Πλειάδες

Νηρηίδες

ΡΕΑΛΙΣΤΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Τετράδιο Μαθητή

ΤΟ ΠΑΡΟΝ ΕΡΓΟ ΧΡΗΜΑΤΟΔΟΤΕΙΤΑΙ ΚΑΤΑ 75% ΑΠΟ ΤΟ ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

ΕΥΡΩΠΑΪΚΗ ΕΝΩΣΗ

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΕΘΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ

ΓΡΑΦΕΙΟ ΓΙΑ ΤΗΝ ΚΟΙΝΩΝΙΑ ΤΗΣ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΑΣ

ΙΤΥ

Νηρηίδες

Πλειάδες

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΚΑΣΤΑΝΙΩΤΗ INTERACTIVE

ΕΚΔΟΣΗ 1.1 • ΑΠΡΙΛΙΟΣ 2008

Ανάδοχος Φορέας Έργου	*Εκδόσεις Καστανιώτη Α.Ε.* www.kastaniotis.com
Ομάδα Ανάπτυξης του Έργου «*Ρεαλιστικά Μαθηματικά*»	Συντονιστής έργου: Αγαθός Γεώργιος Εκπαιδευτική ομάδα: Κεΐσογλου Στέφανος, Λάτση Μαρία, Συκαρά Νεκταρία Τεχνική ομάδα: Ζευγώλης Παναγιώτης, Λουκιανός Μιχάλης Επιμέλεια: Κορμπάκη Γεωργία Υπεύθυνος/οι παρακολούθησης εκ μέρους του ΕΑ.ΙΤΥ: Τσίτσος Βασίλειος

Π Ρ Ο Λ Ο Γ Ο Σ

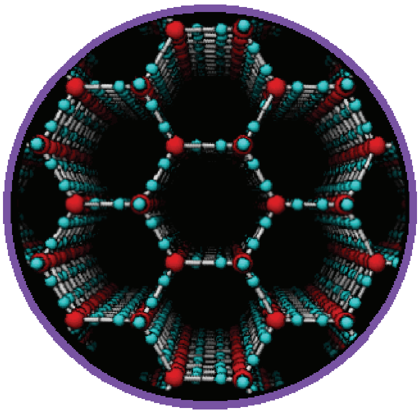
Δεν είναι λίγες οι φορές που οι μαθητές έχουν αναρωτηθεί:

- Σε τι μας χρησιμεύουν τα μαθητικά;
- Τι σχέση έχουν τα μαθηματικά με τον πραγματικό κόσμο;
- Άραγε τα μαθηματικά περιορίζονται μόνο σε εκείνα που κάνουμε στο σχολείο;

Τα ερωτήματα αυτά, αν δεν τα έχετε ήδη απευθύνει και εσείς σε κάποιον ειδικό, ασφαλώς θα τα έχετε ακούσει από συμμαθητές σας, από γνωστούς σας και κυρίως από άτομα τα οποία δεν βρίσκουν ιδιαίτερο ενδιαφέρον στο να λύνουν ασκήσεις ή να μαθαίνουν τύπους.

Θα προσπαθήσουμε να δώσουμε απαντήσεις στα παραπάνω ερωτήματα με τη βοήθεια διαφόρων εικόνων. Στις παρακάτω εικόνες υπάρχουν τέσσερις διαφορετικές ενότητες. Στην πρώτη ενότητα τα μαθηματικά τα συναντάμε στη φύση, στη δεύτερη τα συναντάμε στη διακόσμηση, στην τρίτη τα συναντάμε στην τέχνη της ζωγραφικής και στην τέταρτη τα συναντάμε στην οπτική μας αντίληψη, δηλαδή στον τρόπο με τον οποίο αντιλαμβανόμαστε τα πράγματα γύρω μας. Δείτε με προσοχή τις παρακάτω εικόνες.

