει το ημίτονο μιας γωνίας τριγώνου με την απέναντι πλευρά και την ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου.

Φύλλο εργασίας



Ο άνθρωπος στην παραπάνω εικόνα θέλει να υπολογίσει την ακτίνα της πισίνας, στην οποία όμως δεν έχει πρόσβαση, αφού είναι γεμάτη νερό. Διαθέτει ένα γωνιόμετρο, ένα όργανο δηλαδή με το οποίο μπορεί να μετρήσει τη γωνία ΒΑΓ, ενώ γνωρίζει ήδη την απόσταση ΒΓ των δύο πασάλων που βρίσκονται στα σημεία Β και Γ της περιφέρειας της πισίνας. Ας προσπαθήσουμε να λύσουμε το πρόβλημα αυτό μέσα από μια προσομοίωσή του.

Ανοίξτε το αρχείο Metrisi pisinas του λογισμικού. Στην οθόνη προβάλλονται:



Ένας κύκλος κέντρου Ο, στον οποί έχει εγγραφεί ένα τρίγωνο ΑΒΓ. Η κορυφή Α μπορεί να κινείται πάνω στον κύκλο με σύρσιμο.
Δύο μεταβολείς με άκρα Ρ και Μ, με τους οποίους μπορούμε να μεταβάλλουμε την ακτίνα ρ του κύκλου και το μήκος της πλευράς ΒΓ, αντίστοιχα.
Οι μετρήσεις της ακτίνας ρ και της πλευράς (χορδής) ΒΓ.

Η μέτρηση της γωνίας Α του τριγώνου, καθώς και το ημίτονο της γωνίας.
Ένα κουμπί βοήθειας με το οποίο εμφανίζονται υποδείξεις για την κατασκευή ενός δυναμικού σημείου με συγκεκριμένες συντεταγμένες.
Ένα δεύτερο κουμπί βοήθειας, το οποίο θα σας χρησιμεύσει όταν κληθείτε να κάνετε κάποια απόδειξη.

1) Σύρετε το σημείο Ρ και στη συνέχεια το σημείο Μ. Σημειώστε τα ποσά που μεταβάλλονται κάθε φορά.

2) Στόχος μας είναι να εντοπίσουμε τις σχέσεις μεταξύ των ποσών αυτών. Παρατηρήστε και καταγράψτε αρκετές μετρήσεις των ποσών που μεταβάλλονται, μόλις σύρετε το σημείο Ρ. Φαίνεται από τις μετρήσεις να ισχύει κάποια σχέση;

3) Παρατηρήστε και καταγράψτε αρκετές μετρήσεις των ποσών που μεταβάλλονται, μόλις σύρετε το σημείο Μ. Φαίνεται από τις μετρήσεις να ισχύει κάποια σχέση;

4) Κατασκευάστε ένα δυναμικό σημείο με συντεταγμένες (ημ(Α), ρ) και εμφανίστε το ίχνος του. Μεταβάλετε την ακτίνα ρ. Διαπραγματευτείτε την καμπύλη που φαίνεται να διαγράφει το δυναμικό σημείο. Ποια σχέση θα μπορούσε να συνδέει τα δύο ποσά;

5) Με τη βοήθεια των μετρήσεων επιβεβαιώστε ή απορρίψτε την απάντησή σας στο προηγούμενο ερώτημα.

6) Κατασκευάστε ένα δυναμικό σημείο με συντεταγμένες (ημ(Α), ΒΓ) και εμφανίστε το ίχνος του. Μεταβάλετε την πλευρά ΒΓ. Διαπραγματευτείτε την καμπύλη που φαίνεται να διαγράφει το δυναμικό σημείο. Ποια σχέση θα μπορούσε να συνδέει τα δύο ποσά;

7) Με τη βοήθεια των μετρήσεων επιβεβαιώστε ή απορρίψτε την απάντησή σας στο προηγούμενο ερώτημα.

8) Διατυπώστε μία πρόταση με την οποία θα εκφράζετε τον τρόπο που συνδέονται τα ποσά ΒΓ, Ρ, ημ(Α).

9) Ας υποθέσουμε τώρα ότι θέλετε να περιγράψετε στον άνθρωπο του αρχικού προβλήματος μία διαδικασία με την οποία θα καταφέρει να μετρήσει την ακτίνα της πισίνας. Τι θα τον συμβουλεύατε να κάνει, χρησιμοποιώντας και το γωνιόμετρο;

10) Ωστόσο, μία πρόταση, η οποία στηρίζεται μόνο σε μετρήσεις και γραφικές παραστάσεις, κινδυνεύει να θεωρηθεί μη έγκυρη από αυστηρά μαθηματική άποψη. Κάντε μία γενική απόδειξη της πρότασης, χρησιμοποιώντας την αντίστοιχη βοήθεια από την οθόνη.

Οδηγίες και προτάσεις υλοποίησης
Αρχικά ο διδάσκων ζητά από τους μαθητές να αναγνωρίσουν την προσομοίωση της πραγματικής κατάστασης στο αρχείο που ήδη έχουν ανοίξει.

- Στόχος της πρώτης άσκησης είναι οι μαθητές να διαπιστώσουν ότι με το σημείο Ρ μεταβάλλεται η ακτίνα, η γωνία Α και το ημίτονό της, ενώ με το σημείο Μ μεταβάλλεται η χορδή ΒΓ, η γωνία Α και το ημίτονό της.

- Στη δεύτερη άσκηση οι μαθητές αναμένεται να διαπιστώσουν ότι καθώς αυξάνεται η ακτίνα ρ, μειώνεται η τιμή του ημιτόνου της γωνίας Α. Ο διδάσκων μπορεί να ζητήσει από τους μαθητές να ελέγξουν αν τα δύο ποσά είναι αντιστρόφως ανάλογα, επιλέγοντας και καταγράφοντας τις κατάλληλες τιμές για την ακτίνα ρ και τις αντίστοιχες τιμές του ημιτόνου της γωνίας Α.

- Στην τρίτη άσκηση οι μαθητές αναμένεται να διαπιστώσουν ότι καθώς αυξάνεται η χορδή ΒΓ, αυξάνεται και η τιμή του ημιτόνου της γωνίας Α. Ο διδάσκων μπορεί να ζητήσει από τους μαθητές να ελέγξουν αν τα δύο ποσά είναι ανάλογα, επιλέγοντας και καταγράφοντας τις κατάλληλες τιμές για το τμήμα ΒΓ και τις αντίστοιχες τιμές του ημιτόνου της γωνίας Α.

- Στην τέταρτη άσκηση οι μαθητές θα κατασκευάσουν ένα δυναμικό σημείο με συντεταγμένες (ρ, ημΑ), εμφανίζοντας όμως τις αντίστοιχες οδηγίες με το κατάλληλο κουμπί. Το ίχνος του δυναμικού σημείου θα διαγράψει τμήμα καμπύλης που παραπέμπει σε υπερβολή και αντιστρόφως ανάλογα ποσά. Με τον τρόπο αυτό θα ενισχυθεί η αρχική εικασία για τη σχέση των δύο αυτών ποσών.

- Στην πέμπτη άσκηση οι μαθητές θα βρουν το γινόμενο των αντίστοιχων τιμών των δύο ποσών και θα διαπιστώσουν ότι αν μεταβάλλουν τις τιμές της ακτίνας ρ, το γινόμενο θα παραμείνει σταθερό.

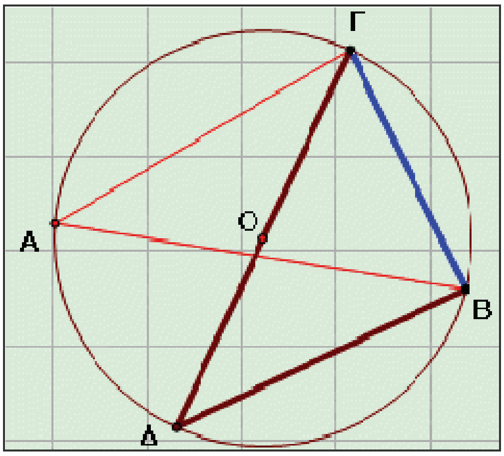
- Στην έκτη άσκηση οι μαθητές θα κατασκευάσουν ένα δυναμικό σημείο με συντεταγμένες (ημΑ, ΒΓ), εμφανίζοντας όμως τις αντίστοιχες οδηγίες με το ακατάλληλο κουμπί. Το ίχνος του δυναμικού σημείου θα διαγράψει τμήμα ευθείας που παραπέμπει σε ανάλογα ποσά. Με τον τρόπο αυτό θα ενισχυθεί η αρχική εικασία για τη σχέση των δύο αυτών ποσών.

- Στην έβδομη άσκηση οι μαθητές θα βρουν το λόγο των αντίστοιχων τιμών των δύο ποσών και θα διαπιστώσουν ότι αν μεταβάλλουν τις τιμές της χορδής ΒΓ, ο λόγος των δύο ποσών θα παραμείνει σταθερός και μάλιστα θα είναι ίσος με το διπλάσιο της ακτίνας.

- Στην όγδοη άσκηση μπορεί πλέον να γίνει μία διατύπωση του νόμου η οποία θα έχει τη μορφή: «Αν ένα τρίγωνο είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο, τότε ο λόγος μιας πλευράς προς το ημίτονο της απέναντι γωνίας είναι σταθερός και ίσος με το διπλάσιο της ακτίνας».

- Με βάση τον παραπάνω κανόνα, και ιδιαίτερα τη γραμμική σχέση που έχουν ανακαλύψει, οι μαθητές μπορούν να περιγράψουν έναν τρόπο υπολογισμού της απόστασης δύο σημείων που βρίσκονται στην περιφέρεια ενός κύκλου γνωστής ακτίνας.

- Στην τελευταία άσκηση οι μαθητές θα κάνουν μία απόδειξη του νόμου των ημιτόνων. Συγκεκριμένα, με το κουμπί της βοήθειας για την απόδειξη θα εμφανίσουν το ορθογώνιο τρίγωνο ΓΒΔ, του οποίου η γωνία Δ είναι ίση με την Α και στο συγκεκριμένο τρίγωνο ισχύει ΒΓ/ημ(Δ)=2ρ.



3.4 Δραστηριότητες για τη Γ' Λυκείου

Οι δραστηριότητες: «ΑΝΑΖΗΤΗΣΗ ΤΗΣ ΒΕΛΤΙΣΤΗΣ ΘΕΣΗΣ»

Η βασική ιδέα του σεναρίου

Οι δραστηριότητες που ακολουθούν αναφέρονται σε προβλήματα που ανάγονται στην εύρεση της μέγιστης γωνίας, όταν αυτή μεταβάλλεται με κάποιον κανόνα. Οι μαθητές, κυρίως της Γ΄ Λυκείου, καλούνται να διερευνήσουν και να λύσουν δύο προβλήματα τα οποία στην ουσία αναφέρονται στην ίδια κατάσταση.

Το πρώτο πρόβλημα αναφέρεται στον επισκέπτη μιας έκθεσης ζωγραφικής ο οποίος ενδιαφέρεται να μάθει σε ποια θέση θα πρέπει να σταθεί, ώστε να επιτύχει τη μέγιστη οπτική γωνία με την οποία θα παρατηρεί τον πίνακα που βρίσκεται σε έναν τοίχο.

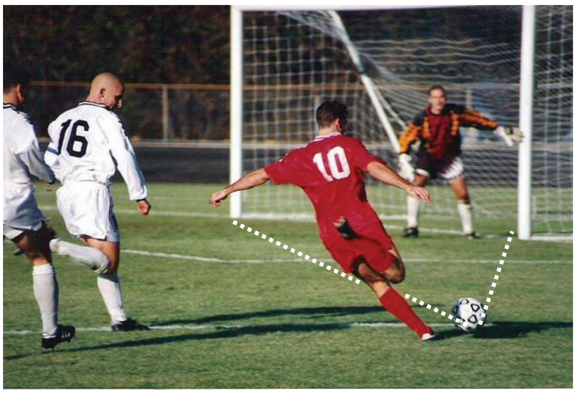
Το συγκεκριμένο πρόβλημα παρουσιάζει διδακτικό ενδιαφέρον, αφού επιτρέπει στους μαθητές να διερευνήσουν ένα πλήθος περιπτώσεων, καθώς οι παράμετροι που εισέρχονται στο πρόβλημα είναι αρκετές.

Οι παράμετροι αυτές είναι το ύψος του επισκέπτη, η απόστασή του από τον πίνακα, το ύψος του πίνακα και το ύψος στο οποίο βρίσκεται ο πίνακας.

Η εικόνα τον 5/2008 είναι στο δικτυακό κόμβο ArtRoots στην ενότητα «Επίσκεψη στο Σαράτοφ της Ρωσίας» και η διεύθυνσή της είναι: http://artroots.com/artstore/russian5/saratovtrip2005.htm

Στο δεύτερο πρόβλημα οι μαθητές θα πρέπει να μελετήσουν μία πραγματική κατάσταση που αναφέρεται στο ποδόσφαιρο. Συγκεκριμένα, θα αναζητήσουν τη θέση εκείνη του παίκτη στην οποία βλέπει με τη μέγιστη γωνία το τέρμα. Προφανώς, η θέση αυτή είναι πλεονεκτική, αφού από εκεί έχει και τις μεγαλύτερες πιθανότητες να επιτύχει τέρμα.

Εδώ το διδακτικό ενδιαφέρον εστιάζεται αφενός στην ομοιότητα του προβλήματος με το προηγούμενο και αφετέρου στην ανάγκη να κατασκευάσουν οι μαθητές ένα μοντέλο του χώρου του γηπέδου με βάση τις πληροφορίες που έχουν στη διάθεσή τους από ένα συμπληρωματικό κείμενο.



Η εικόνα έχει τίτλο *Football iu 1996.jpg* και προέρχεται από τη Βικιπαίδεια, την ελεύθερη εγκυκλοπαίδεια

Η σταδιακή μαθηματικοποίηση των προβλημάτων και η μελέτη ή κατασκευή ενός κατάλληλου δυναμικού μοντέλου στον υπολογιστή θα δώσει στους μαθητές την ευκαιρία να διερευνήσουν τη συναρτησιακή σχέση γωνιακών και γραμμικών μεγεθών. Ακόμη θα αναζητήσουν τις βέλτιστες θέσεις, άρα και τις μέγιστες τιμές τους μέσα από τη γραφική τους παράσταση. Τέλος θα εμπλακούν σε διαδικασίες ερμηνείας πραγματικών καταστάσεων μέσα από τα μαθηματικά μοντέλα που θα κατασκευάσουν.

Η μελέτη των δύο παραπάνω προβλημάτων έχει στόχο να οδηγήσει τους μαθητές να αναγνωρίσουν ομοιότητες ως προς τα μαθηματικά εργαλεία που μπορούν να χρησιμοποιήσουν για τη διερεύνηση και λύση των προβλημάτων αυτών. Οι μαθηματικές σχέσεις που θα προκύψουν αναμένεται να εξελιχθούν από *μοντέλα των* συγκεκριμένων καταστάσεων σε *μοντέλα για* όμοιες καταστάσεις. Ο μετασχηματισμός αυτός αποτελεί κεντρική διδακτική στρατηγική σε μία RME και αναμένεται να υλοποιηθεί με την ολοκλήρωση των δραστηριοτήτων που αφορούν στο λύκειο.

1η Δραστηριότητα: Η ΒΕΛΤΙΣΤΗ ΟΠΤΙΚΗ ΓΩΝΙΑ

Διάρκεια της δραστηριότητας: 1-2 διδακτικές ώρες

Τάξη: Γ΄ Λυκείου

Γνωστικό αντικείμενο:

- Εύρεση ακροτάτων συνάρτησης

Η κατάσταση προβλήματος

Η δραστηριότητα αυτή συνιστά μία εισαγωγή στη μελέτη του προβλήματος της μέγιστης **οπτικής γωνίας**. Ο τρόπος με τον οποίο οι μαθητές οδηγούνται στην αναζήτηση του κατάλληλου μοντέλου αναμένεται να αποτελέσει πρότυπο επεξεργασίας σε ανάλογα προβλήματα.

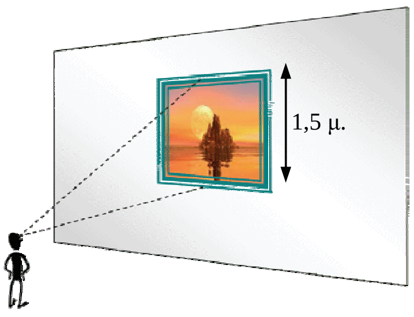
Η πορεία της διερεύνησης έχει ως αφετηρία την εικόνα ενός επισκέπτη μιας έκθεσης ζωγραφικής, ο οποίος στέκεται μπροστά σε έναν πίνακα. Στην αρχή οι μαθητές θα κατασκευάσουν ένα γεωμετρικό μοντέλο της κατάστασης και στη συνέχεια θα επιχειρήσουν να συνδέσουν την οπτική γωνία με την απόσταση του επισκέπτη από τον πίνακα. Η φάση αυτή θα μπορούσε να χαρακτηριστεί ως φάση του στατικού γεωμετρικού μοντέλου και οι μαθητές θα χρησιμοποιήσουν βασικές τριγωνομετρικές έννοιες και σχέσεις, προκειμένου να συνδέσουν τα μεγέθη.

Ακολουθεί η φάση της μελέτης ενός δυναμικού μοντέλου, δηλαδή μιας εικονικής γεωμετρικής προσομοίωσης στον υπολογιστή. Οι μαθητές, μέσα από κατάλληλες ερωτήσεις και βοήθειες, θα μελετήσουν τη συμπεριφορά του μοντέλου, καθώς μεταβάλλονται οι παράμετροι του προβλήματος, για παράδειγμα, το ύψος στο οποίο είναι αναρτημένος ο πίνακας, το ύψος του παρατηρητή και το μέγεθος του πίνακα.

Οι μαθητές θα πρέπει να γνωρίζουν του τύπους των τριγωνομετρικών αριθμών αθροίσματος και διαφοράς γωνιών.

Φύλλο εργασίας

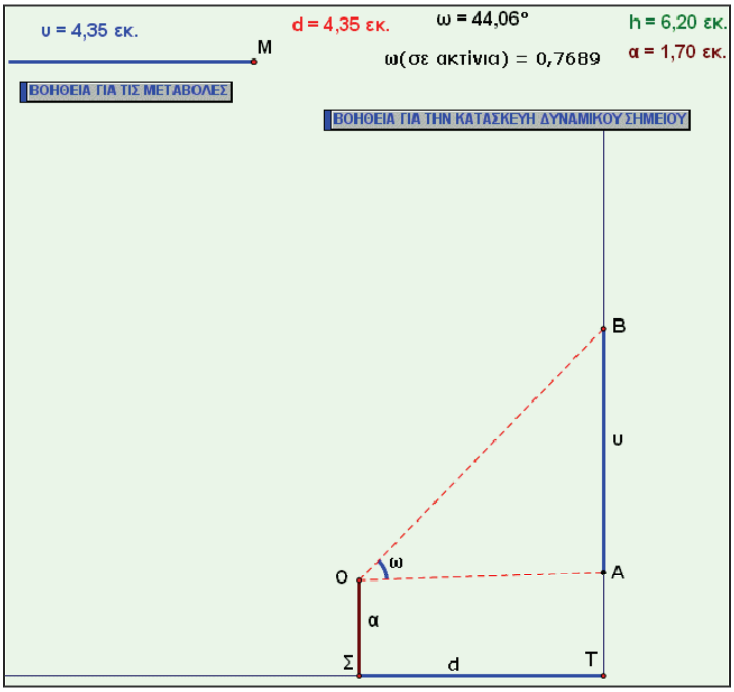
Ας υποθέσουμε ότι ο επισκέπτης μιας έκθεσης ζωγραφικής έχει ύψος α=1,70 μ. και θέλει να απολαύσει τον αγαπημένο του πίνακα που βρίσκεται σε μία από τις αίθουσες της έκθεσης. Το ύψος του πίνακα είναι υ=1,50 μ. και το πάνω μέρος του πίνακα απέχει από το πάτωμα h=3,5 μ. Το πρόβλημα που τίθεται είναι το εξής: Σε πόση απόσταση από τον πίνακα θα πρέπει να σταθεί, ώστε να έχει τη μέγιστη, άρα και τη βέλτιστη, οπτική γωνία;



1. Κατασκευάστε ένα γεωμετρικό μοντέλο της πραγματικής κατάστασης.
2. Κατασκευάστε μία σχέση που να συνδέει την απόσταση d του επισκέπτη από τον τοίχο με την τριγωνομετρική εφαπτομένη της οπτικής του γωνίας ω.