Ενότητα 1η: Τα μαθηματικά στη φύση

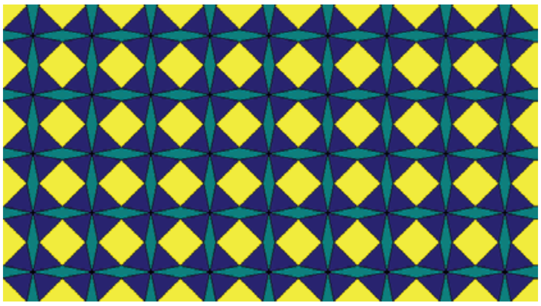


Μεγέθυνση κατά 100.000.000 φορές ενός μορίου σε παγωμένο νερό.

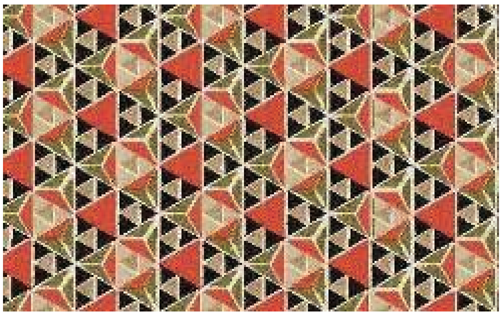
Νιφάδα χιονιού φωτογραφημένη με ηλεκτρονικό μικροσκόπιο.

Ενότητα 2η: Τα μαθηματικά στη διακόσμηση

Διακοσμητικά δαπέδων



Αρχαίο ελληνικό

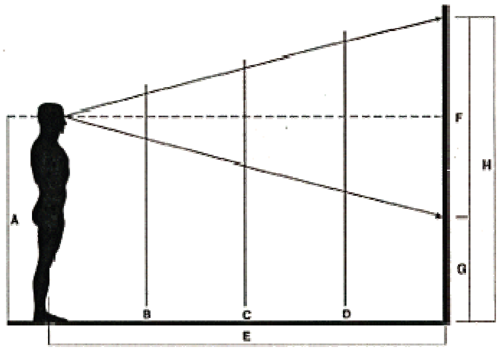


Βυζαντινό

Ενότητα 3η: Τα μαθηματικά στην τέχνη της ζωγραφικής

Ραφαήλ: Η σχολή των Αθηνών

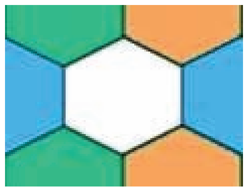
Ενότητα 4η: Τα μαθηματικά της οπτικής μας αντίληψης



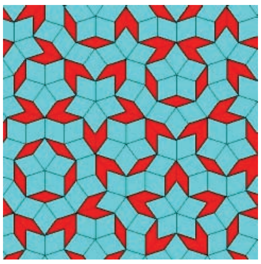
Ο οπτικός κώνος

Οι δραστηριότητες που ακολουθούν, ανάλογα με την τάξη και τη βαθμίδα που βρίσκεσαι (δημοτικό, γυμνάσιο, λύκειο), στοχεύουν στο να δείξουν τη σχέση ανάμεσα στα μαθηματικά και στον πραγματικό κόσμο.

Οι μαθητές του δημοτικού θα ασχοληθούν με τη διακόσμηση και την κάλυψη ενός δαπέδου με γεωμετρικά σχήματα. Η συγκεκριμένη τέχνη, γιατί περί τέχνης πρόκειται, χρησιμοποιεί γνωστά γεωμετρικά σχήματα τα οποία συνθέτει με τρόπο που να αποτελούν ένα αρμονικό σύνολο. Οι συνθέσεις αυτές μπορεί να είναι απλές, όπως αυτή που εμφανίζεται στη διπλανή εικόνα:



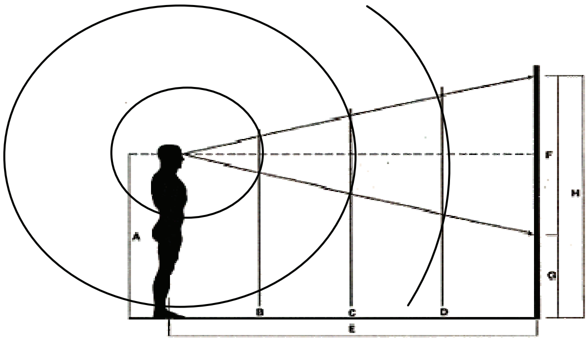
ή πιο σύνθετες, όπως αυτή που ακολουθεί:



Σε κάθε περίπτωση, αυτό που έχει σημασία είναι να κατασκευάσετε τις συνθέσεις αυτές με τη βοήθεια σύγχρονων εργαλείων, όπως είναι ο υπολογιστής και το λογισμικό. Τα εργαλεία αυτά μας επιτρέπουν να ανακαλύψουμε τα μυστικά της κατασκευής των σχημάτων και μας βοηθούν να δημιουργήσουμε νέες κατασκευές που θα ταιριάζουν στη δική μας αισθητική.

Οι μαθητές του γυμνασίου θα μελετήσουν δύο διαφορετικές θεματικές περιοχές, οι οποίες όμως έχουν κοινή αφετηρία: τον τρόπο με τον οποίο λειτουργεί και αξιοποιείται η οπτική μας αντίληψη.

Καταρχάς η οπτική μας αντίληψη, και συγκεκριμένα η οπτική γωνία με την οποία παρατηρούμε τα αντικείμενα, μπορεί να μελετηθεί και να συνδεθεί με απλές μαθηματικές έννοιες, όπως εκείνη του κύκλου.



Με τον τρόπο αυτό ο κύκλος και η εγγεγραμμένη γωνία μπορεί να αποτελέσουν τη βάση ενός γεωμετρικού μοντέλου της οπτικής γωνίας παρατήρησης.

Η δεύτερη θεματική περιοχή αναφέρεται σε μία τέχνη που αναπτύχθηκε ιδιαίτερα στην Αναγέννηση και έχει σχέση με την αίσθηση του βάθους που μας δίνουν τα έργα των ζωγράφων. Πρόκειται για την τέχνη της προοπτικής. Αν παρατηρήσετε τους δύο παρακάτω πίνακες ζωγραφικής, θα διαπιστώσετε ότι υπάρχει μία σημαντική διαφορά στον τρόπο που οι δύο ζωγράφοι απεικονίζουν το χώρο.

Ο ένας πίνακας δημιουργήθηκε το 1303 και ο άλλος το 1494. Τι μεσολάβησε άραγε και οι ζωγράφοι απέκτησαν την ευχέρεια να παριστάνουν το χώρο με τόση πειστικότητα, σχεδόν σαν φωτογραφία, όπως συμβαίνει με το δεύτερο πίνακα ζωγραφικής;

Σε αυτό ακριβώς το ερώτημα καλούνται να απαντήσουν οι μαθητές του γυμνασίου, οι οποίοι θα ερευνήσουν, με τη βοήθεια του υπολογιστή, τα μυστικά της προοπτικής τέχνης, άρα και τις μεθόδους των καλλιτεχνών.

Οι μαθητές του λυκείου θα μελετήσουν δύο διαφορετικές θεματικές περιοχές οι οποίες αναφέρονται στη χρήση απλών εργαλείων μέτρησης αποστάσεων και στον τρόπο με τον οποίο ο Ευκλείδης μαθηματικοποίησε την οπτική μας αντίληψη.

Στην πρώτη θεματική ενότητα θα μελετήσουν προσομοιώσεις εργαλείων, ώστε να αναδείξουν τις μαθηματικές έννοιες που εμπλέκονται με τα εργαλεία αυτά.

Στη δεύτερη θεματική ενότητα θα μελετήσουν δύο προτάσεις από το έργο του *Οπτικά*, ενώ, με τη βοήθεια του υπολογιστή, θα αναζητήσουν μία σύγχρονη μαθηματική προσέγγιση των προτάσεων αυτών. Στόχος του Ευκλείδη, στη μία από τις δύο προτάσεις, ήταν να εξηγήσει γιατί και πώς τα αντικείμενα που βρίσκονται σε απόσταση από εμάς φαίνεται να είναι μικρότερα από το πραγματικό τους μέγεθος.

Στην άλλη πρόταση του Ευκλείδη, που θα εξετάσουν οι μαθητές, γίνεται μαθηματική ερμηνεία του φαινομένου κατά το οποίο παράλληλες γραμμές φαίνεται να συγκλίνουν, καθώς απομακρύνονται από τον παρατηρητή.