3. Μελετήστε τον τύπο (μοντέλο) που έχει προκύψει και μέσω αυτού εκτιμήστε την απόσταση στην οποία θα πρέπει να σταθεί ο επισκέπτης, για να έχει τη μέγιστη οπτική γωνία. Χρησιμοποιήστε αποκλειστικά μαθηματικές μεθόδους για τον εντοπισμό μεγίστων ελαχίστων. Με ποιον τρόπο αυξάνεται ή ελαττώνεται η οπτική μας γωνία σε σχέση την απόσταση d;

4. Ανοίξτε το αρχείο model_1. Εντοπίστε τα μεγέθη που μεταβάλλονται και μελετήστε τον τρόπο με τον οποίο η μεταβολή καθενός από τα μεγέθη αυτά επηρεάζει τη μέγιστη τιμής της γωνίας. Χρησιμοποιήστε τις μετρήσεις που προβάλλονται στην οθόνη.



5. Κατασκευάστε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης (μοντέλου) που δημιουργήσατε στη δεύτερη άσκηση. Ποιες ιδιότητες της συνάρτησης μπορούμε να αναγνωρίσουμε από τη γραφική παράσταση;

6. Βρείτε (κατά προσέγγιση) τη μέγιστη τιμή της συνάρτησης με βάση τη γραφική της παράσταση. Σε ποια απόσταση εμφανίζεται η μέγιστη τιμή; Συγκρίνετε το αποτέλεσμα αυτό με την απάντηση που δώσατε στην τρίτη άσκηση.

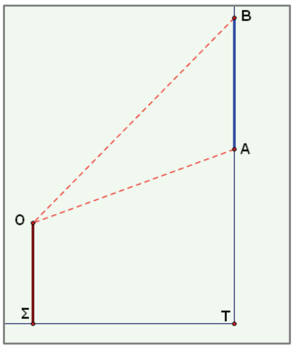
7. Ποιες μεταβολές υφίσταται η γραφική παράσταση, όταν μεταβάλλουμε το υ;

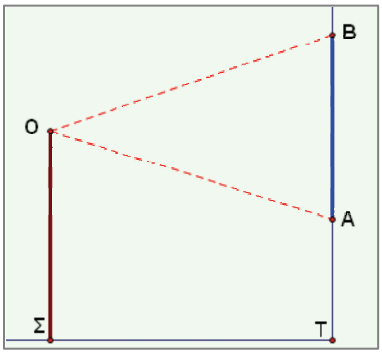
8. Ποιες μεταβολές υφίσταται η γραφική παράσταση, όταν μεταβάλλουμε το h;

Οδηγίες και προτάσεις υλοποίησης

Καταρχάς οι μαθητές θα μελετήσουν την έννοια της **οπτικής γωνίας**, ώστε να εισάγουν στη συνέχεια την έννοια αυτή στη μαθηματική επεξεργασία του προβλήματος. Επιπλέον, ο διδάσκων θα μπορούσε να δημιουργήσει μία πραγματική κατάσταση όμοια με εκείνη του προβλήματος. Συγκεκριμένα μπορεί να ζητήσει από τους μαθητές να σταθούν μπροστά σε μία εικόνα που έχει αναρτηθεί στον τοίχο και να διαπραγματευτεί μαζί τους τον τρόπο με τον οποίο επηρεάζεται η οπτική τους αντίληψη σε σχέση με την απόστασή τους από τον τοίχο.

- Στην πρώτη άσκηση οι μαθητές θα κατασκευάσουν ένα γεωμετρικό μοντέλο της πραγματικής κατάστασης, αφού πρώτα διαπραγματευτούν τα γεωμετρικά μεγέθη που εμπλέκονται με αυτήν. Καλό θα είναι ο διδάσκων να οδηγήσει τους μαθητές, με κατάλληλες ερωτήσεις, να κατασκευάσουν δύο τουλάχιστον μοντέλα.



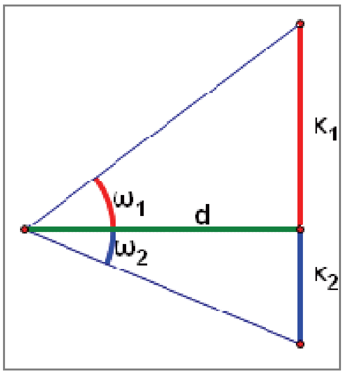


Αυτό που πρέπει να γίνει αντιληπτό από τους μαθητές είναι ότι μόνο το μοντέλο, στο οποίο το κάτω άκρο της εικόνα βρίσκεται σε ψηλότερο σημείο από ό,τι ο οφθαλμός του παρατηρητή, παρουσιάζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον. Το μοντέλο, στο οποίο η εικόνα βρίσκεται στο ύψος του παρατηρητή, οδηγεί στο συμπέρασμα ότι όσο πιο κοντά βρίσκεται ο παρατηρητής, τόσο μεγαλύτερη είναι και η οπτική του γωνία.

- Στη δεύτερη άσκηση οι μαθητές θα πρέπει να συμπληρώσουν κατάλληλα το μοντέλο, ώστε να δημιουργηθούν τα απαραίτητα τρίγωνα μέσα στα οποία θα ενσωματωθούν τα μεγέθη που πρόκειται να συνδεθούν.

  Στην περίπτωση που ο παρατηρητής βρίσκεται απέναντι από τον πίνακα, τότε η οπτική του γωνία ω θα μπορούσε να συνδεθεί με την απόσταση d του παρατηρητή και με το γραμμικό μέγεθος (ύψος κ) του πίνακα. Η σύνδεση αυτή θα πραγματοποιηθεί με την εφαρμογή των κατάλληλων τύπων της τριγωνομετρίας σε επιλεγμένα ορθογώνια τρίγωνα.

  Μία ενδεικτική συσχέτιση μεταξύ της γωνίας $\omega=\omega_1+\omega_2$ και της απόστασης d θα μπορούσε να γίνει ως εξής:

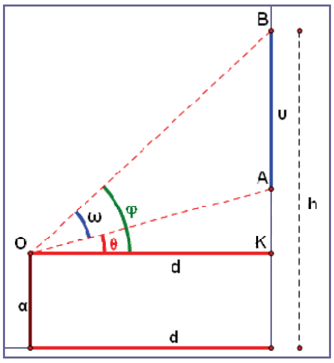


Αφού $\omega=\omega_1+\omega_2$, άρα $\varepsilon\varphi\omega=\varepsilon\varphi(\omega_1+\omega_2)$ και με βάση το σχήμα έχουμε

$$\varepsilon\varphi\omega=\frac{\varepsilon\varphi\omega_1+\varepsilon\varphi\omega_2}{1-\varepsilon\varphi\omega_1.\varepsilon\varphi\omega_2},\ \text{επομένως}\ \varepsilon\varphi\omega=\frac{\frac{\kappa_1}{d}+\frac{\kappa_2}{d}}{1-\frac{\kappa_1}{d}\cdot\frac{\kappa_2}{d}}=\frac{\kappa}{d^2-\kappa_1\cdot\kappa_2}.$$

Ενδιαφέρον παρουσιάζει εδώ το γεγονός ότι η ποσότητα αυτή γίνεται μέγιστη, για σταθερό d, όταν $\kappa_1=\kappa_2$, δηλαδή όταν το τρίγωνο είναι ισοσκελές, κάτι που υπαγορεύει και η κοινή εμπειρία μας για τη βέλτιστη θέση απέναντι σε μία εικόνα.

Στην περίπτωση που το κάτω άκρο Α του πίνακα βρίσκεται σε ψηλότερο σημείο από τον οφθαλμό Ο του παρατηρητή, τότε η συσχέτιση της οπτικής γωνίας ω και της απόστασης d του παρατηρητή θα μπορούσε ενδεικτικά να γίνει ως εξής:



εφω=εφ(φ-θ)(1), ενώ $εφφ=\frac{h-α}{d}$ και $εφθ=\frac{h-α-υ}{d}$

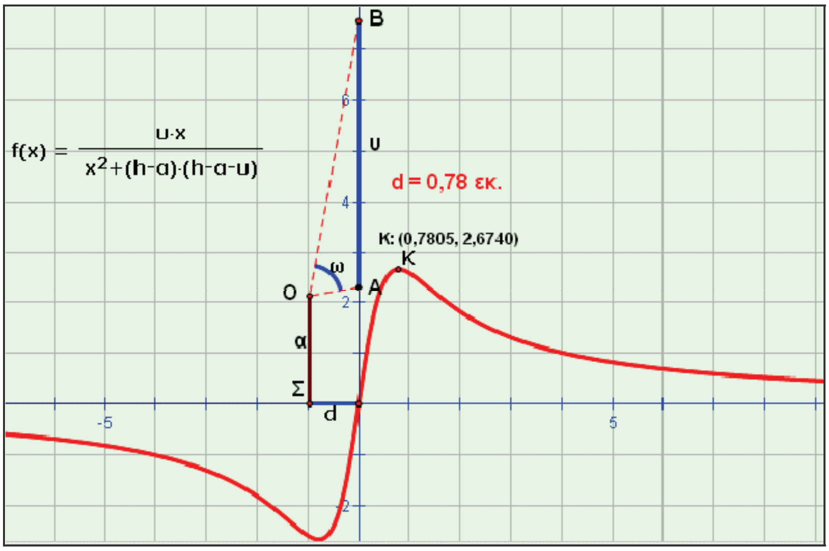
Από τη σχέση (1) προκύπτει ότι $εφω=\frac{εφφ-εφθ}{1+εφφ.εφθ}$ και επομένως $εφω=\frac{\frac{h-α-h+α+υ}{d}}{1+\frac{(h-α).(h-α-υ)}{d^2}}$, από όπου προκύπτει ότι $εφω=\frac{υ.d}{d^2+(h-α)(h-α-υ)}$, επομένως η συνάρτηση που υπολογίζει την τιμή της εφαπτομένης της γωνίας ω από την απόσταση d θα είναι η $f(x)=\frac{υ.x}{x^2+(h-α)(h-α-υ)}$.

- Στην τρίτη άσκηση οι μαθητές θα μελετήσουν τη σχέση ή τις σχέσεις που έχουν κατασκευάσει, προκειμένου να εντοπίσουν, όσο είναι εφικτό, την κατάλληλη τιμή του d και να επιτευχθεί, έτσι, η μέγιστη γωνία ω.
  Στην πρώτη περίπτωση της προηγούμενης άσκησης είναι φανερό ότι η μέγιστη τιμή για τη γωνία ω επιτυγχάνεται, αν μηδενιστεί η απόσταση d. Στη δεύτερη περίπτωση ο διδάσκων θα πρέπει να διαπραγματευτεί το γεγονός ότι αν μεγιστοποιηθεί η τριγωνομετρική εφαπτομένη της ω, δηλαδή η συνάρτηση $f(x)=\frac{υ.x}{x^2+(h-α)(h-α-υ)}$, τότε θα μεγιστοποιηθεί και η γωνία ω, αφού η τριγωνομετρική εφαπτομένη ως συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα.
  Εδώ οι μαθητές θα πρέπει να μελετήσουν την παράγωγο της συνάρτησης, τη μονοτονία και τα ακρότατα, με τη γνωστή μέθοδο που περιγράφουν τα σχολικά εγχειρίδια. Τα διαστήματα μονοτονίας της συνάρτησης θα τους επιτρέψουν να περιγράψουν τον τρόπο με τον οποίο αυξάνεται ή ελαττώνεται η εφαπτομένη της ω, άρα και η ίδια η ω.

- Στην τέταρτη άσκηση οι μαθητές θα μελετήσουν ένα έτοιμο μοντέλο της πραγματικής κατάστασης. Στην ουσία θα διερευνήσουν την κατάσταση προβλήματος μέσα από μία δυναμική γεωμετρική προσομοίωση.
  Στην αρχή θα πρέπει να αναγνωρίσουν τα διάφορα μεγέθη, που ήδη έχουν ενσωματώσει στο γεωμετρικό μοντέλο κατά τις προηγούμενες ασκήσεις, και να εξετάσουν τα σταθερά και μεταβλητά μεγέθη. Στη συνέχεια θα σύρουν το σημείο Σ και θα παρατηρήσουν ότι η τιμή της γωνίας ω γίνεται μέγιστη σε κάποιο σημείο της διαδρομής που έχει συγκεκριμένη απόσταση d από τον υποτιθέμενο τοίχο. Στη συνέχεια θα μεταβάλλουν το μήκος του τμήματος ΣΟ (ύψος του παρατηρητή) και θα μελετήσουν τη μετατόπιση του σημείου στο οποίο παρουσιάζεται το μέγιστο. Τέλος μπορούν να μεταβάλλουν τόσο το μέγεθος του πίνακα, σύροντας το σημείο Μ, όσο και το ύψος στο οποίο είναι αναρτημένος, σύροντας το σημείο Β. Σε καθεμία από τις παραπάνω ενέργειες οι μαθητές θα επιχειρήσουν να ερμηνεύσουν τη μετατόπιση του σημείου στο οποίο παρουσιάζεται μέγιστο, με τη βοήθεια του τύπου που έχουν κατασκευάσει και συνδέει τα διάφορα μεγέθη που διερευνούν.

- Στην πέμπτη άσκηση οι μαθητές θα κατασκευάσουν τη γραφική παράσταση της συνάρτησης με τις δυνατότητες που διαθέτει το λογισμικό και τη βοήθεια που εμφανίζεται στην οθόνη. Η αναγνώριση της οριζόντιας ασύμπτωτης (άξονας χ΄χ), καθώς και του ότι η συνάρτηση είναι περιττή, μπορεί να γίνει άμεσα από τη μορφή της γραφικής παράστασης. Η γραφική παράσταση που θα προκύψει θα αποτελέσει αντικείμενο διαπραγμάτευσης τόσο για τη μορφή της όσο και για τον τρόπο που αυτή αναπαριστά την πραγματική κατάσταση. Συγκεκριμένα οι μαθητές θα πρέπει να αναγνωρίσουν το γεγονός ότι η γωνία αρχίζει να αυξάνεται καθώς απομακρυνόμαστε από τον τοίχο, όπου έχει μηδενική τιμή, φτάνει σε μία μέγιστη τιμή και κατόπιν ελαττώνεται συνεχώς, χωρίς όμως να μηδενίζεται.

- Η κατά προσέγγιση εκτίμηση του μεγίστου μπορεί να γίνει, αν οι μαθητές κατασκευάσουν ένα σημείο Κ πάνω στη γραφική παράσταση, εμφανίσουν τις συντεταγμένες του και το σύρουν μέχρι την κορυφή της καμπύλης.



Στο σημείο αυτό θα μπορούσε να γίνει επιβεβαίωση, αν οι μαθητές σύρουν το σημείο Σ σε απόσταση ίση με την τετμημένη του σημείου, και παρατηρήσουν ότι σε αυτό το σημείο η τιμή της γωνίας ω είναι μέγιστη.

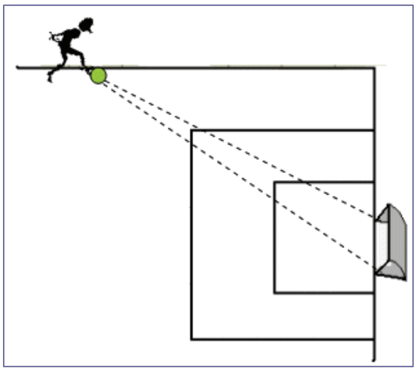
- Τέλος οι μαθητές θα διερευνήσουν τον τρόπο με τον οποίο οι μεταβολές των παραμέτρων h και υ επηρεάζουν τη μορφή της γραφικής παράστασης, καθώς και του μέγιστου της συνάρτησης.

2η Δραστηριότητα: Η ΒΕΛΤΙΣΤΗ ΘΕΣΗ ΣΤΟ ΠΟΔΟΣΦΑΙΡΟ

Στόχος της δραστηριότητας αυτής είναι να αποτελέσει συμπλήρωμα της προηγούμενης και κυρίως να οδηγήσει τους μαθητές στην αναγνώριση παρόμοιων προβλημάτων, δηλαδή προβλημάτων των οποίων η σταδιακή μαθηματικοποίηση ακολουθεί την ίδια περίπου πορεία.
Το πρόβλημα που θα μελετήσουν οι μαθητές αναφέρεται στο ποδόσφαιρο και όπως θα διαπιστώσουν, το ίδιο σχεδόν μαθηματικό μοντέλο μπορεί να είναι κατάλληλο σε φαινομενικά διαφορετικές καταστάσεις.
Εδώ ο σχεδιασμός προβλέπει μεγαλύτερη πρωτοβουλία από τους μαθητές τόσο ως προς την κατασκευή του γεωμετρικού στατικού μοντέλου, όσο και ως προς τη δημιουργία της προσομοίωσης με τη βοήθεια του γεωμετρικού λογισμικού.
Η διάρκεια της δραστηριότητας είναι 2 ώρες.

Φύλλο εργασίας

Ο ποδοσφαιριστής της εικόνας κατευθύνεται προς το αντίπαλο τέρμα και θέλει να μάθει ποια είναι η ιδανική θέση, ώστε να διαθέσει τη μέγιστη δυνατή γωνία για να εκτελέσει σουτ. Προφανώς θα πρέπει να υποθέσετε ότι η μπάλα θα έχει ευθύγραμμη και όχι καμπυλόγραμμη πορεία.



1. Κατασκευάστε ένα γεωμετρικό μοντέλο της πραγματικής κατάστασης. Φροντίσετε ώστε το μοντέλο να είναι όσο το δυνατόν πιο ρεαλιστικό. Χρησιμοποιήστε τις πληροφορίες που υπάρχουν για τις πραγματικές διαστάσεις του **αγωνιστικού χώρου**.

2. Κατασκευάστε μία σχέση που να συνδέει την απόσταση του παίκτη από τη γωνία του αγωνιστικού χώρου (corner) με τη γωνία υπό την οποία βλέπει ο παίκτης το τέρμα.

3. Μελετήστε τη σχέση (μοντέλο) που έχει προκύψει και μέσω αυτής εκτιμήστε την απόσταση από την οποία θα πρέπει ο παίκτης να εκτελέσει σουτ, για να έχει τη μέγιστη οπτική γωνία.

4. Σχεδιάστε και κατασκευάστε ένα δυναμικό εικονικό μοντέλο της κατάστασης με τη βοήθεια του λογισμικού.

5. Μελετήστε τη γραφική παράσταση της σχέσης που συνδέει την απόσταση του παίκτη από τη γωνία του αγωνιστικού χώρου (corner) με τη γωνία υπό την οποία βλέπει ο παίκτης το τέρμα.

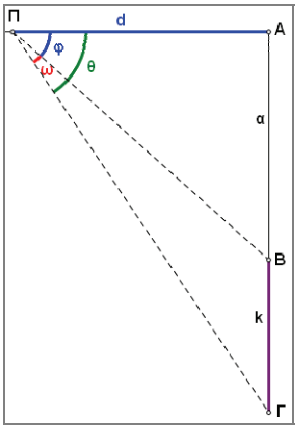
Οδηγίες και προτάσεις υλοποίησης

Στη συγκεκριμένη δραστηριότητα οι μαθητές θα μπορούσαν να εργαστούν χωρίς ιδιαίτερες υποδείξεις από το διδάσκοντα, αφού έχουν τη δυνατότητα να χρησιμοποιήσουν το μοντέλο που έχει προκύψει κατά την προηγούμενη δραστηριότητα. Στη συνέχεια παρατίθεται εν συντομία ένας από τους τρόπους με τους οποίους θα μπορούσε να υλοποιηθεί η δραστηριότητα.

- Στην πρώτη άσκηση οι μαθητές μελετούν πρώτα τις πληροφορίες για τον **αγωνιστικό χώρο** του γηπέδου, ώστε με βάση αυτές να κατασκευάσουν ένα όσο το δυνατόν πιο αξιόπιστο γεωμετρικό μοντέλο με ανάλογες διαστάσεις. Ο αγωνιστικός χώρος του σταδίου Καραϊσκάκη, για παράδειγμα, έχει διαστάσεις με λόγο $\frac{2}{3}$ και αποτελεί μία από τις δυνατότητες επιλογής των μαθητών.

Ακόμη πιο σημαντικός είναι ο υπολογισμός των διαστάσεων του τέρματος σε σχέση με το πλάτος του γηπέδου. Για παράδειγμα, η επιλογή πλάτους 51,1 μ. θα δώσει λόγο του τέρματος προς το πλάτος $\frac{1}{7}$.