Σε κάθε περίπτωση, και για κάθε βαθμίδα, ζητούμενο είναι να αντιμετωπίσουμε τα μαθηματικά ως μοντέλα του πραγματικού μας κόσμου που μας επιτρέπουν να ερμηνεύσουμε καλύτερα τα φαινόμενα της οπτικής μας αντίληψης και να δημιουργήσουμε άψογες αισθητικά συνθέσεις.

Π Ε Ρ Ι Ε Χ Ο Μ Ε Ν Α

ΠΡΟΛΟΓΟΣ 3
ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ 7
Η ΕΝΝΟΙΑ ΡΕΑΛΙΣΤΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ Η ΡΕΑΛΙΣΤΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ 9
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΕΣ ΑΝΑΦΟΡΕΣ 14
ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΕΣ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ ΓΙΑ ΤΟ ΔΗΜΟΤΙΚΟ 15
1.1 Επαναλαμβανόμενα ψηφοθετήματα/tessellation 15
1.2 Πρώτο εκπαιδευτικό σενάριο για το δημοτικό 17
1.2.1 Φύλλο εργασίας - Επαναλαμβανόμενα ψηφοθετήματα στην τέχνη 17
1.2.2 Φύλλο εργασίας - Κανονικά επαναλαμβανόμενα ψηφοθετήματα/regular tessellation (1) 19
1.2.3 Φύλλο εργασίας - Κανονικά επαναλαμβανόμενα ψηφοθετήματα/regular tessellation (2) 21
1.3 Δεύτερο εκπαιδευτικό σενάριο για το δημοτικό 22
1.3.1 Φύλλο εργασίας - Κανονικά πολύγωνα και τεθλασμένες γραμμές 22
1.3.2 Φύλλο εργασίας - Τα «πλακόστρωτα» του Penrose 25
ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΕΣ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ ΓΙΑ ΤΟ ΓΥΜΝΑΣΙΟ 27
2.1 Θεματική ενότητα: Οπτικό πεδίο – προοπτικό επίπεδο 27
2.2 Δραστηριότητες για την Α’ Γυμνασίου 30
2.2.1 Δραστηριότητα: ΟΠΤΙΚΗ ΓΩΝΙΑ 30
2.2.2 Δραστηριότητα: ΤΟ ΠΡΟΟΠΤΙΚΟ ΔΑΠΕΔΟ 32
2.3 Δραστηριότητες για τη Β’ Γυμνασίου 35
2.3.1 Δραστηριότητα: ΟΠΤΙΚΗ ΓΩΝΙΑ ΤΟΥ ΘΕΑΤΗ 35
2.3.2 Δραστηριότητα: ΟΠΤΙΚΗ ΓΩΝΙΑ ΚΑΙ ΜΕΤΡΗΣΕΙΣ 38
2.4 Δραστηριότητες για τη Γ’ Γυμνασίου 41
2.4.1 Δραστηριότητα: ΕΡΓΑΛΕΙΑ ΜΕΤΡΗΣΗΣ 41
2.4.2 Δραστηριότητα: ΤΟ ΠΡΟΟΠΤΙΚΟ ΕΠΙΠΕΔΟ 44
2.5 Project Γυμνασίου 48
2.5.1 ΟΙ ΟΠΤΙΚΕΣ ΑΚΤΙΝΕΣ 48
2.5.2 Η ΜΕΛΕΤΗ ΤΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ ΤΟΥ ALBERTI 51
2.5.3 ΜΕΛΕΤΗ ΕΡΓΩΝ ΤΕΧΝΗΣ 54
2.5.4 Ο ΠΡΟΟΠΤΙΚΟΣ ΧΩΡΟΣ 55
ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΕΣ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ ΓΙΑ ΤΟ ΛΥΚΕΙΟ 57
3.1 Θεματική ενότητα: Μετρήσεις μέσω ακτίνων (οπτικών – φωτός) 57
3.2 Δραστηριότητες για την Α’ Λυκείου 58
3.2.1 Δραστηριότητα: ΕΡΓΑΛΕΙΑ ΜΕΤΡΗΣΕΩΝ 58
3.2.2 Δραστηριότητα: ΚΑΤΟΠΤΡΑ 61
3.3 Δραστηριότητες για τη Β’ Λυκείου 64
3.3.1 Δραστηριότητα: Ο ΠΡΟΒΟΛΕΑΣ 64
3.3.2 Δραστηριότητα: Η ΠΙΣΙΝΑ 67
3.4 Δραστηριότητες για τη Γ’ Λυκείου 70
3.4.1 Δραστηριότητα: Η ΒΕΛΤΙΣΤΗ ΟΠΤΙΚΗ ΓΩΝΙΑ 70
3.4.2 Δραστηριότητα: Η ΒΕΛΤΙΣΤΗ ΘΕΣΗ ΣΤΟ ΠΟΔΟΣΦΑΙΡΟ 72
3.5 Project Λυκείου 75
3.5.1 Η ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ f(x)=arctan(x) 77
3.5.2 ΜΕΛΕΤΗ ΦΩΤΟΓΡΑΦΙΑΣ 80
3.5.3 ΤΑ ΟΠΤΙΚΑ ΤΟΥ ΕΥΚΛΕΙΔΗ 82
3.5.4 Η ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ 85
3.5.5 ΔΥΝΑΜΙΚΑ ΜΟΝΤΕΛΑ 87