- Στη δεύτερη άσκηση οι μαθητές θα σημειώσουν τις γωνίες που θα συνδεθούν με τα γραμμικά μεγέθη της πραγματικής κατάστασης.



Ένας ενδεικτικός τρόπος σύνδεσης των μεγεθών του προβλήματος έχει ως εξής:

ω=θ-φ και εφω=εφ(θ-φ), άρα $εφω=\frac{εφθ\text{-}εφφ}{1+εφθ.εφφ}$, οπότε $εφω=\frac{\frac{α+κ}{d}-\frac{α}{d}}{1+\frac{α+κ}{d}\cdot\frac{α}{d}}=\frac{κ.d}{d^2+(α+κ)\cdot α}$

Η συνάρτηση που υπολογίζει την εφαπτομένη της γωνίας ω σε σχέση με την απόσταση d είναι η $f(x)=\frac{κ.x}{x^2+(α+κ).α}$. Στη σχέση τώρα αυτή οι μαθητές μπορούν να αντικαταστήσουν τα α και κ με τις μετρήσεις των πραγματικών αποστάσεων στον αγωνιστικό χώρο και η συνάρτηση να έχει πλέον απόλυτη συμβατότητα με το πρόβλημα.

- Στην τρίτη άσκηση οι μαθητές θα διαπραγματευτούν τρόπους εντοπισμού της μέγιστης τιμής για τη συγκεκριμένη συνάρτηση. Οι μαθητές της Γ΄ Λυκείου, που έχουν διδαχτεί τον τρόπο υπολογισμού ακροτάτων συνάρτησης, θα μπορούσαν να επεξεργαστούν το ερώτημα με τη βοήθεια των παραγώγων. Η χρήση γραφικής παράστασης θα μπορούσε να δώσει ικανοποιητικά αποτελέσματα.

- Στην τέταρτη άσκηση οι μαθητές θα επιχειρήσουν να κατασκευάσουν ένα δυναμικό μοντέλο με βάση το σχήμα που έχουν δημιουργήσει στο τετράδιό τους. Αυτό που πρέπει να σημειωθεί είναι το ότι με το συγκεκριμένο λόγο $\frac{1}{7}$, στο μοντέλο που προκύπτει, η εστία έχει διαστάσεις πολύ μικρές, ενώ το ίδιο συμβαίνει και με τη γωνία.
  Για να ξεπεραστεί αυτό το πρόβλημα ο διδάσκων μπορεί να προτείνει στους μαθητές να κάνουν μία υπόθεση, σύμφωνα με την οποία ο παίκτης δεν κινείται πάνω στη γραμμή (ε) του πλαγίου άουτ, αλλά πάνω σε μία ευθεία γραμμή παράλληλα προς την (ε), από την οποία η εστία απέχει αρκετά μικρότερη απόσταση. Ένα έτοιμο μοντέλο βρίσκεται στο αρχείο model_2 του λογισμικού.

- Στην πέμπτη άσκηση οι μαθητές θα κατασκευάσουν τη γραφική παράσταση της f(x). Με βάση τις προηγούμενες δραστηριότητες δεν αναμένεται να συναντήσουν ιδιαίτερες δυσκολίες, αφού η δραστηριότητα εξελίσσεται όπως η προηγούμενη. Τέλος, θα ήταν χρήσιμο οι μαθητές να κάνουν μία σύνοψη των αποτελεσμάτων των δύο δραστηριοτήτων, όπου θα δίνουν έμφαση στην ομοιότητα και στις διαφορές των δύο μοντέλων-λύσεων που κατασκεύασαν.

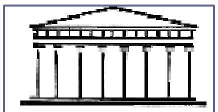
3.5 PROJECT ΛΥΚΕΙΟΥ – Θεματική ενότητα: Μαθηματικά μοντέλα της οπτικής μας αντίληψης

Η ιδέα του σεναρίου

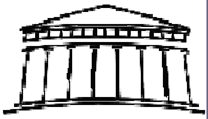
Η μελέτη προβλημάτων που σχετίζονται με την οπτική μας αντίληψη απασχολεί την ανθρώπινη κοινότητα εδώ και πολλούς αιώνες. Οι λόγοι ποικίλλουν, αλλά ένα από τους επικρατέστερους φαίνεται να είναι εκείνος που προέρχεται από την ανάγκη των αρχιτεκτόνων να διορθώσουν τις παραμορφώσεις που δημιουργούνται κατά την παρατήρηση κατασκευών που διαθέτουν μεγάλο ύψος. Ένα άγαλμα, για παράδειγμα, δεν διακρίνεται ομοιόμορφα από τον παρατηρητή, ο οποίος στέκεται στη βάση του, έτσι το κεφάλι του αγάλματος φαίνεται μικρότερο σε σχέση με το υπόλοιπο σώμα.

Αυτό ακριβώς το πρόβλημα είχαν παρατηρήσει και οι αρχαίοι Έλληνες και σε μία από τις πρώτες νύξεις που έγιναν βρίσκουμε τον Πλάτωνα να αναφέρει το γεγονός της κατασκευής μεγάλων κεφαλών στα αγάλματα, με στόχο τη διόρθωση της σμίκρυνσης που υφίσταται το απομακρυσμένο αντικείμενο.

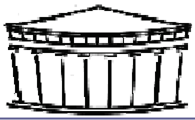
Εκεί που κατεξοχήν γίνεται επέμβαση στην οπτική μας αντίληψη είναι η κατασκευή του Παρθενώνα που αποτελεί χαρακτηριστικό παράδειγμα «διόρθωσης της οπτικής μας αντίληψης».



Ο Παρθενώνας όπως φαίνεται.



Ο Παρθενώνας όπως είναι κτισμένος.



Ο Παρθενώνας όπως θα φαινόταν, αν δεν είχε γίνει διόρθωση.

Ο Ευκλείδης φαίνεται ότι κάνει την πρώτη συστηματική προσπάθεια να ερμηνεύσει με καθαρά μαθηματικό τρόπο την οπτική μας αντίληψη και τις παραμορφώσεις που υφίσταται, όταν τα αντικείμενα βρίσκονται σε κάποια απόσταση από εμάς. Στο μικρό του έργο *Οπτικά* υπάρχουν προτάσεις που αφορούν στον τρόπο που βλέπουμε τα αντικείμενα, τις οποίες ο Ευκλείδης αποδεικνύει με τα βασικά μαθηματικά εργαλεία που διαθέτει.

Το σενάριο που ακολουθεί στηρίζεται στην ιδέα της επαναδιαπραγμάτευσης των προτάσεων, με τις οποίες ο Ευκλείδης ερμήνευσε την οπτική μας αντίληψη, με νεότερα μαθηματικά αλλά και τεχνολογικά εργαλεία. Συγκεκριμένα, η χρήση της τριγωνομετρίας και των αντίστροφων τριγωνομετρικών συναρτήσεων μας δίνει τη δυνατότητα να εκφράσουμε γωνίες συναρτήσει μηκών, ενώ η χρήση δυναμικών προσομοιώσεων στον υπολογιστή μας επιτρέπει να μελετήσουμε ένα οπτικό φαινόμενο, καθώς αυτό εξελίσσεται.

Παιδαγωγικό πλαίσιο

Μία από τις δυνατές διδακτικές, και όχι μόνο, προσεγγίσεις των μαθηματικών είναι και εκείνη που θεωρεί τις μαθηματικές έννοιες και προτάσεις ως αφηρημένα μοντέλα των αντικειμένων και των καταστάσεων του φυσικού μας χώρου. Η προσέγγιση αυτή έχει ιδιαίτερη διδακτική σημασία, όταν οι μαθητές εμπλέκονται σε διαδικασίες επίλυσης προβλήματος. Τα προβλήματα που αφορούν σε αυθεντικές πραγματικές καταστάσεις, δηλαδή σε καταστάσεις σχετικές με την εμπειρία και τα ενδιαφέροντα των μαθητών, είναι η αφετηρία της διδασκαλίας στο πλαίσιο μιας ρεαλιστικής μαθηματικής εκπαίδευσης.

Οι ρίζες της RME ανάγονται στις απόψεις του Freudenthal (1991), από τις οποίες τρεις είναι οι καθοριστικές για τις δραστηριότητες του σεναρίου:

- Τα μαθηματικά θα πρέπει να είναι συνδεδεμένα με πραγματικές καταστάσεις.
- Τα μαθηματικά αποτελούν μία ανθρώπινη δραστηριότητα η οποία συνίσταται στην αναδιοργάνωση των γνώσεων που ήδη υπάρχουν και των σχημάτων. Η αναδιοργάνωση αυτή έχει συνήθως την έννοια της μαθηματικοποίησης.
- Κεντρικό ρόλο στη μαθησιακή διαδικασία έχει ο μαθητής με τις προσδοκίες του, τις ιδιαιτερότητές του, τα πιστεύω του.

Σε αυτό το πλαίσιο αρχών, η διδασκαλία των μαθηματικών αναδεικνύεται σε καθοδηγούμενη ανακάλυψη από τους μαθητές, ενώ η λύση προβλήματος αποτελεί το κατεξοχήν διδακτικό εργαλείο

Με βάση τις παραπάνω επιστημολογικές θεωρήσεις θα μπορούσαμε να προσεγγίσουμε τα μαθηματικά και το περιεχόμενό τους ως ανθρώπινη δραστηριότητα, ενταγμένη στο κοινωνικό και πολιτισμικό πλαίσιο. Η δραστηριότητα αυτή έχει ως αφετηρία άτυπα αξιώματα και εικασίες που δημιουργούνται με βάση τη σωματικότητά μας, ενώ η διαδρομή προς την αυστηρή, τυπική έκφραση έχει την ίδια αξία με το τελικό προϊόν. Τα μαθηματικά δεν ανακαλύπτονται πλέον, αλλά επινοούνται ή, μάλλον, προκύπτουν ως αποτελέσματα επινοήσεων κυρίως, παρά ανακαλύψεων (Ernest 1996), και η αντικειμενική τους υπόσταση δομείται μέσω της διυποκειμενικής τους αποδοχής.

Οι δραστηριότητες, μέσω των οποίων επιλύεται ένα πραγματικό πρόβλημα, προσδιορίζονται από τον όρο μαθηματικοποίηση. Ως μαθηματικοποίηση ορίζουμε τη διαδικασία κατά την οποία οι μαθητές οργανώνουν τα δεδομένα ενός προβλήματος και στη συνέχεια τα επεξεργάζονται με καθαρά μαθηματικό τρόπο. Ο σχεδιασμός του παρόντος σεναρίου έχει ως στόχο να εμπλέξει τους μαθητές σε μια διαδικασία σταδιακής μαθηματικοποίησης ενός πραγματικού προβλήματος, μιας αυθεντικής κατάστασης που αφορά στην οπτική μας αντίληψη. Μέσα από τη διαδικασία αυτή αναμένεται να μετασχηματίσουν το αρχικό, μη μαθηματικό, πρόβλημα σε μαθηματικό πρόβλημα το οποίο θα οδηγήσει στη δημιουργία ενός μαθηματικού μοντέλου.

Η δημιουργία ενός μαθηματικού μοντέλου μιας πραγματικής κατάστασης έχει τη σημασία της μαθηματικής περιγραφής της κατάστασης αυτής, η οποία περιγραφή μας επιτρέπει την ερμηνεία της κατάστασης και επομένως την καλύτερη κατανόησή της. Γενικά η κατασκευή μοντέλων μιας πραγματικής κατάστασης έχει στόχο την κατανόησή της μέσα από τη διαδικασία δημιουργίας μιας κατάλληλης μαθηματικής δομής, δηλαδή οργάνωσης. Ούτως ή άλλως, δεν είναι δυνατόν να έρθουμε σε επαφή με τη φυσική πραγματικότητα, αν προηγουμένως δεν την έχουμε δομήσει με κάποιον τρόπο.

Κατά τη διαδικασία της μαθηματικοποίησης, τα μαθηματικά γίνονται μέρος του εννοιολογικού πλαισίου, το οποίο χρησιμοποιούμε για να μεταφράζουμε την πραγματικότητα, ενώ, χάρη σε αυτό, η καθημερινή πραγματικότητα δομείται κατά τρόπο μαθηματικό.

Σύμφωνα με το σχεδιασμό του συγκεκριμένου σεναρίου, οι μαθητές θα οδηγηθούν σε συσχέτιση μεγεθών, τα οποία δεν συνδέονται με κάποια από τις γνωστές συναρτήσεις που διδάσκονται στο λύκειο. Πρόθεση του σεναρίου είναι οι μαθητές να αναγνωρίσουν την ύπαρξη μαθηματικών εννοιών έξω από το πλαίσιο της σχολικής ύλης, οι οποίες προκύπτουν ως επέκταση ή μετασχηματισμός των γνωστών εννοιών. Χαρακτηριστικό παράδειγμα είναι η συνάρτηση f(x)=τοξοεφ(x) που επιτρέπει τον υπολογισμό μιας γωνίας, όταν είναι γνωστή η εφαπτομένη της.

Ορίζοντας την έννοια του μαθηματικού μοντέλου

Ο Fischbein (1977) ορίζει το μοντέλο μιας κατάστασης ως «μια απλοποιημένη εκδοχή της, η οποία μας επιτρέπει ευκολότερο και πληρέστερο έλεγχο των παραμέτρων της». Επιπλέον θεωρεί ότι ένα από τα βασικά χαρακτηριστικά που θα πρέπει να διαθέτει ένα μοντέλο, για να είναι αποτελεσματικό, είναι η καταλληλότητα της δομής του. Η καταλληλότητα αυτή μπορεί να εκτιμηθεί από την ισομορφία της δομής του μοντέλου προς τη δομή της αρχικής κατάστασης. Η γενική αντίληψη για τη σχέση κατάστασης προβλήματος και μοντέλου είναι ότι αποτελούν δύο ξεχωριστές οντότητες. Ο μαθητής θα πρέπει να έχει κατανοήσει τη διάκριση και να είναι σε θέση να αξιολογεί την καταλληλότητα του μοντέλου με βάση τη δεδομένη κατάσταση και τους στόχους που έχει αρχικά θέσει (Greer, 1997).

Αντιθέτως, στο πλαίσιο της RME, ένα μοντέλο είναι αποτέλεσμα μαθηματικοποίησης και προκύπτει κατά την προσπάθεια του μαθητή να δομήσει την κατάσταση στη διάρκεια δημιουργίας του μοντέλου. Αυτό σημαίνει ότι το μοντέλο αναδύεται σταδιακά και συγκροτείται μαζί με την κατάσταση προβλήματος, η οποία ερμηνεύεται με μαθηματικό τρόπο, δηλαδή μαθηματικοποιείται, μέσω της διαδικασίας κατασκευής του μοντέλου (Gravemeijer, 2002).

Η σχέση μοντέλου και πραγματικής κατάστασης είναι επομένως αμφίδρομη και κρίνουμε ότι παρουσιάζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον ο τρόπος με τον οποίο ένας μετασχηματισμός του μοντέλου μπορεί να ερμηνευτεί μέσω ενός μετασχηματισμού των παραμέτρων της κατάστασης προβλήματος. Αυτή ακριβώς η διερεύνηση είναι δυνατόν να υλοποιηθεί αποτελεσματικότερα με τη χρήση ενός κατάλληλου λογισμικού, μέσω του οποίου είναι δυνατόν να κατασκευαστεί μία προσομοίωση της κατάστασης προβλήματος.

Η χρήση υπολογιστή, εκτός από την οπτικοποίηση, επιτρέπει στο μαθητή να πειραματιστεί και να αναζητήσει ακραίες καταστάσεις του προβλήματος μέσα από μετρήσεις, συγκρίσεις, δυναμικές αλλαγές ή και παραμορφώσεις των σχημάτων (Arcavi & Hadas, 2000).

Συνοψίζοντας, θα μπορούσαμε να επισημάνουμε ότι στο πλαίσιο της RME η χρήση υπολογιστικών εργαλείων δίνει τη δυνατότητα δημιουργίας και διερεύνησης μοντέλων πραγματικών καταστάσεων, τα οποία πλέον προσεγγίζονται με δύο διαφορετικούς τρόπους, το συμβολικό και το δυναμικό.

Στο συγκεκριμένο σενάριο θεωρείται ως αφετηρία ένα ποιοτικό φαινόμενο, για παράδειγμα, η οπτική μας αντίληψη. Οι μαθητές μελετούν τρόπους με τους οποίους είχε παλαιότερα μελετηθεί το φαινόμενο αυτό και στη συνέχεια επιχειρούν μία διαφορετική μαθηματική προσέγγιση η οποία υποστηρίζεται και από τη χρήση της τεχνολογίας.

Το παιδαγωγικό πλαίσιο, στο οποίο θα υλοποιηθούν οι δραστηριότητες του σεναρίου, χαρακτηρίζεται από τη σύνθεση παλαιότερων και νεότερων μαθηματικών προσεγγίσεων ενός φαινομένου, με αυθεντικές διαδικασίες μαθηματικοποίησης.

Διδακτική αξία

Δύο από τους τέσσερις στόχους που περιγράφονται στο βιβλίο του καθηγητή για τη διδασκαλία των μαθηματικών στο λύκειο είναι οι εξής:

«Να ασκηθούν οι μαθητές στο να χρησιμοποιούν τα μαθηματικά όχι μόνο ως γνώση, αλλά και ως μέθοδο σκέψης και πράξης στην καθημερινή ζωή. Να έρθουν οι μαθητές σε επαφή με τις ποικίλες εφαρμογές των μαθηματικών στις άλλες επιστήμες και στη σύγχρονη πραγματικότητα». Επιπλέον, στις γενικές οδηγίες τονίζεται ότι: «Σε κάθε ώρα διδασκαλίας των μαθηματικών πρέπει να υπάρχει η προσωπική εργασία των μαθητών. Η τάξη πρέπει να είναι ένας τόπος όπου οι μαθητές δεν είναι παθητικοί δέκτες, αλλά θα εξερευνούν καταστάσεις, θα ανακαλύπτουν νέες γνώσεις και θα προσπαθούν να ερμηνεύουν και να χρησιμοποιούν τις γνώσεις που απέκτησαν» (*Εγχειρίδιο οδηγιών για τον διδάσκοντα*, τεύχος Β΄).

Εντούτοις, η διδασκαλία των μαθηματικών, ιδιαίτερα στις δύο τελευταίες τάξεις του λυκείου, πραγματοποιείται σε ένα ασφυκτικό πλαίσιο υποχρεώσεων που αφορούν στην ολοκλήρωση μιας συγκεκριμένης ύλης από συγκεκριμένα βιβλία και με συγκεκριμένες οδηγίες. Η συντριπτική πλειοψηφία των ασκήσεων των σχολικών εγχειριδίων αφορούν στην αυστηρή μαθηματική επεξεργασία ενός θέματος, ενώ η ύλη είναι κατανεμημένη σε διακριτά κεφάλαια, καθένα από τα οποία πραγματεύεται μία συγκεκριμένη θεματική ενότητα. Η γεωμετρία είναι ένα ξεχωριστό γνωστικό αντικείμενο, το οποίο φαίνεται να μην έχει καμια σύνδεση με την ύλη της άλγεβρας και των συναρτήσεων. Με τον τρόπο αυτό δημιουργούνται στεγανά μεταξύ των θεματικών ενοτήτων, με συνέπεια να μην είναι εφικτές οι πολλαπλές προσεγγίσεις ενός προβλήματος και να παραμένει περιορισμένη η δυνατότητα διερεύνησης και σύνδεσης της μαθηματικής γνώσης.

Ένα άλλο εμπόδιο στην ανάπτυξη διερευνητικών πρωτοβουλιών από μεριάς μαθητών είναι και η έλλειψη κατάλληλων, δυναμικών διδακτικών εργαλείων. Τα στατικά διδακτικά μέσα (μολύβι, χαρτί, πίνακας κιμωλία) περιορίζουν τις δυνατότητες για πειραματισμό, τη δημιουργία εικασιών και τον έλεγχο υποθέσεων κατά την επεξεργασία ενός προβλήματος.

Στην αναζήτηση διεξόδου και εναλλακτικών τρόπων διδασκαλίας των μαθηματικών θα μπορούσαν να συμβάλλουν αποτελεσματικά δύο ισχυρά διδακτικά εργαλεία, η Ιστορία των Μαθηματικών και η χρήση της τεχνολογίας.

Η μελέτη της ιστορικής πορείας μιας μαθηματικής έννοιας μας βοηθά να κατανοήσουμε καλύτερα τα στάδια ανάπτυξής της, τις έννοιες που προηγήθηκαν και συνέβαλαν στη διαμόρφωσή της, καθώς και τα εμπόδια που συνάντησε η κοινότητα μέχρι την τελική διαμόρφωση της σύγχρονης μορφής της συγκεκριμένης έννοιας.

Η Ιστορία αποτελεί μια πηγή ιδεών για το σχεδιασμό δραστηριοτήτων πιο συμβατών με τις ανάγκες και τις δυνατότητες των μαθητών και άρα πιο αποτελεσματικών.

Εδώ θα πρέπει να υπογραμμίσουμε ότι η χρήση της Ιστορίας δεν θα πρέπει να γίνει με τον τρόπο και τις μεθόδους ενός ιστορικού. Κατά τον Bachelard (1983), ο ιστορικός ανιχνεύει τα γεγονότα μέσα από τις ιδέες, ενώ εμείς αναζητούμε τις ιδέες μέσα στα γεγονότα.

Ο τρόπος με τον οποίο μπορεί να χρησιμοποιηθεί η Ιστορία αποτελεί τα τελευταία χρόνια αντικείμενο έρευνας σημαντικών ανθρώπων στο χώρο της διδακτικής των μαθηματικών. Ο Polya (1961) υποστηρίζει ότι αν κατανοήσουμε τον τρόπο με τον οποίο ο άνθρωπος κατέκτησε τις μαθηματικές έννοιες μέσα από την Ιστορία, τότε, διδακτικά τουλάχιστον, θα αποκτήσουμε καλύτερα εφόδια για την προσπάθειά μας να οδηγήσουμε τους μαθητές στην κατάκτηση των εννοιών αυτών.

Ο Freudenthal (1981) υποδεικνύει τον τρόπο με τον οποίο θα πρέπει να χρησιμοποιηθεί η Ιστορία, τονίζοντας ότι ο διδάσκων θα πρέπει να μελετήσει και να αναδείξει τη διαδικασία μέσω της οποίας αναπτύχθηκε η μαθηματική έννοια και όχι απλά το αποτέλεσμα της διαδικασίας αυτής. Η ανάδειξη της διαδικασίας, μέσω της οποίας αναπτύχθηκε μία έννοια, προσφέρει κατά τον Katz (1986) ένα σημαντικό πλεονέκτημα, την κινητοποίηση (motivation) των μαθητών, που είναι η βασική συνιστώσα της διδακτικής πράξης.

Ο Peter Ransom (1995) προτείνει για τη διδασκαλία της τριγωνομετρίας μια ενδιαφέρουσα εφαρμογή η οποία στηρίζεται στη χρήση αρχαίων οργάνων, π.χ. ηλιακά ωρολόγια. Σύμφωνα και πάλι με τον ίδιο, η εμπλοκή των μαθητών σε πρακτικά μαθηματικά προσφέρει ισχυρά πλεονεκτήματα για την κατανόηση των μαθηματικών εννοιών.

Μία άλλη συνιστώσα της διδακτικής αξιοποίησης της Ιστορίας είναι η χρήση αυθεντικών κειμένων, η οποία έχει χαρακτηριστεί ως σημαντική παιδαγωγική παρέμβαση, αφού διαμορφώνει την αντίληψη της πολιτιστικής αξίας των μαθηματικών (Barbin & Menghini, 2000).

Η χρήση των σύγχρονων τεχνολογικών εργαλείων μπορεί να συμπληρώσει το διδακτικό εργαλείο της Ιστορίας και να δημιουργήσει επιπλέον δυνατότητες για διερεύνηση, πολλαπλές αναπαραστάσεις, δυναμικό χειρισμό των γεωμετρικών αντικειμένων. Η μελέτη προβλημάτων, που παλαιοτέρα είχαν αντιμετωπιστεί με τις υπάρχουσες γνώσεις της συγκεκριμένης εποχής, με σύγχρονα τεχνολογικά και μαθηματικά εργαλεία αναδεικνύει τον κοινωνικό ρόλο των μαθηματικών και την πολιτιστική τους υπόσταση.

Με το συγκεκριμένο σενάριο οι μαθητές θα συνδέσουν διαφορετικές διδακτικές ενότητες, αλλά κυρίως θα συσχετίσουν μαθηματικές έννοιες με αυθεντικές καταστάσεις προβλήματος. Η διδασκαλία των μαθηματικών μέσα από τη διερεύνηση καταστάσεων προβλήματος αναγνωρίζεται από τη μαθηματική κοινότητα ως το κατεξοχήν μέσον για να «κάνουν μαθηματικά» οι μαθητές. Η χρήση των ΤΠΕ θα δημιουργήσει επιπλέον δυνατότητες για διερεύνηση, πολλαπλές αναπαραστάσεις και δυναμικό χειρισμό των γεωμετρικών αντικειμένων.

Η διδακτική πορεία θα ολοκληρωθεί με ένα στάδιο το οποίο είναι αδύνατον να υλοποιηθεί με τα στατικά μέσα του πίνακα και του τετραδίου. Το στάδιο αυτό είναι η εφαρμογή των μαθηματικών μοντέλων στη μελέτη της οπτικής μας αντίληψης, δηλαδή στην ανάδειξη των γεωμετρικών και συναρτησιακών της χαρακτηριστικών.

Τελικά, τα μαθηματικά που σχετίζονται με τη δραστηριότητα αντλούν το νόημά τους από την πραγματική κατάσταση του προβλήματος το οποίο επιχειρούν οι μαθητές να λύσουν.

3.5.1 Σχέδιο εκπαιδευτικών δραστηριοτήτων

Ένταξη του σεναρίου στο Αναλυτικό Πρόγραμμα

Το σενάριο απευθύνεται στους μαθητές της Β΄ και Γ΄ Λυκείου και εντάσσεται στην ύλη του κεφαλαίου της τριγωνομετρίας και των συναρτήσεων. Ο διδάσκων έχει τη δυνατότητα να τροποποιήσει ή και να αφαιρέσει ερωτήματα, μετατρέποντας τις δραστηριότητες σε λιγότερο ή περισσότερο απαιτητικές. Για παράδειγμα, στο θέμα της μελέτης μιας έτοιμης προσομοίωσης, θα μπορούσε να ζητήσει από τους μαθητές να κατασκευάσουν οι ίδιοι τη δική τους εκδοχή του μοντέλου, μιας πρότασης των *Οπτικών*, και όχι να χρησιμοποιήσουν το έτοιμο αρχείο του λογισμικού.

Η υλοποίηση του σεναρίου καλό θα είναι να πραγματοποιηθεί στο τέλος του κεφαλαίου που αφορά στις τριγωνομετρικές συναρτήσεις, όταν πλέον οι μαθητές θα έχουν αποκτήσει τις απαραίτητες μαθηματικές γνώσεις-εργαλεία που σχετίζονται με τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων αυτών. Η ενδεικτική διάρκεια υλοποίησής του είναι 10-12 περίπου ώρες και εξελίσσεται κλιμακούμενη από την απλή παρατήρηση προς τη μελέτη και διερεύνηση συσχετίσεων μεταξύ μεταβαλλόμενων μεγεθών.

Προαπαιτούμενα για την υλοποίηση του σεναρίου

- Οι μαθητές θα πρέπει να γνωρίζουν τις γραφικές παραστάσεις βασικών συναρτήσεων, όπως της γραμμικής, της υπερβολής, της παραβολής, και, συγχρόνως, να έχουν μελετήσει τη σημασία της οριζόντιας ασύμπτωτης σε μία γραφική παράσταση.

- Θα πρέπει επίσης να γνωρίζουν τις βασικές λειτουργικότητες ενός δυναμικού γεωμετρικού λογισμικού (π.χ. *The Geometer's Sketchpad*). Έμφαση θα πρέπει να δοθεί στην κατασκευή και μέτρηση τμημάτων, καθώς και στη δημιουργία γραφικών παραστάσεων.
- Οι μαθητές εργάζονται ανά ζεύγη ή τριάδες στο εργαστήριο υπολογιστών του σχολείου στους οποίους έχει εγκατασταθεί το λογισμικό. Κάθε ομάδα διαθέτει και ένα τετράδιο σημειώσεων.
- Πριν από την εμπλοκή των μαθητών με τις δραστηριότητες του σεναρίου, θα πρέπει να υλοποιηθεί η δραστηριότητα 1 (ή και η 2) που αναφέρεται στο σενάριο του λυκείου. Με τη δραστηριότητα αυτή οι μαθητές θα μελετήσουν τη βέλτιστη γωνία σε προβλήματα, όπου είναι αναγκαία η συσχέτιση γωνίας και μήκους.

3.5.2 Ιστορικό πλαίσιο του εκπαιδευτικού σεναρίου

Τα *Οπτικά* του Ευκλείδη
Η πρώτη επιστημονική προσέγγιση των οπτικών φαινομένων, από μαθηματική σκοπιά, γίνεται από τον Ευκλείδη, τον 4ο π.Χ. αιώνα, μέσα από τις προτάσεις που διατυπώνει και αποδεικνύει στα *Οπτικά* του. Στη μελέτη αυτή ο Ευκλείδης συγκεντρώνει και καταγράφει όλες τις μέχρι τότε εμπειρικές γνώσεις γύρω από την οπτική αντίληψη και επιχειρεί μία γεωμετρική ερμηνεία των οπτικών φαινομένων.

Τα βασικά σημεία που χαρακτηρίζουν τα *Οπτικά* του Ευκλείδη είναι τα εξής:
- Η καμπυλόμορφη αντίληψη του χώρου, η οποία σε ορισμένα σημεία διατυπώνεται ρητά και κυριαρχεί στο σύνολο των προτάσεων της Ευκλείδειας Οπτικής. Με τη διαπίστωση ότι όσα επίπεδα βρίσκονται χαμηλότερα από το μάτι φαίνονται κοίλα, εδραιώνει την καμπυλόμορφη οπτική θεώρηση του χώρου (Κουρνιάτη, 1998).
- Οι οπτικές ακτίνες που κατευθύνονται από τον παρατηρητή προς το αντικείμενο, καθώς και η οπτική γωνία που ορίζουν, αποτελούν το βασικό παράγοντα καθορισμού της θέσης του μεγέθους και της μορφής των αντικειμένων.

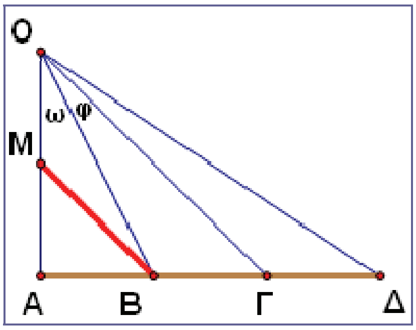
Οι παρατηρήσεις και τα συμπεράσματα που καταγράφει ο Ευκλείδης συγκροτούν μία πλήρη μελέτη περί της οπτικής αντίληψης και παρέχουν τη δυνατότητα προσανατολισμού προς ένα συγκεκριμένο σύστημα απεικόνισης, με οδηγό τις οπτικές ακτίνες και τις οπτικές γωνίες που σχηματίζουν.

Ένα γεωμετρικό σύστημα απεικόνισης που θα κατέγραφε τις οπτικές εικόνες των χωρικών αντικειμένων, όπως περιγράφονται από τον Ευκλείδη, θα ήταν ένα σύστημα καμπυλόγραμμης προοπτικής που θα προέκυπτε από την κεντρική προβολή των αντικειμένων σε μία σφαιρική επιφάνεια. Στο γεωμετρικό αυτό σύστημα απεικόνισης οι εικόνες, που προκύπτουν και συμφωνούν με τα όσα περιγράφει ο Ευκλείδης, είναι σύμφωνες και με την οπτική μας εμπειρία. Το μέγεθος της εικόνας των αντικειμένων σε μία τέτοια απεικόνιση είναι συνάρτηση της οπτικής γωνίας με την οποία φαίνονται από το σημείο παρατήρησης που είναι και το κέντρο της σφαίρας. Η απόσταση του αντικειμένου από το σημείο οράσεως καθορίζει μαζί με τη γωνία οράσεως το φαινόμενο μέγεθος. Σε κάθε περίπτωση, ταυτόχρονα με την απομάκρυνση από το οπτικό κέντρο, μειώνεται και το φαινόμενο μέγεθος του αντικειμένου ανάλογα με την αντίστοιχη μείωση της οπτικής γωνίας, όπως είναι αναμενόμενο από την οπτική εμπειρία. Έτσι, δεν προκύπτουν «παράδοξα», όπως στην προοπτική απεικόνιση σε επίπεδο πίνακα. Οι προοπτικές εικόνες ίσων μεγεθών, για παράδειγμα ίσων κυλίνδρων ή σφαιρών, σε άνισες αποστάσεις από το σημείο οράσεως θα έχουν αντίστοιχα άνισες εικόνες, των οποίων το μέγεθος θα καθορίζει η εκάστοτε οπτική γωνία.

Το έργο περιλαμβάνει 58 προτάσεις με τις αποδείξεις τους, από τις οποίες οι 20 αναφέρονται στην οπτική, με τη σημερινή σημασία του όρου, και οι 38 στην οπτική μας αντίληψη, δηλαδή στην προοπτική. Στο κείμενο υπάρχει μία εισαγωγή με τους «όρους», δηλαδή τους ορισμούς που αποτελούν υποθέσεις πάνω στις οποίες στηρίζεται το οικοδόμημα των *Οπτικών*, κατά την πάγια μεθοδολογία του Ευκλείδη.

Οι δραστηριότητες του σεναρίου αφορούν σε δύο από τις προτάσεις που περιέχονται στα *Οπτικά*, στην τέταρτη και στην έκτη.

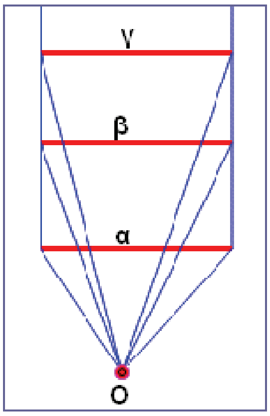
Πρόταση 4
«Από τα ίσα τμήματα, που βρίσκονται στην ίδια ευθεία, τα περισσότερο απομακρυσμένα φαίνονται μικρότερα».



Εδώ ο Ευκλείδης προτείνει μία απόδειξη, φέροντας τη ΒΜ παράλληλη προς την ΟΓ, οπότε συγκρίνει τη γωνία ω με τη φ, η οποία έχει πλέον μεταφερθεί, μέσω της παραλληλίας, στο τρίγωνο ΟΜΒ.
Με δεδομένο ότι ΟΑ<ΟΓ, συμπεραίνει ότι και ΟΜ<ΜΒ, οπότε φ<ω.

Αυτό σημαίνει ότι το τμήμα ΒΓ φαίνεται μικρότερο από το ΑΒ.

Πρόταση 6
«Τα ίσα και παράλληλα διαστήματα που παρατηρούνται από απόσταση φαίνονται ανισοπλατή».



Στην πρόταση αυτή ο Ευκλείδης επιχειρεί να περιγράψει με γεωμετρικούς όρους την αντίληψη της σύγκλισης των παράλληλων ευθειών, καθώς απομακρύνονται από τον παρατηρητή. Στην πραγματικότητα ισχύει α=β=γ, όμως για τα φαινόμενα μεγέθη, δηλαδή τις γωνίες όρασης, ισχύει $φ_α>φ_β>φ_γ$, όπου $φ_α$, $φ_β$, $φ_γ$ τα φαινόμενα μεγέθη των τμημάτων α, β, γ, αντίστοιχα.

Θα μπορούσαμε να θεωρήσουμε τις δύο προτάσεις ως συμπληρωματικές, αφού περιγράφουν δύο βασικές προοπτικές μιας «ψευδαισθήσεις», δηλαδή τη σύγκλιση των παραλλήλων και την ελάττωση των αποστάσεων ισαπέχοντων τμημάτων.

Η εικόνα προέρχεται από το δικτυακό τόπο του άλμπουμ φωτογραφιών flickr και τον 1/2008 η διεύθυνσή της είναι: http://www.flickr.com/photos/flc/76701319/

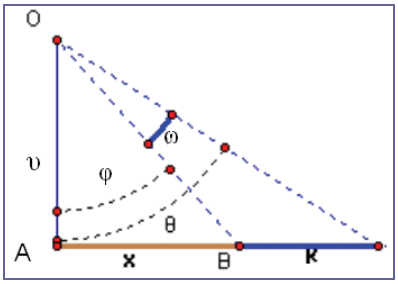
3.5.3 Μία σύγχρονη προσέγγιση στα μαθηματικά των προτάσεων 4 και 6 των *Οπτικών* του Ευκλείδη

Στόχος της ανάλυσης που ακολουθεί είναι να αναδειχθεί το πλαίσιο της μαθηματικής επεξεργασίας στο οποίο έχει σχεδιαστεί η υλοποίηση του σεναρίου. Συγκεκριμένα, η τριγωνομετρία και οι συναρτήσεις θα αποτελέσουν τα εργαλεία με τα οποία θα προσεγγίσουμε και θα μελετήσουμε τις δύο προτάσεις των *Οπτικών*. Αυτό σημαίνει ότι τα μοντέλα που θα προκύψουν θα περιέχουν τριγωνομετρικές συναρτήσεις και τις γραφικές τους παραστάσεις.

Η επιλογή του πλαισίου αυτού δεν είναι τυχαία. Καταρχήν, όπως αναφέρθηκε και στο ιστορικό πλαίσιο, η ευκλείδεια αντίληψη για το φαινόμενο μέγεθος είναι γωνιακή και επομένως η εμπλοκή της τριγωνομετρίας είναι χρήσιμη, αφού θα αναζητηθούν σχέσεις μεταξύ γωνιών και γραμμικών μεγεθών. Από την άλλη, οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις και οι αντίστροφές τους διαθέτουν γραφικές παραστάσεις που θα μπορούσαν να παραστήσουν την οπτική μας αντίληψη. Το σημαντικό εδώ είναι ότι οι αντίστροφες τριγωνομετρικές συναρτήσεις μας επιτρέπουν να υπολογίζουμε τη γωνία μέσα από μία σχέση, επομένως και το φαινόμενο μέγεθος κατά την ευκλείδεια αντίληψη.

- *Πρόταση 4*

Στην πρόταση αυτή θα επιχειρήσουμε να συσχετίσουμε τη γωνία με την οποία φαίνεται ένα ευθύγραμμο τμήμα, δεδομένου σταθερού μήκους με την απόσταση από τον παρατηρητή του τμήματος αυτού.
Στην παρακάτω εικόνα παρουσιάζεται ένα γεωμετρικό μοντέλο του προβλήματος.



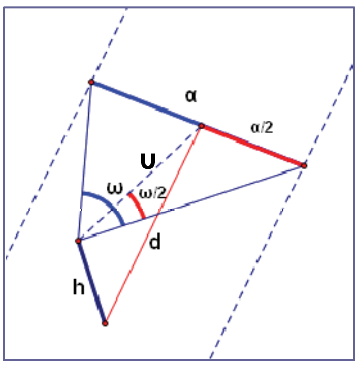
Η γωνία ω αντιστοιχεί στο φαινόμενο μέγεθος του τμήματος κ που απέχει απόσταση χ από τον παρατηρητή, ο οποίος έχει ύψος υ. Ένας συνήθης τρόπος συσχέτισης της ω με τα άλλα μεγέθη είναι ο εξής:

$$ω=θ-φ,\ \text{άρα } εφω=εφ(θ-φ)=\frac{εφθ-εφφ}{1+εφθ.εφφ}=\frac{\frac{χ+κ}{υ}-\frac{χ}{υ}}{1+\frac{χ^2+κχ}{υ^2}},\ \text{οπότε } εφω=\frac{κ.υ}{χ^2+κχ+υ^2}$$

Τώρα πλέον μπορούμε να υπολογίσουμε τη γωνία ω μέσω της σχέσης $ω=τοξεφ\frac{κ.υ}{χ^2+κχ+υ^2}$.

- *Πρόταση 6*

Στην πρόταση αυτή θα κάνουμε ορισμένες υποθέσεις. Το ύψος του παρατηρητή είναι h, το μήκος του τμήματος που βλέπει ο παρατηρητής είναι α και η απόσταση του παρατηρητή από το τμήμα είναι d.
Η γωνία ω είναι το φαινόμενο μέγεθος του τμήματος, ενώ ο παρατηρητής βρίσκεται πάνω στη μεσοκάθετο του τμήματος α. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα το μάτι του παρατηρητή να δημιουργεί ένα ισοσκελές τρίγωνο με το τμήμα α.