Η ΕΝΝΟΙΑ ΡΕΑΛΙΣΤΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ Η ΡΕΑΛΙΣΤΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ

Τα σενάρια και οι δραστηριότητες που περιγράφονται στα κείμενα του έργου *Ρεαλιστικά Μαθηματικά* συνιστούν μία πρόταση προς τη μαθηματική εκπαιδευτική κοινότητα, ένα διδακτικό πείραμα με στόχο τη σύνδεση των μαθηματικών με τον πραγματικό κόσμο.

Ωστόσο, κάθε διδακτική πρόταση είναι δομημένη πάνω σε γενικές θεωρητικές παραδοχές, οι οποίες και δημιουργούν το πλαίσιο ανάπτυξης, δηλαδή τη φιλοσοφία των δραστηριοτήτων που καλούνται να υλοποιήσουν οι μαθητές.

Στο παρόν έργο το βασικό θεωρητικό πλαίσιο στηρίζεται στην έννοια «ρεαλιστικά μαθηματικά» και στη Ρεαλιστική Μαθηματική Εκπαίδευση.

Τα «ρεαλιστικά μαθηματικά» αφορούν στη διδακτική μεθοδολογία η οποία αναπτύχθηκε στο Ινστιτούτο Freudenthal, στο Πανεπιστήμιο της Utrecht, και υιοθετήθηκε από το σύνολο σχεδόν των Κάτω Χωρών το 1971. Η μεθοδολογία αυτή είναι γνωστή ως Ρεαλιστική Μαθηματική Εκπαίδευση (Realistic Mathematics Education ή RME) και έχει ως βάση την καθοδηγούμενη επανακατασκευή των μαθηματικών εννοιών από τους μαθητές μέσα από μία διαδικασία προοδευτικής μαθηματικοποίησης· έννοιες που θα αποσαφηνιστούν στη συνέχεια. Η προοπτική αυτή για τη μαθηματική εκπαίδευση είναι πλέον αποδεκτή από ένα μεγάλο αριθμό χωρών, όπως η Γερμανία, η Αγγλία, η Ισπανία, οι ΗΠΑ, η Βραζιλία κ.λπ.

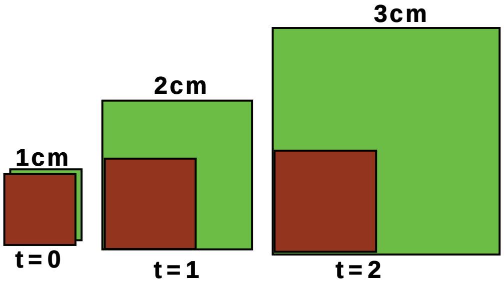
Ο όρος «ρεαλιστικά» παραπέμπει προφανώς στην ανάγκη να είναι τα μαθηματικά συνδεδεμένα με πραγματικές καταστάσεις, όμως θα πρέπει να τονιστεί ότι κυρίαρχο αίτημα στην RME είναι να έχουν νόημα για το μαθητή οι καταστάσεις που καλείται να μαθηματικοποιήσει ο ίδιος. Αυτό σημαίνει ότι οι μαθητές δεν καλούνται να λύσουν μόνο πραγματικά προβλήματα, αλλά και προβλήματα που αφορούν σε ένα μαθηματικό μοντέλο ή σε μία μαθηματική εφαρμογή, αρκεί τα προβλήματα αυτά να συνδέονται με τα ενδιαφέροντα και την εμπειρία τους, φυσική ή μαθηματική (de Lange, 1996).