Το τμήμα υ υπολογίζεται στο ορθογώνιο τρίγωνο με κάθετες πλευρές h και d:

$\upsilon=\sqrt{h^2+d^2}$. Στη συνέχεια, στο ορθογώνιο τρίγωνο με οξεία γωνία την ω/2 ισχύει

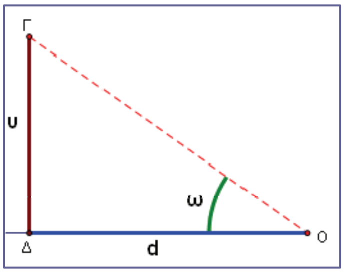
$\frac{\omega}{2}=\text{τοξεφ}\frac{\alpha}{2\upsilon}$. Συνδυάζοντας τις δύο αυτές σχέσεις, προκύπτει ένας υπολογισμός της γωνίας ω συναρτήσει των ποσοτήτων h και d. Η σχέση αυτή έχει ως εξής: $\omega=2\text{τοξεφ}\frac{\alpha}{2\sqrt{h^2+d^2}}$.

Στην περίπτωση που το ύψος h του παρατηρητή είναι 0, δηλαδή το τμήμα α βρίσκεται στο ύψος των ματιών του, τότε προκύπτει το φαινόμενο μέγεθος του τμήματος α από τη σχέση: $\omega=2\text{τοξεφ}\frac{\alpha}{2d}$.

Σημείωση
Για την υλοποίηση των δραστηριοτήτων χρήσιμο είναι οι μαθητές να γνωρίζουν μία σημαντική συνάρτηση με την οποία θα μπορούν να υπολογίζουν τη γωνία, όταν είναι γνωστή η τριγωνομετρική της εφαπτομένη.

Η συνάρτηση αυτή είναι η f(x)=τοξοεφ(x) ή f(x)=arctan(x), όπως συνήθως αναφέρεται στη διεθνή ορολογία.

Γιατί είναι όμως τόσο σημαντική η μελέτη της συνάρτησης αυτής;
Η σχέση μεταξύ του φαινόμενου μεγέθους ω του αντικειμένου ΓΔ, του ύψους του αντικειμένου υ και της απόστασης d του αντικειμένου από τον παρατηρητή θα μπορούσε να εκφραστεί με την ισότητα $\omega=\text{τοξεφ}\frac{\upsilon}{d}$.

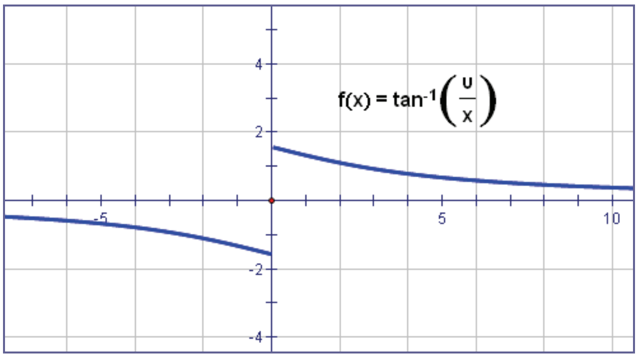


Στο παραπάνω μοντέλο έχουμε θεωρήσει ότι:

- Το φαινόμενο μέγεθος ενός αντικειμένου εκφράζεται με τη γωνία ω που σχηματίζεται με κορυφή τον οφθαλμό Ο και πλευρές τα τμήματα ΟΓ και ΟΔ, όπου Γ και Δ τα άκρα του αντικειμένου.
- Ο οφθαλμός Ο του παρατηρητή βρίσκεται στην ίδια οριζόντια με το άκρο Δ του αντικειμένου. Αυτό σημαίνει ότι το τρίγωνο μελέτης του φαινόμενου μεγέθους ενός αντικειμένου είναι ορθογώνιο.

Τελικά, η συνάρτηση που συνοψίζει τη σχέση του φαινόμενου μεγέθους ενός αντικειμένου ύψους υ με την απόσταση x, την οποία απέχει από τον παρατηρητή, είναι η $f(\chi)=\text{τοξεφ}\frac{\upsilon}{x}$.

Αυτό που παρουσιάζει διδακτικό ενδιαφέρον είναι η μελέτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης και η ερμηνεία της οπτικής μας αντίληψης με βάση την καμπύλη αυτή.



Αρχική Δραστηριότητα: Η συνάρτηση f(x)=arctanx

Με τη δραστηριότητα αυτή δίνεται στους μαθητές η ευκαιρία να μελετήσουν μία σημαντική συνάρτηση, την οποία στη συνέχεια θα μπορούσαν να χρησιμοποιήσουν ως εργαλείο στην προσπάθειά τους να κατασκευάσουν τριγωνομετρικά μοντέλα της οπτικής μας αντίληψης. Η δραστηριότητα στηρίζεται στις δυνατότητες του λογισμικού *Function Probe* να αποκόπτουν σημεία από μία καμπύλη και στη συνέχεια να τα αναδιατάσσουν, αποστέλλοντάς τα στον πίνακα τιμών.

Επιπλέον, χρησιμοποιώντας ένας γεωμετρικό λογισμικό (*The Geometer's Sketchpad*), οι μαθητές θα μελετήσουν τη συμπεριφορά ενός γεωμετρικού δυναμικού μοντέλου με το οποίο θα δημιουργήσουν τη γραφική παράσταση συνάρτησης που σχετίζεται με την f(x)=arctan(x).

Η δραστηριότητα αυτή μπορεί να υλοποιηθεί από μαθητές της Β΄ και Γ΄ Λυκείου και έχει διάρκεια 2 διδακτικές ώρες. Θα ήταν χρήσιμο οι μαθητές να γνωρίζουν τη μέθοδο του **δυναμικού σημείου**, ώστε να υλοποιήσουν τις τελευταίες ερωτήσεις της δραστηριότητας ως εφαρμογή της μεθόδου αυτής.

Φύλλο εργασίας

Όταν η τιμή της γωνίας x, που ανήκει στο διάστημα $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, είναι γνωστή, τότε μπορούμε να υπολογίσουμε την τιμή της εφαπτομένης της γωνίας και τη συνάρτηση με την οποία πραγματοποιείται αυτή η αντιστοιχία. Με άλλα λόγια, ο υπολογισμός είναι η f(x)=tanx (f(x)=εφx).
Σε πολλά προβλήματα, όμως, είναι γνωστή η τιμή της εφαπτομένης της γωνίας x και ζητείται η τιμή της γωνίας x. Αυτό ακριβώς το πρόβλημα θα μελετήσουμε με τη βοήθεια του λογισμικού *Function Probe*.

1. Κατασκευάστε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης y=tanx στο διάστημα $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

2. Δημιουργήστε μία ακολουθία αρκετών σημείων (20-30) από τη γραφική παράσταση. Ορίστε αντίθετες τιμές για την αρχική και την τελική τιμή. Αποστείλετε τα σημεία στον πίνακα. Τι σχέση έχουν οι τιμές της εφαπτομένης για τις αντίθετες τιμές της γωνίας x; Πώς εξηγείται η σχέση αυτή;

3. Ορίστε τις τιμές της εφαπτομένης στον πίνακα ως στήλη του x και τις τιμές της γωνίας ως στήλη του y. Αποστείλετε τα σημεία στο γράφημα, ενώστε τα και μελετήστε τη διάταξή τους. Ποια συνάρτηση θα μπορούσε να οριστεί με τη γραφική παράσταση, πάνω στην οποία φαίνεται να ανήκουν τα σημεία;

4. Κατασκευάστε τη συμμετρική της γραφικής παράστασης της y=tanx ως προς την ευθεία y=x. Τι παρατηρείτε; Μπορείτε να εξηγήσετε αυτό που παρατηρήσατε;

5. Κατασκευάστε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης y=arctanx. Τι παρατηρείτε; Ποια σχέση συνδέει τις δύο συναρτήσεις; Ποια είναι η πρακτική χρήση της συγκεκριμένης συνάρτησης, δηλαδή τι μας επιτρέπει να υπολογίσουμε;

6. Μελετήστε τη συμπεριφορά της γραφικής παράστασης της y=arctanx για μεγάλες τιμές του x. Τι παρατηρείτε; Τι τιμές μπορεί να πάρει η συνάρτηση;

7. Ανοίξτε το αρχείο arctan του λογισμικού. Μελετήστε το γεωμετρικό μοντέλο και εντοπίστε τα μεγέθη που μπορούν να μεταβληθούν. Μελετήστε τον τρόπο κατασκευής του σημείου Μ. Ποιες είναι οι συντεταγμένες του σημείου;

8. Κατασκευάστε το ίχνος του σημείου Μ και μεταβάλετε το μήκος του τμήματος d. Ποια συνάρτηση θα μπορούσε να έχει γραφική παράσταση την καμπύλη που γράφει το ίχνος του Μ;

9. Με τη βοήθεια του λογισμικού κατασκευάστε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης, προκειμένου να επιβεβαιώσετε ή να απορρίψετε τη σχέση που κατασκευάσατε στην προηγούμενη ερώτηση.

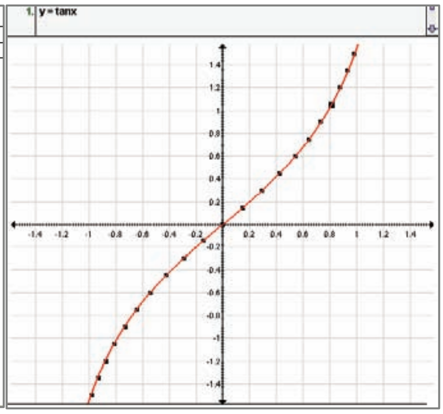
Αναμενόμενη διδακτική πορεία

Το πρώτο θέμα που θα πρέπει να διευκρινιστεί στους μαθητές είναι η έννοια του κανονικού καρτεσιανού συστήματος. Ο διδάσκων θα πρέπει να υπογραμμίσει ότι η κατασκευή ενός τέτοιου συστήματος στηρίζεται στις δυνατότητες του λογισμικού *Function Probe* να επανακαθορίζει τις ακραίες τιμές για το x και το y, καθώς και την «απόσταση πλέγματος». Ένα κανονικό σύστημα θα πρέπει να διαθέτει κοινά άκρα για τις μεταβλητές x, y, καθώς και κοινή «απόσταση πλέγματος».

- Στην πρώτη άσκηση οι μαθητές θα αλλάξουν την κλίμακα για το x και θα τοποθετήσουν στα άκρα τους αριθμούς -1,57 και 1,57, διότι οι αριθμοί αυτοί είναι το $-\frac{\pi}{2}$ και το $\frac{\pi}{2}$. Το διάστημα αυτό θα το επιλέξουν, ώστε να μην εμφανιστούν οι πολλαπλές καμπύλες της γραφικής παράστασης της εφαπτομένης. Συνεπώς θα πρέπει και για το ψ να επιλέξουν ίδιο διάστημα και «απόσταση πλέγματος».

- Στόχος της δεύτερης άσκησης είναι οι μαθητές να συνδέσουν τις διαφορετικές αναπαραστάσεις της τριγωνομετρικής συνάρτησης της εφαπτομένης. Καταρχάς, η αποκοπή σημείων θα πρέπει να γίνει με βάση τον άξονα y΄y, ώστε όλα τα σημεία να εμφανιστούν μέσα στα περιθώρια της οθόνης.
  Τα συμμετρικά άκρα θα επιτρέψουν στους μαθητές να αναγνωρίσουν τη συμμετρία των τιμών της εφαπτομένης ως προς το 0.

x Οριζόντια	y Κάθετα
-0.98	-1.5
-0.93	-1.35
-0.88	-1.2
-0.81	-1.05
-0.73	-0.9
-0.64	-0.75
-0.54	-0.6
-0.42	-0.45
-0.29	-0.3
-0.15	-0.15
0	0
0.15	0.15
0.29	0.3
0.42	0.45
0.54	0.6
0.64	0.75
0.73	0.9
0.81	1.05
0.88	1.2
0.93	1.35
0.98	1.5



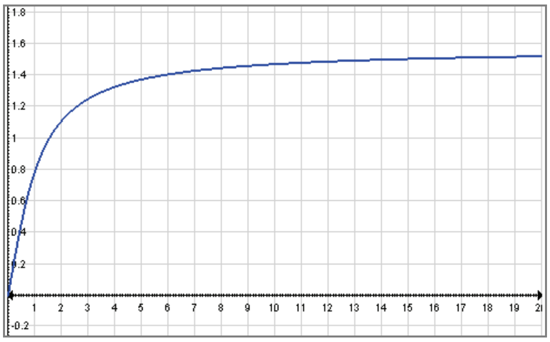
Ο διδάσκων διαπραγματεύεται με τους μαθητές τη συμμετρία των αριθμητικών τιμών, αλλά και της γραφικής παράστασης ως προς την αρχή των αξόνων, ώστε να αναδειχθεί η ιδιότητα της περιττής συνάρτησης την οποία διαθέτει η συνάρτηση.

- Στην τρίτη άσκηση οι μαθητές θα αποστείλουν τα ζεύγη του πίνακα τιμών στο γράφημα, αντιμεταθέτοντας τις θέσεις των x και y. Η ενέργεια αυτή αποτελεί και τη διαισθητική προσέγγιση της έννοιας της αντιστροφής μιας συνάρτησης. Τα σημεία θα εμφανιστούν σε μία διάταξη που φανερώνει συνάρτηση, ενώ η σύνδεση των σημείων θα αποσαφηνίσει την καμπύλη της νέας συνάρτησης. Ο διδάσκων θα διαπραγματευτεί με τους μαθητές τη «λειτουργία» της νέας συνάρτησης, δηλαδή την ιδιότητά της να αντιστοιχεί σε έναν αριθμό x τη γωνία y, η οποία είναι το τόξο του οποίου η εφαπτομένη είναι ο αριθμός x. Ο συμβολισμός y=τοξοεφx θα εκφράσει τα παραπάνω.

- Στην τέταρτη άσκηση και στο ίδιο σύστημα οι μαθητές θα κατασκευάσουν τη συμμετρική γραφική παράσταση ως προς τον άξονα y=x, χρησιμοποιώντας το κατάλληλο εργαλείο του λογισμικού. Η καμπύλη που θα προκύψει θα περάσει από όλα τα διακριτά σημεία της προηγούμενης ερώτησης. Ο διδάσκων θα ζητήσει από τους μαθητές να εξηγήσουν το γεγονός αυτό, ανακαλώντας την πρόταση που έχουν διδαχτεί σε προηγούμενη τάξη, η οποία ορίζει ότι τα σημεία (x, y) και (y, x) είναι συμμετρικά ως προς την ευθεία y=x.

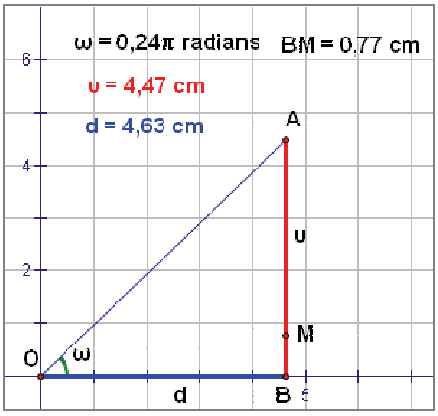
- Στην πέμπτη άσκηση οι μαθητές θα κατασκευάσουν τη γραφική παράσταση της συνάρτησης y=arctanx. Η διαπραγμάτευση θα περιστραφεί γύρω από το γεγονός της σύμπτωσης της νέας γραφικής παράστασης με τη συμμετρική της y=tanx. Εδώ είναι ευκαιρία ο διδάσκων να συμβουλεύσει στους μαθητές να θεωρήσουν τη νέα συνάρτηση ως αντίστροφη της αρχικής, αφού προκύπτει με εναλλαγή των συντεταγμένων των σημείων της.
  Η λειτουργία της νέας συνάρτησης σχετίζεται με τη δυνατότητα που μας παρέχει να υπολογίζουμε άμεσα για κάθε αριθμό α τη γωνία x, για την οποία ισχύει εφx =α.

- Από την έκτη άσκηση αρχίζει η μελέτη των ιδιοτήτων της νέας συνάρτησης. Οι μαθητές μπορούν να επεκτείνουν τις τιμές της μεταβλητής x, αλλάζοντας την κλίμακα και ορίζοντας ως άκρο για τη μεταβλητή x τον αριθμό 10 ή και μεγαλύτερο.

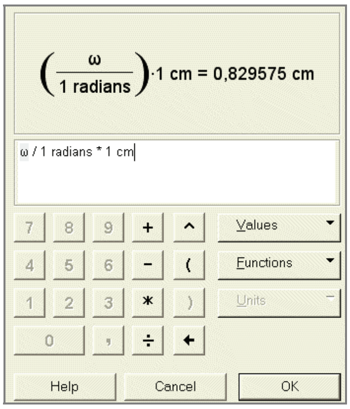


Ο διδάσκων ζητά από τους μαθητές να εκτιμήσουν, με βάση τη γραφική παράσταση, τις τιμές που μπορεί να πάρει η συνάρτηση. Είναι χρήσιμο να ορίσουν ως «απόσταση πλέγματος» για τον άξονα y΄y το 0,1, ώστε να είναι εμφανής η τιμή 1,57 ,δηλαδή το $\frac{\pi}{2}$, την οποία είναι προφανές ότι δεν μπορεί να φτάσει η συνάρτηση. Η αιτιολόγηση θα στηριχτεί στο γεγονός ότι σε αυτή την τιμή για το y δεν αντιστοιχεί κάποια τιμή x της εφαπτομένης.

- Στην έβδομη άσκηση οι μαθητές αρχικά θα μελετήσουν τα σταθερά και τα μεταβλητά μεγέθη του γεωμετρικού δυναμικού μοντέλου του έτοιμου αρχείου.

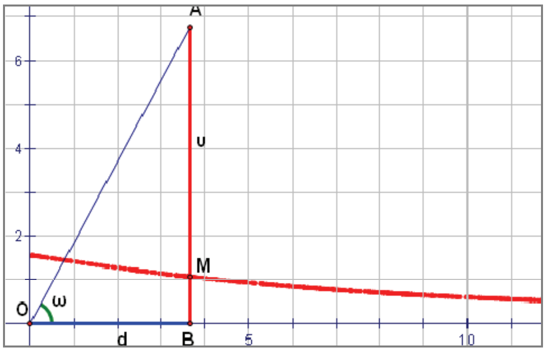


Το ορθογώνιο τρίγωνο θα μεταβληθεί, αν οι μαθητές σύρουν το σημείο B ή το σημείο A. Στη συνέχεια θα γίνει διερεύνηση των συντεταγμένων του σημείου M, οπότε οι μαθητές θα διαπιστώσουν ότι η τετμημένη του είναι η απόσταση d, ενώ η τεταγμένη του είναι το BM. Εδώ είναι χρήσιμο ο διδάσκων να ζητήσει από τους μαθητές να αναζητήσουν τον τρόπο κατασκευής του τμήματος BM με διπλό κλικ πάνω στη μέτρηση.



Όπως είναι φανερό, το τμήμα BM έχει προκύψει από τη μετατροπή της μέτρησης της γωνίας σε μέτρηση μήκους. Αυτή τη μεθοδολογία επισημαίνει ο διδάσκων στους μαθητές, ώστε να τη χρησιμοποιήσουν σε επόμενες δραστηριότητες.

- Στην όγδοη άσκηση οι μαθητές κάνουν δεξί κλικ πάνω στο σημείο M και ορίζουν, έτσι, να εμφανίζεται το ίχνος του. Κατόπιν σύρουν το σημείο B, μεταβάλλοντας τις τιμές του d. Το σημείο M θα γράψει μία καμπύλη.



Μεταβάλλουν το μήκος του τμήματος ΒΑ, δηλαδή το υ, και εξετάζουν τις μεταβολές που υφίσταται η γραφική παράσταση του ίχνους. Αυτό που παρατηρούν είναι ότι η γραφική παράσταση διατηρεί τη μορφή της. Στη συνέχεια επιχειρούν να κατασκευάσουν τον τύπο της συνάρτησης, της οποίας η γραφική παράσταση μπορεί να είναι η καμπύλη που γράφει το σημείο Μ. Ένα πρώτο βήμα είναι να συνδέσουν τα μεγέθη ω και d μέσω της σχέσης $εφω=\frac{υ}{d}$. Η συνάρτηση $f(x)=\arctan(\frac{υ}{x})$ είναι πιθανόν η ζητούμενη συνάρτηση.

- Στην τελευταία άσκηση οι μαθητές κατασκευάζουν, με τις δυνατότητες που τους παρέχει το λογισμικό, τη γραφική παράσταση της συνάρτησης και παρατηρούν ότι το σημείο Μ κινείται συνεχώς πάνω στην καμπύλη της γραφικής της παράστασης. Το γεγονός αυτό επιβεβαιώνει την εικασία τους ότι η καμπύλη του ίχνους του σημείου Μ ανήκει στη συνάρτηση που κατασκεύασαν.

1η Δραστηριότητα: ΜΕΛΕΤΗ ΦΩΤΟΓΡΑΦΙΑΣ

Διάρκεια της δραστηριότητας: 2 διδακτικές ώρες

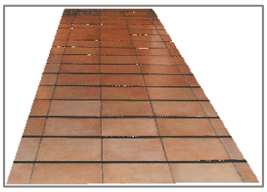
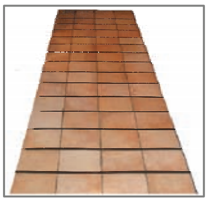
Η κατάσταση προβλήματος:
Οι μαθητές καλούνται να ερμηνεύσουν με μαθηματικό τρόπο τις διαφορές που παρουσιάζονται στη φωτογραφική απεικόνιση από διαφορετικές θέσεις ενός πλακόστρωτου διαδρόμου. Τα βασικά ερωτήματα, στα οποία καλούνται να απαντήσουν, είναι τα εξής:

- Ποια είναι, κατά τη φωτογράφηση, τα βασικά μεγέθη που επηρεάζουν τη μορφή της εικόνας και ποια σχέση συνδέει τα μεγέθη αυτά;
- Πώς επηρεάζεται η μορφή της εικόνας με τη μεταβολή καθενός από τα μεγέθη;

Φύλλο εργασίας
Φωτογραφήστε έναν πλακόστρωτο διάδρομο στο σχολείο σας ή σε έναν άλλο κατάλληλο χώρο. Αν δεν έχετε πρόσβαση σε πλακόστρωτο διάδρομο, τοποθετήστε σε ίσες αποστάσεις μερικές λεπτές ράβδους πάνω στο διάδρομο ή σε όποιο χώρο πρόκειται να φωτογραφήσετε. Η φωτογράφηση να γίνει από διαφορετικά ύψη και διαφορετικές αποστάσεις.

Το πρόβλημα που θα μελετήσουμε είναι το εξής: Με ποιον τρόπο επηρεάζεται η εικόνα της φωτογραφίας κάθε φορά που αλλάζουμε ύψος ή απόσταση;

Παρατηρήστε τις παρακάτω εικόνες του ίδιου δαπέδου.

1. Συγκρίνετε τις φωτογραφίες ενός δαπέδου οι οποίες έχουν ληφθεί από διαφορετικά ύψη. Πού οφείλονται κατά τη γνώμη σας οι διαφορές στις δύο εικόνες του πατώματος; Πώς μπορούμε να εξηγήσουμε με μαθηματικό τρόπο τις διαφορές των δύο εικόνων;

2. Κάντε ένα γεωμετρικό σχήμα στο οποίο να παριστάνονται τα διάφορα μεγέθη που καθορίζουν τη μορφή της εικόνας.

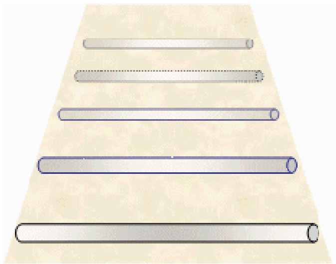
3. Ποια μεγέθη, ενώ είναι ίσα στην πραγματικότητα, φαίνονται άνισα; Πώς μεταβάλλονται οι αποστάσεις μεταξύ των γραμμών του δαπέδου και τα μεγέθη τους σε σχέση με την απόστασή τους από τον παρατηρητή;

4. Δώστε μία μαθηματική ερμηνεία του φαινομένου που παρατηρείτε.

Αναμενόμενη διδακτική πορεία

Βασικός στόχος της δραστηριότητας αυτής είναι οι μαθητές να διαπραγματευτούν μία μαθηματική ερμηνεία, άτυπη ή αυστηρή, του φαινομένου κατά το οποίο το οριζόντιο επίπεδο φαίνεται να ανυψώνεται, καθώς αυξάνεται το ύψος του παρατηρητή, ενώ οι αποστάσεις μεταξύ ισαπεχόντων αντικειμένων φαίνεται να ελαττώνονται.

Στην αρχή ο διδάσκων ζητά από τους μαθητές να πειραματιστούν με την οπτική τους αντίληψη, καθώς παρατηρούν ένα διάδρομο (π.χ. του σχολείου) από διαφορετικά ύψη. Αν ο διάδρομος είναι πλακοστρωμένος, τότε οι μαθητές πειραματίζονται χωρίς άλλη προετοιμασία. Αν ο διάδρομος δεν είναι πλακοστρωμένος, τότε οι μαθητές τοποθετούν ράβδους σε ίσες αποστάσεις μεταξύ τους.



Αφού ολοκληρωθεί η τοποθέτηση των ράβδων, οι μαθητές βρίσκονται σε βαθύ κάθισμα μπροστά από τις ράβδους και σταδιακά επανέρχονται στην όρθια στάση. Εδώ είναι χρήσιμο οι μαθητές να φωτογραφίσουν το διάδρομο από τα διάφορα ύψη, διατηρώντας σταθερή την κλίση της φωτογραφικής τους μηχανής. Προτείνουμε η φωτογράφηση να γίνει με απλή ψηφιακή φωτογραφική μηχανή, ώστε να μπορεί στη συνέχεια η εικόνα να εκτυπωθεί και να αποτελέσει αντικείμενο διαπραγμάτευσης από τους μαθητές. Αν η χρήση φωτογραφικής μηχανής είναι αδύνατη, τότε οι μαθητές θα χρησιμοποιήσουν τις εικόνες που υπάρχουν στην πρώτη άσκηση.

- Στην πρώτη άσκηση οι μαθητές αναμένεται να αναγνωρίσουν τη διαφορά ύψους από το οποίο έγινε η λήψη στις δύο φωτογραφίες, ενώ μία προσεκτική μελέτη θα τους οδηγήσει στο συμπέρασμα ότι δεν υπήρξε μπρος ή πίσω μετακίνηση του παρατηρητή. Η προφανής διαπίστωση είναι ότι όσο ψηλότερα βρίσκεται ο οφθαλμός του παρατηρητή, τόσο πιο ανασηκωμένο φαίνεται το δάπεδο. Η προσπάθεια για μαθηματική ερμηνεία του φαινομένου θα οδηγήσει τους μαθητές στην κατασκευή ενός γεωμετρικού μοντέλου της πραγματικής κατάστασης.

- Στη δεύτερη άσκηση ο διδάσκων διαπραγματεύεται με τους μαθητές τρόπους αναπαράστασης του δαπέδου σε ένα δισδιάστατο σχήμα και τους ζητά να ανακαλέσουν όσα γνωρίζουν για την οπτική γωνία. Η οπτική γωνία θα αποτελέσει και το βασικό μαθηματικό εργαλείο ερμηνείας των φαινομένων που εξετάζονται.

- Οι μαθητές αναμένεται να κατασκευάσουν ένα αρχικό σχήμα, το οποίο στη συνέχεια θα μετασχηματίσουν, ώστε να είναι σαφώς ισοδύναμο με την πραγματική κατάσταση. Οι αρχικές τους διαπιστώσεις θα έχουν μια άτυπη μορφή όπως: «Όσο μακρύτερα βρίσκονται οι γραμμές (οι ράβδοι), τόσο κοντύτερα φαίνονται μεταξύ τους». Επίσης θα παρατηρήσουν ότι τα μήκη των ίσων ράβδων που έχουν τοποθετήσει στο πάτωμα φαίνεται να ελαττώνονται. Εδώ ο διδάσκων μπορεί να επισημάνει στους μαθητές την έννοια της φαινόμενης σύγκλισης των εγκάρσιων παράλληλων γραμμών που ξεκινούν από τον παρατηρητή και κατευθύνονται προς το βάθος του διαδρόμου.

- Η μαθηματική ερμηνεία μπορεί να βασιστεί στη μείωση της οπτικής γωνίας του παρατηρητή, όταν το αντικείμενο απομακρύνεται. Οι μαθητές καλό θα είναι να κατασκευάσουν αρκετά «στιγμιότυπα» του γεωμετρικού μοντέλου, στα οποία να είναι εμφανής η ελάττωση αυτή.

- Γενικά, κατά τη διάρκεια της δραστηριότητας, οι μαθητές θα αναπτύξουν και θα διατυπώσουν διαισθητικές προσεγγίσεις τις οποίες ο διδάσκων καλό θα ήταν να οδηγήσει, με κατάλληλες ερωτήσεις, προς την κατεύθυνση των γεωμετρικών μοντέλων που έχει χρησιμοποιήσει ο Ευκλείδης.

2η Δραστηριότητα: ΤΑ ΟΠΤΙΚΑ ΤΟΥ ΕΥΚΛΕΙΔΗ

Διάρκεια της δραστηριότητας: 2 διδακτικές ώρες

Η κατάσταση προβλήματος:
Εδώ οι μαθητές θα μελετήσουν και θα περιγράψουν τρόπους με τους οποίους ο Ευκλείδης μαθηματικοποιεί την οπτική μας αντίληψη στο έργο του *Οπτικά*. Το βασικό ερώτημα προς διαπραγμάτευση θα είναι το κατά πόσον οι προσεγγίσεις των μαθητών συγκλίνουν ή αποκλίνουν από εκείνες του Ευκλείδη.

Φύλλο εργασίας
Στο έργο του *Οπτικά* ο Ευκλείδης περιγράφει με τη βοήθεια της γεωμετρίας την οπτική μας αντίληψη και επιχειρεί να εξηγήσει τον τρόπο με τον οποίο φαίνονται τα αντικείμενα. Στην αρχή μας παραθέτει μερικές βασικές έννοιες, τις οποίες και ονομάζει όρους. Μερικοί από τους όρους που θα μας φανούν χρήσιμοι στη δραστηριότητα είναι οι εξής:

Όροι
1. Ὑποκείσθω τὰς ἀπὸ τοῦ ὄμματος ἐξαγομένας εὐθείας γραμμὰς φέρεσθαι διάστημα μεγεθῶν μεγάλων.

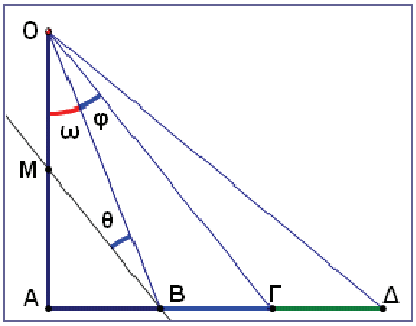
2. καὶ τὸ [μὲν] ὑπὸ τῶν ὄψεων περιεχόμενων σχῆμα εἶναι κῶνον τὴν κορυφὴν μὲν ἔχοντα ἐν τῷ ὄμματι τὴν δὲ βάσιν πρὸς τοῖς πέρασι τῶν ὁρωμένων.

4. καὶ τὰ μὲν ὑπὸ μείζονος γωνίας ὁρώμενα μείζονα φαίνεσθαι, τὰ δὲ ὑπὸ ἐλάττονος ἐλάττονα, ἴσα δὲ τὰ ὑπὸ ἴσων γωνιῶν ὁρώμενα.

5. καὶ τὰ μὲν ὑπὸ μετεωροτέρων ἀκτίνων ὁρώμενα μετεωρότερα φαίνεσθαι, τὰ δὲ ὑπὸ ταπεινοτέρων ταπεινότερα.

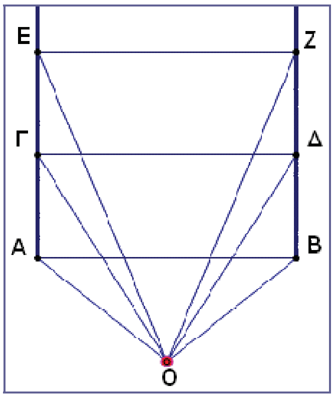
Στη συνέχεια ο Ευκλείδης παραθέτει μια σειρά προτάσεων, από τις οποίες θα μας απασχολήσουν δύο, η πρόταση 4 και η πρόταση 6.

Πρόταση 4
Τῶν ἴσων διαστημάτων καὶ ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας ὄντων τὰ ἐκ πλείονος διαστήματος ὁρώμενα ἐλάττονα φαίνεται.



Εδώ ο Ευκλείδης προτείνει την εξής απόδειξη:
- Φέρνει τη ΒΜ παράλληλη προς την ΟΓ.
- Το τμήμα ΒΜ περνά από το μέσον Μ του ΟΑ, άρα το τμήμα ΟΜ είναι ίσο με το μισό του ΟΑ.
- Οι δύο γωνίες φ και θ είναι ίσες ως εντός εναλλάξ. ΟΑ<ΟΓ, αφού η ΟΓ είναι πλάγια, ενώ η ΟΑ είναι κατακόρυφη.
- Στο τρίγωνο ΜΒΟ το ΟΜ<ΜΒ, αφού τα τμήματα αυτά είναι τα μισά άνισων τμημάτων και επομένως θ<ω. Τελικά φ<ω.

Πρόταση 6
Τὰ παράλληλα τῶν διαστημάτων ἐξ ἀποστήματος ὁρώμενα ἀνισοπλατῆ φαίνεται.



Εδώ ο Ευκλείδης αναφέρει ότι πράγματι τα μεγέθη (τμήματα) φαίνονται μικρότερα, αφού οι γωνίες, με τις οποίες ο οφθαλμός μας Ο τα παρατηρεί, συνεχώς μικραίνουν.

1. Κάντε μία νοηματική απόδοση των «όρων» στην καθομιλουμένη γλώσσα.

2. Εκτιμήστε αν οι όροι είναι συμβατοί με τις παρατηρήσεις σας στη δραστηριότητα με τις φωτογραφίες. Δηλαδή, κατά πόσον οι όροι αυτοί περιγράφουν την οπτική μας αντίληψη.

3. Κάντε μία νοηματική απόδοση της πρότασης 4 στην καθομιλουμένη.

4. Μελετήστε την απόδειξη της πρότασης 4 και καταγράψτε τις προτάσεις της γεωμετρίας που χρησιμοποιεί ο Ευκλείδης για την απόδειξή της.

5. Κάντε μία νοηματική απόδοση της πρότασης 6 στην καθομιλουμένη.

6. Συμπληρώστε την απόδειξη της πρότασης 6, αιτιολογώντας με καθαρά γεωμετρικό τρόπο τη σχέση των γωνιών. Χρησιμοποιήστε φράσεις που αναφέρει και ο Ευκλείδης στην πρόταση 4.

7. Ποια είναι η σημασία των προτάσεων 4 και 6 για την περιγραφή και ερμηνεία της οπτικής μας αντίληψης;

Αναμενόμενη διδακτική πορεία

Η δραστηριότητα αυτή είναι ιδιαίτερης σημασίας, καθώς οι μαθητές της Β΄ Λυκείου θα έρθουν σε επαφή με τα αυθεντικά κείμενα του Ευκλείδη και θα επιχειρήσουν να αποδώσουν νόημα στο περιεχόμενό τους με βάση τη φυσική τους εμπειρία και τις μαθηματικές τους διαισθήσεις. Η συζήτηση με τους φιλολόγους του σχολείου, για την καλύτερη γραμματική και συντακτική οργάνωση του κειμένου, θα δημιουργήσει προϋποθέσεις διαθεματικής συνεργασίας μέσα στο σχολικό περιβάλλον. Από τους «Όρους» οι μαθητές θα πληροφορηθούν τους τρόπους με τους οποίους οι αρχαίοι συγκροτούσαν την οπτική τους αντίληψη και το περιβάλλον μέσα στο οποίο μελετούσαν τη συμπεριφορά της.

- Στη δεύτερη άσκηση οι μαθητές θα συγκρίνουν την προσωπική τους εμπειρία, από την προηγούμενη δραστηριότητα, με τις περιγραφές του Ευκλείδη. Ιδιαίτερη έμφαση θα δοθεί τόσο στον τέταρτο όρο, όπου συσχετίζεται το φαινόμενο μέγεθος με την οπτική γωνία, όσο και στον πέμπτο, όπου περιγράφεται η φαινόμενη ανύψωση του δαπέδου κατά την παρατήρησή του από όλο και μεγαλύτερα ύψη. Ο τελευταίος, μάλιστα, θεωρείται από τον Ευκλείδη ως αρχή, δηλαδή ως πρόταση η οποία δεν χρήζει απόδειξης.

- Στην τρίτη άσκηση οι μαθητές θα ερμηνεύσουν την τέταρτη πρόταση των *Οπτικών*, όπου ο Ευκλείδης επιχειρεί να εξηγήσει με μαθηματικό τρόπο το φαινόμενο κατά το οποίο ίσα διαστήματα φαίνονται όλο και μικρότερα όσο μακρύτερα βρίσκονται από τον παρατηρητή.

- Στόχος της τέταρτης άσκησης είναι οι μαθητές να γνωρίσουν την αποδεικτική διαδικασία που ακολουθεί ο Ευκλείδης με τα μαθηματικά εργαλεία που διαθέτει. Τα εργαλεία αυτά είναι η ισότητα γωνιών μεταξύ παραλλήλων, οι ανισοτικές σχέσεις μεταξύ πλευρών ενός τριγώνου και το τμήμα που συνδέει τα μέσα των πλευρών ενός τριγώνου. Αυτά ακριβώς τα εργαλεία θα εντοπιστούν από τους μαθητές, ενώ θα υπογραμμιστεί το γεγονός ότι η τριγωνομετρία, που θα μπορούσε να αποτελέσει ένα άλλο πλαίσιο επεξεργασίας, δεν είχε ακόμη αναπτυχθεί επαρκώς.

- Στην πέμπτη και έκτη άσκηση οι στόχοι είναι παρόμοιοι, συνεπώς και η αναμενόμενη πορεία της δραστηριότητας.

- Στην έβδομη άσκηση οι μαθητές θα διαπραγματευτούν τόσο την εμπειρία τους από την προηγούμενη δραστηριότητα όσο και τον τρόπο με τον οποίο ο Ευκλείδης μαθηματικοποιεί την οπτική μας αντίληψη. Στην ουσία, ο Ευκλείδης ερμηνεύει τα δύο βασικά φαινόμενα της προοπτικής μας ψευδαίσθησης, δηλαδή την ελάττωση των ίσων αποστάσεων και τη σύγκλιση των παράλληλων ευθειών που κατευθύνονται από τον παρατηρητή προς το βάθος του ορίζοντα.

3η Δραστηριότητα: Η ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

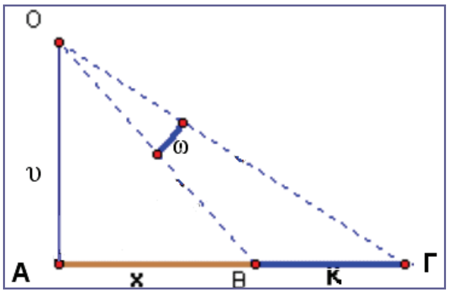
Διάρκεια της δραστηριότητας: 2 διδακτικές ώρες

Η κατάσταση προβλήματος:
Τα μαθηματικά εργαλεία της εποχής του Ευκλείδη επέτρεψαν μία συγκεκριμένη μαθηματική επεξεργασία των προτάσεων 4 και 6 σε ένα καθαρά γεωμετρικό πλαίσιο. Με ποιον τρόπο μπορούμε να αποδείξουμε τις δύο προτάσεις, χρησιμοποιώντας τώρα άλλα μαθηματικά πεδία, όπως η τριγωνομετρία και οι συναρτήσεις;

Φύλλο εργασίας
Ο Ευκλείδης χρησιμοποίησε τις γεωμετρικές γνώσεις της εποχής του για να δικαιολογήσει την οπτική μας αντίληψη. Έτσι, απέδειξε ότι σε ένα δάπεδο που έχει καλυφθεί με ίσα πλακάκια, εκείνα που είναι απομακρυσμένα φαίνονται μικρότερα και ότι οι παράλληλες ευθείες συγκλίνουν στο βάθος του οπτικού μας πεδίου. Στη δραστηριότητα που ακολουθεί θα επιχειρήσουμε να απαντήσουμε στο εξής ερώτημα: Με ποιον τρόπο μπορούμε να εκφράσουμε την ελάττωση των μεγεθών, καθώς αυτά απομακρύνονται από τον παρατηρητή; Δηλαδή ποια σχέση συνδέει το φαινόμενο μέγεθος (γωνία) ενός αντικειμένου με την απόστασή του από εμάς;

Στο παρακάτω σχήμα παρουσιάζεται:
α) Το ύψος ΟΑ=υ του παρατηρητή
β) Το τμήμα κ που βρίσκεται σε απόσταση χ από τον παρατηρητή
γ) Το φαινόμενο μέγεθος του τμήματος κ, δηλαδή η γωνία ω

Στόχος είναι να βρούμε μία σχέση που να συνδέει έναν τριγωνομετρικό αριθμό της γωνίας ω με τα μεγέθη υ, χ και κ.



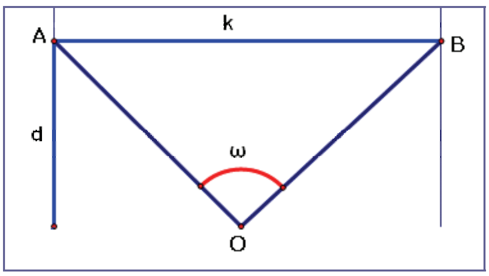
1. Συνδέστε σε μία σχέση τη γωνία ω με τα τμήματα υ, χ, κ, εφαρμόζοντας τους τύπους της τριγωνομετρίας που έχετε διδαχτεί.

2. Κατασκευάστε μία σχέση που να συνδέει τα παραπάνω μεγέθη.

3. Ερμηνεύστε, με βάση τη σχέση που έχετε κατασκευάσει, το φαινόμενο της σμίκρυνσης του πλακακίου καθώς απομακρύνεται.

Ας έρθουμε τώρα στις συγκλίνουσες παραλλήλους. Στο παρακάτω σχήμα παρουσιάζεται:
α) Ένα τμήμα d που παριστάνει την απόσταση του παρατηρητή από το τμήμα που παρατηρεί
β) Το τμήμα κ το οποίο παρατηρεί ο παρατηρητής που βρίσκεται στο σημείο Ο
γ) Το φαινόμενο μέγεθος του τμήματος κ, δηλαδή η γωνία ω

Στόχος είναι να βρούμε μία σχέση που να συνδέει έναν τριγωνομετρικό αριθμό της γωνίας ω με τα μεγέθη d και κ.



4. Συνδέστε σε μία σχέση τη γωνία ω με τα τμήματα d και κ, εφαρμόζοντας τους τύπους της τριγωνομετρίας που έχετε διδαχτεί.

5. Κατασκευάστε μία σχέση που να συνδέει τα παραπάνω μεγέθη. Σε πρώτη φάση υποθέστε ότι ο παρατηρητής βρίσκεται πάνω στη μεσοκάθετη του τμήματος κ.

6. Εξετάστε την περίπτωση κατά την οποία ο παρατηρητής βρίσκεται έξω από τη μεσοκάθετη του τμήματος.

7. Ερμηνεύστε, με βάση τη σχέση που έχετε κατασκευάσει, το φαινόμενο της σύγκλισης των δύο παραλλήλων.

Αναμενόμενη διδακτική πορεία

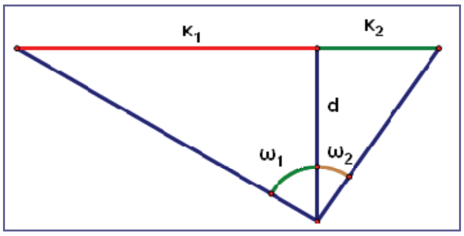
Καλό θα είναι ο διδάσκων να έχει υλοποιήσει με τους μαθητές την πρώτη από τις δύο δραστηριότητες που απευθύνονται στις τάξεις του λυκείου.

Στόχος της διαπραγμάτευσης είναι οι μαθητές να αναγνωρίσουν και να διατυπώσουν ρητά την ομοιότητα των προβλημάτων και στη συνέχεια να ακολουθήσουν τη μέθοδο της διαφοράς γωνιών και της εφαπτομένης.

- Στην τρίτη άσκηση οι μαθητές θα μελετήσουν τη συνάρτηση που έχουν κατασκευάσει και θα διαπραγματευτούν τη μονοτονία της. Συγκεκριμένα, ο τύπος της συνάρτησης και η θέση της μεταβλητής χ στον παρονομαστή αναμένεται να οδηγήσει τους μαθητές στο συμπέρασμα ότι πρόκειται για μία φθίνουσα συνάρτηση. Το συμπέρασμα αυτό θα μπορούσε να οδηγήσει με τη σειρά του στη διαπίστωση ότι η οπτική γωνία ελαττώνεται, καθώς αυξάνεται η απόσταση του αντικειμένου από τον παρατηρητή.

- Στην τέταρτη άσκηση ο διδάσκων ενθαρρύνει του μαθητές να επιλέξουν ποικίλες προσεγγίσεις, προκειμένου να συνδέσουν τα βασικά μεγέθη που εμπλέκονται στο συγκεκριμένο πρόβλημα. Για παράδειγμα, η χρήση τόσο του ημιτόνου όσο και του συνημιτόνου θα μπορούσε να οδηγήσει τους μαθητές στην κατασκευή σχέσεων-μοντέλων για τη γωνία ω. Η χρήση της εφαπτομένης αναμένεται να αποτελέσει την επιλογή των περισσότερων μαθητών, αφού ο συγκεκριμένος τριγωνομετρικός αριθμός χρησιμοποιήθηκε κατά τη διάρκεια των δραστηριοτήτων που προηγήθηκαν. Η ύπαρξη του ισοσκελούς τριγώνου προφανώς διευκολύνει, αλλά συγχρόνως περιορίζει τη γενικότητα της λύσης.

- Στην έκτη άσκηση οι μαθητές θα μελετήσουν το πρόβλημα της σύνδεσης της γωνίας με τα γραμμικά μεγέθη σε ένα τυχαίο τρίγωνο. Οι δυνατές προσεγγίσεις είναι επίσης αρκετές, όμως αυτό που θα πρέπει να αποτελέσει το σημείο εστίασης είναι το γεγονός ότι και πάλι οι σχέσεις που προκύπτουν οδηγούν στο συμπέρασμα ότι η γωνία ω ελαττώνεται, καθώς αυξάνεται η απόσταση d.
  Μία ενδεικτική συσχέτιση μεταξύ της γωνίας $ω=ω_1+ω_2$ και της απόστασης d θα μπορούσε να πραγματοποιηθεί ως εξής:

  Αφού $ω=ω_1+ω_2$ άρα $εφω=εφ(ω_1+ω_2)$ και με βάση το σχήμα έχουμε

  $$εφω=\frac{εφω_1+εφω_2}{1\text{-}εφω_1.εφω_2}\text{, επομένως } εφω=\frac{\frac{κ_1}{d}+\frac{κ_2}{d}}{1\text{-}\frac{κ_1}{d}\cdot\frac{κ_2}{d}}=\frac{κ}{d^2-κ_1\cdot κ_2}.$$

  Εδώ παρουσιάζει ενδιαφέρον το γεγονός ότι η ποσότητα αυτή γίνεται μέγιστη, για σταθερό d, όταν $κ_1=κ_2$, δηλαδή όταν το τρίγωνο είναι ισοσκελές, κάτι που υπαγορεύει και η κοινή εμπειρία μας για τη βέλτιστη θέση απέναντι σε μία οθόνη.

- Στην τελευταία άσκηση οι μαθητές θα χρησιμοποιήσουν τις σχέσεις που έχουν κατασκευάσει, προκειμένου να ερμηνεύσουν το φαινόμενο της σύγκλισης των παραλλήλων. Η ερμηνεία θα στηριχτεί στο γεγονός ότι η φαινόμενη απόσταση των παραλλήλων, δηλαδή η οπτική γωνία του παρατηρητή, συνεχώς ελαττώνεται σε συνάρτηση με το βάθος d.

4η Δραστηριότητα: ΔΥΝΑΜΙΚΑ ΜΟΝΤΕΛΑ

Διάρκεια της δραστηριότητας: 3 διδακτικές ώρες

Η κατάσταση προβλήματος:
Στη συγκεκριμένη δραστηριότητα το βασικό ερώτημα που θα απευθυνθεί προς τους μαθητές αφορά στην κατασκευή και μελέτη δυναμικών μοντέλων των προτάσεων 4 και 6 του Ευκλείδη;

Στην πρώτη δραστηριότητα οι μαθητές συνέδεσαν τα διάφορα μεγέθη, σε ένα γεωμετρικό πλαίσιο, μέσα από τις προτάσεις 4 και 6 του Ευκλείδη. Κατόπιν συνέδεσαν τα μεγέθη αυτά σε ένα πιο αλγεβρικό πλαίσιο με τη δεύτερη δραστηριότητα. Έχουν λοιπόν δημιουργήσει δύο μοντέλα και τώρα πλέον καλούνται να δημιουργήσουν ένα συναρτησιακό μαθηματικό μοντέλο.

Το μοντέλο αυτό θα μπορούσε να προκύψει, καθώς οι μαθητές πειραματίζονται με μία δυναμική προσομοίωση της γεωμετρικής εκδοχής των προτάσεων 4 και 6 του Ευκλείδη. Η διερεύνηση της γραφικής παράστασης της σχέσης των μεγεθών που εμπλέκονται στο πρόβλημα αναμένεται να αποτελέσει πυρήνα διαπραγμάτευσης για τις νέες μαθηματικές έννοιες που ενδέχεται να προκύψουν.

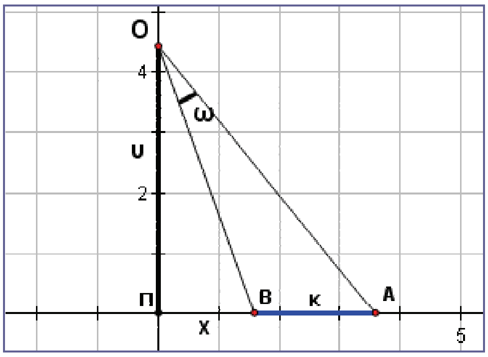
Ο σχεδιασμός των δραστηριοτήτων προβλέπει ότι στο στάδιο αυτό οι μαθητές θα κατασκευάσουν με τη βοήθεια του λογισμικού δυναμικές αναπαραστάσεις των γεωμετρικών μοντέλων. Η κατασκευή θεωρείται εφικτή, εφόσον οι μαθητές έχουν υλοποιήσει τόσο τις **εισαγωγικές δραστηριότητες** όσο και τις δραστηριότητες του παρόντος σεναρίου.

Αν ο διδάσκων κρίνει ότι η δραστηριότητα πρέπει να υλοποιηθεί αυτόνομα, τότε μπορεί να κάνει διδακτική χρήση των έτοιμων αρχείων λογισμικού με τίτλους Optic 4 και Optic 6.

Φύλλο εργασίας 1
Μέχρι τώρα έχουμε μελετήσει την οπτική μας αντίληψη με στατικά μέσα, δηλαδή με μολύβι και χαρτί. Επίσης τα μαθηματικά εργαλεία που έχουμε χρησιμοποιήσει είναι η γεωμετρία και οι τριγωνομετρικές σχέσεις του αθροίσματος και της διαφοράς τόξων.

Στόχος μας είναι τώρα να μελετήσουμε την οπτική μας αντίληψη σε ένα άλλο μαθηματικό πλαίσιο, εκείνο των συναρτήσεων και των γραφικών τους παραστάσεων.

Στην εικόνα φαίνεται το απλοποιημένο μοντέλο της πρότασης 4 του Ευκλείδη, όπου το τμήμα ΑΒ μπορεί να κινείται δυναμικά μπρος πίσω, οπότε μεταβάλλεται η απόσταση χ και η γωνία ω, ενώ προβάλλεται η τιμή της απόστασης χ του άκρου Β από το σημείο Π. Το μήκος του ΟΠ εκφράζει το ύψος του παρατηρητή.



Θα μελετήσουμε τη γραφική παράσταση της σχέσης της απόστασης χ από τον παρατηρητή με το φαινόμενο μέγεθος ω.

1. Κατασκευάστε με τη βοήθεια του λογισμικού μία δυναμική αναπαράσταση του γεωμετρικού μοντέλου της πρότασης 4. Πώς μεταβάλλεται η γωνία ω κατά τη διάρκεια μεταβολής της απόστασης χ;

2. Ποια είναι η μέγιστη τιμή της γωνίας ω και πότε επιτυγχάνεται αυτή; Ποια μπορεί να είναι η φυσική σημασία της μέγιστης τιμής της γωνίας;

3. Μετατρέψτε σε εκατοστά τις μοίρες μέτρησης της γωνίας, με τη βοήθεια του υπολογιστή των μετρήσεων. Για να γίνει αυτό, αρκεί να διαιρέσετε με 1^o και να πολλαπλασιάσετε επί 1 εκ.

4. Χρησιμοποιήστε τη μέθοδο του **δυναμικού σημείου**, για να μελετήσετε γραφικά τη σχέση που συνδέει τη γωνία ω με την απόσταση χ. *(Μεταφέρετε το σημείο Β κατακόρυφα όσο είναι η μέτρηση της γωνίας σε εκατοστά. Δημιουργήστε το ίχνος του νέου σημείου.)* Τι παριστάνει η καμπύλη που γράφει το σημείο αυτό; *(Αν η μέτρηση της γωνίας σε εκατοστά είναι πολύ μεγάλη, τότε, αντί για 1^o, θα πρέπει να διαιρέσετε τη μέτρηση της γωνίας διά 10^o.)*

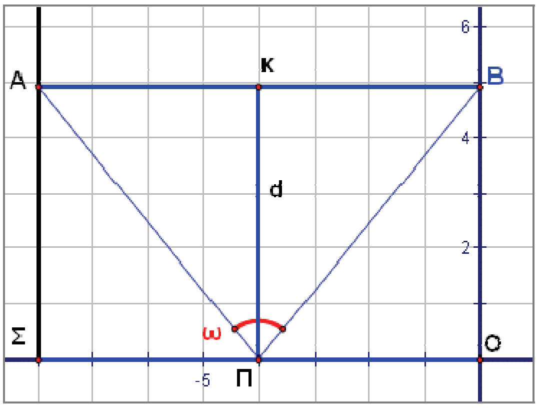
5. Μεταβάλετε το ύψος του παρατηρητή. Πώς μπορούμε να ερμηνεύσουμε τις αλλαγές που υφίσταται η αρχική καμπύλη, όταν μεταβάλλεται το ύψος;

6. Μεταβάλετε το μήκος του κ και κατασκευάστε εκ νέου τη γραφική παράσταση. Ποια είναι η μορφή της καμπύλης για τις διάφορες τιμές του κ;

7. Εξηγήστε τη συμπεριφορά της γραφικής παράστασης, για τις μεταβολές των παραμέτρων της, μέσα από τη μορφή της αλγεβρικής σχέσης (τύπο συνάρτησης) που κατασκευάσατε στην προηγούμενη δραστηριότητα.

Φύλλο εργασίας 2

Στην εικόνα φαίνεται το απλοποιημένο μοντέλο της πρότασης 6 του Ευκλείδη, όπου το τμήμα ΑΒ μπορεί να κινείται δυναμικά μπρος πίσω, οπότε μεταβάλλεται η απόσταση d και η γωνία ω. Επιπλέον, ας θεωρήσουμε ότι το μήκος κ είναι δυνατόν να μεταβληθεί. Ο παρατηρητής είναι στο σημείο Π που βρίσκεται στη μεσοκάθετο του κ.



Θα μελετήσουμε τη γραφική παράστασης της σχέσης της απόστασης d από τον παρατηρητή με το φαινόμενο μέγεθος ω, όταν το μήκος κ παραμένει σταθερό.

1. Κατασκευάστε με τη βοήθεια του λογισμικού μία δυναμική αναπαράσταση του γεωμετρικού μοντέλου της πρότασης 6. Πώς μεταβάλλεται η γωνία ω κατά τη διάρκεια μεταβολής της απόστασης d;

2. Μετατρέψτε σε εκατοστά τις μοίρες μέτρησης της γωνίας, με τη βοήθεια του υπολογιστή των μετρήσεων. Για να γίνει αυτό, αρκεί να διαιρέσετε με 1 μοίρα και να πολλαπλασιάσετε επί 1 εκ.

3. Χρησιμοποιήσετε τη μέθοδο του **δυναμικού σημείου**, για να μελετήσετε γραφικά τη σχέση που συνδέει τη γωνία ω με την απόσταση d. Τι παριστάνει η καμπύλη που γράφει το σημείο αυτό; *(Αν η μέτρηση της γωνίας σε εκατοστά είναι πολύ μεγάλη, τότε, αντί για 1 μοίρα, θα πρέπει να διαιρέσετε τη μέτρηση της γωνίας διά 20 μοίρες.)*

4. Μεταφέρετε δεξιά ή αριστερά τη θέση του παρατηρητή Π και επαναλάβετε το πείραμα. Πώς μπορούμε να ερμηνεύσουμε τις αλλαγές που υφίσταται η αρχική καμπύλη;

5. Μεταβάλετε το μήκος του κ και κατασκευάστε εκ νέου τη γραφική παράσταση. Ποια είναι η μορφή της καμπύλης για τις διάφορες τιμές του κ;

6. Εξηγήστε τη συμπεριφορά της γραφικής παράστασης, για τις μεταβολές των παραμέτρων της, μέσα από τη μορφή της αλγεβρικής σχέσης (τύπο συνάρτησης) που κατασκευάσατε στην προηγούμενη δραστηριότητα.

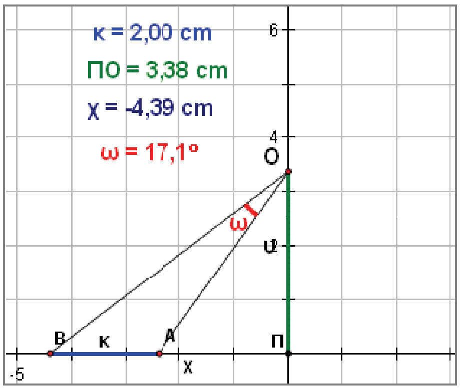
7. Φτιάξτε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων που κατασκευάσατε προηγουμένως. Συγκρίνετε τις δύο γραφικές παραστάσεις, δηλαδή εκείνη που προκύπτει από τον τύπο της συνάρτησης που κατασκευάσατε και εκείνη που προκύπτει από τη μέθοδο του δυναμικού σημείου. Μελετήστε και εξηγήστε τις ομοιότητες και τις διαφορές τους.

Αναμενόμενη διδακτική πορεία

Μέρος 1ο
Ο διδάσκων αρχικά διαπραγματεύεται με τους μαθητές τους τρόπους κατασκευής του αρχείου λογισμικού, ώστε να αναπαρασταθεί ικανοποιητικά το γεωμετρικό μοντέλο της πρότασης 4.

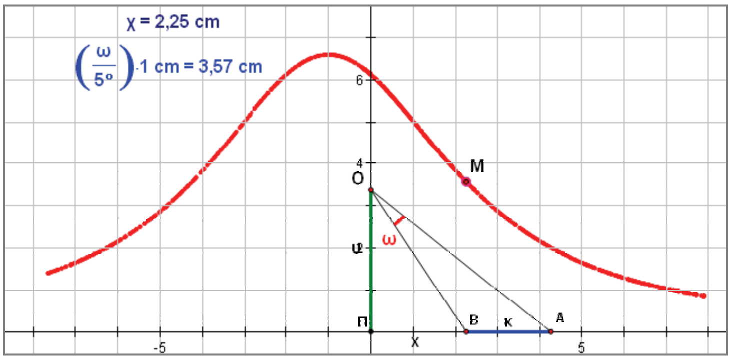
- Στην αρχή οι μαθητές θα πρέπει να αποφασίσουν ποια θα είναι τα μεταβαλλόμενα μεγέθη. Ενδεικτικά, θα μπορούσαμε να επιλέξουμε το ύψος ΟΠ του παρατηρητή, το μήκος κ του πλακακίου και την απόστασή του χ από τον παρατηρητή. Μία εναλλακτική διδακτική προσέγγιση θα ήταν και η μελέτη του έτοιμου αρχείου Optic 4 από τους μαθητές, οι οποίοι θα εμφανίσουν όλα τα αντικείμενα που έχουν υποστεί απόκρυψη. Στη συνέχεια μπορούν να κατασκευάσουν ένα νέο αρχείο. Καθώς μετακινούν το τμήμα κ, παρατηρούν ότι η γωνία ω συνεχώς μικραίνει, αλλά με ρυθμό που συνεχώς μειώνεται.

- Στόχος της δεύτερης ερώτησης είναι οι μαθητές να ερμηνεύσουν την πραγματική κατάσταση μέσω του δυναμικού μοντέλου που έχουν κατασκευάσει. Συγκεκριμένα, θα συνδέσουν τη μέγιστη τιμή της γωνίας ω με το πλακάκι που βρίσκεται στο σημείο όπου στέκεται ο παρατηρητής. Αν το μοντέλο επιτρέπει την κίνηση του τμήματος κ και προς τις αρνητικές τιμές για το χ, τότε οι μαθητές μπορούν να ερμηνεύσουν την κίνηση ως στροφή του παρατηρητή προς την αντίθετη κατεύθυνση (στροφή κατά 180^o).



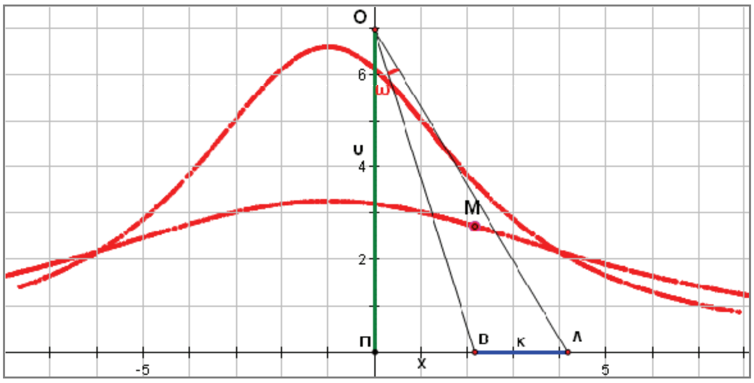
- Στη συνέχεια οι μαθητές θα επιχειρήσουν να μελετήσουν τη σχέση γωνίας ω και απόστασης χ με τη μέθοδο του **δυναμικού σημείου**. Ωστόσο είναι απαραίτητο να γίνουν μερικές τροποποιήσεις τεχνικού χαρακτήρα. Συγκεκριμένα οι μαθητές θα πρέπει να μετατρέψουν τη μέτρηση της γωνίας σε μέτρηση μήκους, ώστε να γίνει δυνατή η μεταφορά του δυναμικού σημείου κατακόρυφα. Ένας τρόπος για να επιτευχθεί αυτό είναι να διαιρέσουν τη μέτρηση της γωνίας με 1^o (ή 1 rad) και στη συνέχεια να πολλαπλασιάσουν τη μέτρηση με 1 εκ. Εδώ προκύπτει όμως το πρόβλημα των πολύ μεγάλων τιμών, όταν η γωνία μετράται σε μοίρες, ή των πολύ μικρών, όταν η γωνία μετράται σε ακτίνια. Μία λύση είναι οι μαθητές να διαιρέσουν ή να πολλαπλασιάσουν τη μέτρηση της γωνίας με τον κατάλληλο αριθμό, ώστε η μέτρηση να γίνεται με τιμές συμβατές με το ορατό μέρος της οθόνης. Στην περίπτωση αυτή η γραφική παράσταση που θα δημιουργηθεί θα ανήκει στο πηλίκο ή στο γινόμενο της ζητούμενης συνάρτησης με έναν αριθμό.

- Μετά την κατασκευή του μοντέλου, σειρά έχει η δυναμική διερεύνησή του. Στην αρχή οι μαθητές κατασκευάζουν τη γραφική παράσταση της σχέσης ω=f(χ). Η μορφή που έχει η καμπύλη θα αποτελέσει αντικείμενο διαπραγμάτευσης, με στόχο και πάλι την ερμηνεία της πραγματικής κατάστασης μέσω του γραφήματος.



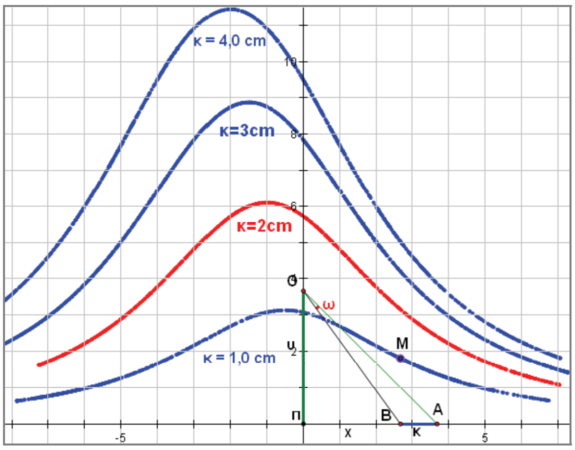
Στην παραπάνω εικόνα η γωνία έχει διαιρεθεί με 5°, ώστε οι μετρήσεις να υποχρεώνουν το δυναμικό σημείο Μ να βρίσκεται μέσα στα περιθώρια της οθόνης. Η καμπύλη που προκύπτει παρουσιάζει συμμετρία, η οποία μπορεί να ερμηνευτεί μέσα από τον όμοιο τρόπο με τον οποίο μεταβάλλεται η οπτική μας αντίληψη, κοιτάζοντας προς οποιαδήποτε κατεύθυνση. Το μέγιστο παρουσιάζεται, όταν το μέσον του τμήματος κ βρίσκεται στην αρχή των αξόνων, οπότε το άκρο Β βρίσκεται στο σημείο -1. Η φυσική ερμηνεία του μεγίστου της συνάρτησης σχετίζεται με το πλακάκι που βρίσκεται κάτω ακριβώς από το σημείο που στέκεται ο παρατηρητής.

- Στην πέμπτη άσκηση οι μαθητές θα μεταβάλλουν το ύψος του παρατηρητή και θα επανακατασκευάσουν τη γραφική παράσταση. Πριν από την κατασκευή της νέας γραφικής παράστασης καλό θα είναι ο διδάσκων να ζητήσει από τους μαθητές να κάνουν εικασίες για το πώς θα είναι η γραφική παράσταση, όταν το ΟΠ αυξηθεί. Η πιο αυθόρμητη απάντηση είναι συνήθως ότι θα αυξηθεί και το ύψος της γραφικής παράστασης.



Η μορφή της γραφικής παράστασης αναμένεται να αποτελέσει ένα ενδιαφέρον θέμα προς διερεύνηση. Η φυσική ερμηνεία μπορεί να δώσει μία πειστική εξήγηση, αφού όσο ψηλότερος είναι ο παρατηρητής, τόσο πιο ομαλά μεταβάλλεται η οπτική του γωνία. Για παράδειγμα, ένας παρατηρητής που βρίσκεται σε ψηλό μέρος έχει μικρότερη οπτική γωνία για τα πλακάκια, όμως η μεταβολή της δεν θα είναι τόσο απότομη όσο σε κάποιον που βρίσκεται κοντά στο πάτωμα που παρατηρεί.

- Στην έκτη άσκηση οι μαθητές θα μελετήσουν τον τρόπο με τον οποίο μεταβάλλεται η γραφική παράσταση της σχέσης των δύο μεγεθών χ και ω, όταν μεταβάλλεται το μήκος του κ.



Εδώ οι μαθητές θα ερμηνεύσουν τις μεταβολές της γραφικής παράστασης μέσα από το γεγονός της απότομης μεταβολής του φαινόμενου μήκους κ, δηλαδή της γωνίας ω, όταν αυτό είναι σχετικά μεγάλο. Όταν το μήκος κ είναι πολύ μικρό (οριακά 0), τότε θα παρατηρήσουν ότι η γραφική παράσταση μετατρέπεται σε ευθεία που βρίσκεται πάνω στον άξονα χ΄χ.

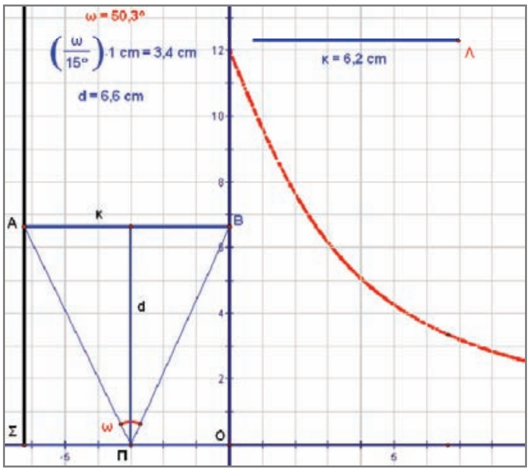
- Στην έβδομη άσκηση οι μαθητές θα συνδέσουν και θα ερμηνεύσουν τις διάφορες μορφές της γραφικής παράστασης με τον τύπο που κατασκεύασαν στην προηγούμενη δραστηριότητα. Η αξιοπιστία, επομένως, των κατασκευών τους, τόσο στο συμβολικό επίπεδο όσο και στο επίπεδο του δυναμικού μοντέλου, κατοχυρώνεται από το βαθμό συμβατότητας των κατασκευών αυτών, δηλαδή από τη δυνατότητα ερμηνείας του ενός μοντέλου μέσω του άλλου.

Μέρος 2ο

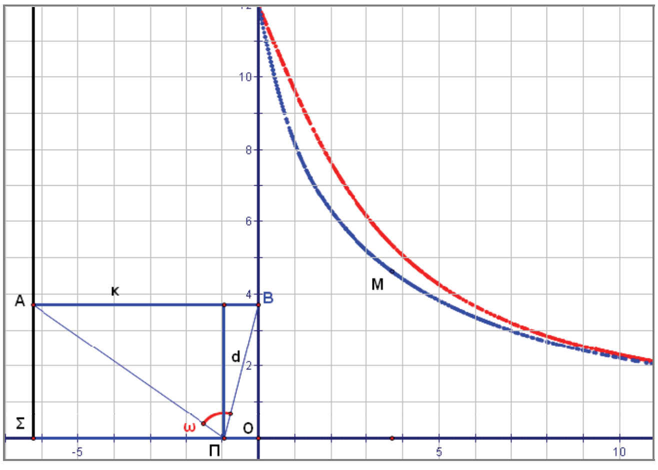
Στη συνέχεια οι μαθητές καλούνται να κατασκευάσουν ένα δυναμικό μοντέλο της πρότασης 6 των *Οπτικών* του Ευκλείδη. Εδώ η πορεία είναι ανάλογη με εκείνη του πρώτου μέρους. Οι μαθητές αναμένεται να κατασκευάσουν χωρίς μεγάλες δυσκολίες το αρχείο λογισμικού για την πρόταση 6 και να ξεκινήσουν τη μελέτη του. Αν ο διδάσκων προτιμά την υλοποίηση του δεύτερου μέρους, ανεξαρτήτως των άλλων δραστηριοτήτων, τότε έχει τη δυνατότητα να ζητήσει από τους μαθητές να χρησιμοποιήσουν το έτοιμο αρχείο Optic 6.

- Στην πρώτη άσκηση οι μαθητές θα ορίσουν και πάλι τα δύο μεγέθη d και ω που πρέπει να συνδεθούν. Επιπλέον, το μήκος κ θα αποτελέσει την παράμετρο της οποίας οι μεταβολές θα μελετηθούν σε σχέση με τη γραφική παράσταση που θα προκύψει.

- Στη συνέχεια θα δημιουργήσουν τη γραφική παράσταση και θα διαπραγματευτούν τη μορφή της καμπύλης.

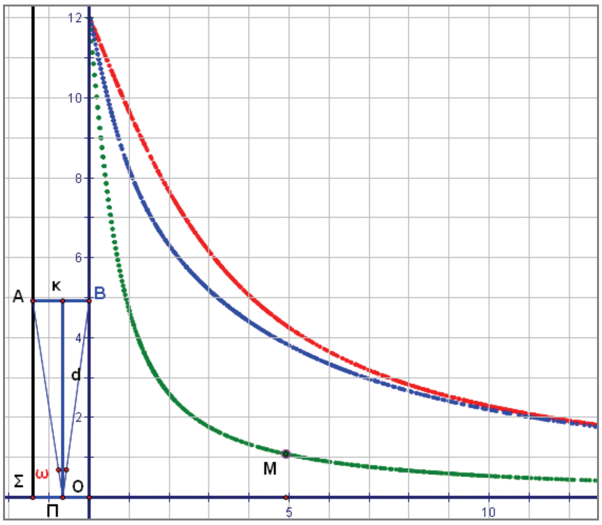


- Η μεταβολή της θέσης του σημείου Π, όπου υποτίθεται ότι βρίσκεται ο παρατηρητής, αναμένεται να δημιουργήσει νέες γραφικές παραστάσεις οι οποίες θα μελετηθούν σε σχέση με τις προηγούμενες.



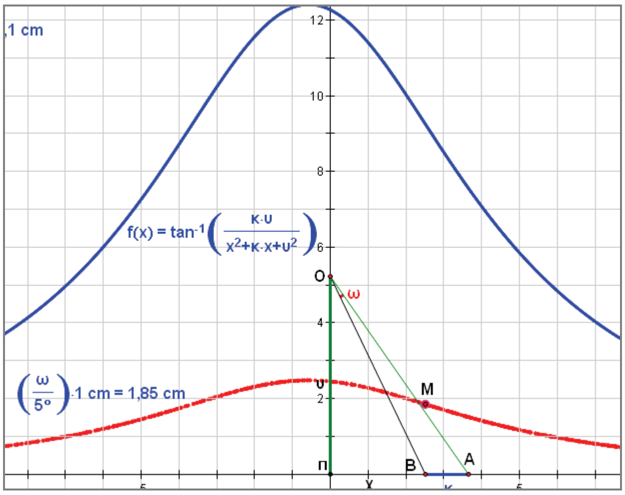
Εδώ η διαφορά στις γραφικές παραστάσεις θα οδηγήσει τους μαθητές σε διαπραγμάτευση με στόχο την ερμηνεία. Μία ενδεικτική εξήγηση θα μπορούσε να στηριχτεί στο γεγονός ότι από πλάγια θέση

το φαινόμενο μέγεθος είναι λίγο μικρότερο για κοντινές αποστάσεις, αλλά ίδιο για μεγαλύτερες, σε σύγκριση με την αρχική θέση του παρατηρητή στη μεσοκάθετη του κ.
Η μεταβολή του μήκους κ θα επιφέρει νέες μεταβολές στη γραφική παράσταση. Αν, για παράδειγμα, ελαττωθεί αρκετά το κ, τότε η γραφική παράσταση θα παρουσιάζει μεγάλη κλίση, γεγονός που οι μαθητές καλούνται να ερμηνεύσουν μέσα από τη φυσική εμπειρία της οπτικής τους αντίληψης.



- Στην έκτη άσκηση οι μαθητές θα συνδέσουν και θα ερμηνεύσουν τις διάφορες μορφές της γραφικής παράστασης με τον τύπο που κατασκεύασαν στην προηγούμενη δραστηριότητα. Η αξιοπιστία, επομένως, των κατασκευών τους, τόσο στο συμβολικό επίπεδο όσο και στο επίπεδο του δυναμικού μοντέλου, κατοχυρώνεται από το βαθμό συμβατότητας των κατασκευών αυτών, δηλαδή από τη δυνατότητα ερμηνείας του ενός μοντέλου μέσω του άλλου.

- Στην έβδομη άσκηση οι μαθητές θα δημιουργήσουν, με τη βοήθεια του λογισμικού, τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων που κατασκεύασαν στην προηγούμενη δραστηριότητα. Στόχος είναι εδώ να συγκρίνουν τις ομοιότητες και τις διαφορές των δύο καμπυλών.



Προφανώς υπάρχει περίπτωση οι δύο γραφικές παραστάσεις να μη συμπίπτουν. Στην παραπάνω εικόνα οι παραστάσεις δεν συμπίπτουν, αφού εκείνη που κατασκευάστηκε με το δυναμικό σημείο έχει προκύψει από τη διαίρεση των τιμών της γωνίας διά 5.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΕΣ ΑΝΑΦΟΡΕΣ

1. Arcavi, A. Hadas , N. (2000), "Computer mediated learning: an example of an approach", *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 5, 25-45, Kluwer Academic Publishers, printed in the Netherlands
2. Barbin, E. & Menghini, M. (2000), "On potentialities, limits, and risks", in J. Fauvel & J. van Maanen (Eds), *History in mathematics education*: An ICMI book, pp.86-90, Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers
3. Bachelard G. (1983), *La formation de l' esprit scientifique*, Paris, Presses Universitaires de France
4. Bertrand Yves (1994), *Σύγχρονες εκπαιδευτικές θεωρήσεις*, Αθήνα, Ελληνικά Γράμματα
5. Boaler J. (1998), *Open and closed Mathematics: Student experiences and Understandings*, J.R.M.E., January
6. Cockroft. W. H., "Mathematics counts: Report of iquiry in to the teaching of mathematics in schools", London Her Majesty's Stationery Office
7. Fischbein, E. (1977), "Image and Concept in Learning Mathematics", *Educational Studies in Mathematics*, 8, 153-165
8. Freudenthal, H. (1991), ''Revisiting Mathematics Education'', *China Lectures*, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers
9. Freudenthal H. (1981), "Should a mathematics teacher know something about the history of mathematics?", *For the Learning of Mathematics*, 2.1, 30-33
10. Freudenthal H. (1983), *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*, D.: Reidel Publishing Company
11. Gravemeijer, K.P.E. (2002). ''Emergent modelling as the basis for an instructional sequence on data analysis'', *Proceedings of the International Conference of Teaching Statistics*, Cape Town, South-Africa, July 7-12, 2002
12. Greer, B. (1997), "Modelling reality in the mathematics classroom: The case of word problems", *Learning and Instruction*, 7, 293-307
13. Heath Th. (1981), *A History of Greek Mathematics*, Dover Publications Inc.
14. Heath Th. (2001), *Ιστορία των Ελληνικών Μαθηματικών*, τόμος Ι, μετάφραση από την αρχική έκδοση του 1921 από το Κέντρο Έρευνας Επιστήμης και Εκπαίδευσης
15. Katz Victor J. (1986), "Using history in teaching mathematics", *For the Learning of Mathematics*, 6.3, 13-19
16. Panofsky Erwin (1997), *Perspective as symbolic Form*, Zone Books N.Y.
17. Ransom Peter (1995), "Navigation and surveying: teaching geometry through the use of old instruments", *Histoire et épistémologie dans l'éducation mathématique,* IREM de Montpellier, 227-239
18. Κουρνιάτη Α. (1998), *Οπτικά του Ευκλείδη και προοπτικές απεικόνισης*, διδακτορική διατριβή, Βιβλιοθήκη Σχολής Καλών Τεχνών του Πολυτεχνείου της Αθήνας
19. Σπανδάγος Ευάγγελος, (2000), *Τα Οπτικά και Κατοπτρικά του Ευκλείδου*, Εκδόσεις Αίθρα
20. Tomαs Garcνa - Salgado Distance to the Perspective Plane (τον 1/2008 η διεύθυνση είναι: http://www.springerlink.com/content/p62k42px20215718/fulltext.pdf)

ΡΕΑΛΙΣΤΙΚΑ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό αναπτύχθηκε στο παρακάτω πλαίσιο:	
Πράξη:	**ΠΛΕΙΑΔΕΣ**: *Ανάπτυξη Εκπαιδευτικού Λογισμικού και Ολοκληρωμένων Εκπαιδευτικών Πακέτων για τα Ελληνικά Σχολεία της Πρωτοβάθμιας και Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης & Διάθεση Προϊόντων Εκπαιδευτικού Λογισμικού στα Σχολεία.* (2003-2007) http://pleiades.cti.gr
Ενότητα:	**ΝΗΡΗΙΔΕΣ**: Ανάπτυξη ολοκληρωμένων εκπαιδευτικών πακέτων.
Τελικός Δικαιούχος (Φορέας Υλοποίησης & Επιστημονικής Παρακολούθησης του έργου):	Ερευνητικό Ακαδημαϊκό Ινστιτούτο Τεχνολογίας Υπολογιστών (ΕΑ.ΙΤΥ) http://www.cti.gr/
Φορέας Χρηματοδότησης και Λειτουργίας:	Υπουργείο Εθνικής Παιδείας και Θρησκευμάτων (Υπ.Ε.Π.Θ.)
Χρηματοδότηση:	**Επιχειρησιακό Πρόγραμμα**: «Κοινωνία της Πληροφορίας», Μέτρο Ι.2, Γ' ΚΠΣ

ΤΟ ΠΑΡΟΝ ΕΡΓΟ ΧΡΗΜΑΤΟΔΟΤΕΙΤΑΙ ΚΑΤΑ 75% ΑΠΟ ΤΟ ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

ΕΥΡΩΠΑΪΚΗ ΕΝΩΣΗ

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΕΘΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ

ΓΡΑΦΕΙΟ ΓΙΑ ΤΗΝ ΚΟΙΝΩΝΙΑ ΤΗΣ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΑΣ

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΚΑΣΤΑΝΙΩΤΗ