Η σημασία του όρου «ρεαλιστικά»
Ο όρος «ρεαλιστικά μαθηματικά» παραπέμπει, σε πρώτη ανάγνωση, σε μαθηματικά τα οποία αναφέρονται σε προβλήματα του πραγματικού κόσμου, σε φαινόμενα που εμφανίζονται στην καθημερινή μας ζωή. Ο λόγος, όμως, για τον οποίο η συγκεκριμένη μορφή της μαθηματικής εκπαίδευσης χαρακτηρίζεται ως «ρεαλιστική» δεν είναι ακριβώς επειδή σχετίζονται με τον πραγματικό κόσμο, αλλά διότι δίνεται έμφαση σε καταστάσεις τις οποίες οι μαθητές μπορούν να φανταστούν.

Η ολλανδική μετάφραση του ρήματος «φαντάζομαι» είναι «zich REALISEren» και από αυτήν ακριβώς την απόδοση του όρου προέκυψε η ονομασία Ρεαλιστικά Μαθηματικά. Το σημαντικό επομένως είναι ότι κέντρο των Ρεαλιστικών Μαθηματικών αποτελεί η λύση προβλημάτων, τα οποία έχουν νόημα για το μαθητή με την έννοια ότι μπορεί να τα φανταστεί (van der Heuvel-Panhuizen, 2001).

Η δυνατότητα να φανταστεί ο μαθητής μία κατάσταση προβλήματος στην RME δεν περιορίζεται σε πραγματικές καταστάσεις. Ένα μαθηματικό πρόβλημα, το οποίο έχει νόημα για τους μαθητές, θα μπορούσε να αποτελέσει την αφετηρία για μία δημιουργική πορεία από την άτυπη διαισθητική γνώση μέχρι την τυπική έκφραση.

Παράδειγμα



Στην εικόνα υπάρχουν δύο τετράγωνα, ένα πράσινο και ένα καφέ. Τη χρονική στιγμή t=0 τα δύο τετράγωνα έχουν ίσα εμβαδά, αφού οι πλευρές τους είναι ίσες (1 εκ. η καθεμιά).
Το εμβαδόν των τετραγώνων αυξάνει με διαφορετικό τρόπο. Στο πράσινο η πλευρά αυξάνει 1 εκ. το λεπτό, ενώ στο καφέ η επιφάνεια αυξάνεται κατά 0,1% την ώρα. Για τα εμβαδά των δυο τετραγώνων υπάρχουν οι παρακάτω απόψεις:

α) Το πράσινο τετράγωνο θα έχει πάντα μεγαλύτερο εμβαδόν από το καφέ και μάλιστα η διαφορά τους θα αυξάνεται συνεχώς.
β) Το καφέ τετράγωνο θα έχει πάντα μικρότερο εμβαδόν από το πράσινο, αλλά η διαφορά των εμβαδών τους θα ελαττώνεται συνεχώς. Ποια από τις δύο εκδοχές θεωρείτε ότι είναι η πιθανότερη;

Στο παραπάνω πρόβλημα ο μαθητής μπορεί να «φανταστεί» την κατάσταση, αφού η μεγέθυνση αντικειμένων ανήκει στο χώρο της εμπειρίας του. Εδώ το σημαντικό είναι ότι η λύση δεν προκύπτει άμεσα και οι μαθητές θα πρέπει να χρησιμοποιήσουν μαθηματικά μοντέλα για τις μεταβολές, τα οποία στη συνέχεια θα συγκρίνουν. Η διαδικασία αυτή αποτελεί γνώρισμα της RME και έχει το χαρακτήρα της οριζόντιας και κατακόρυφης μαθηματικοποίησης.

Επανακατασκευή και μαθηματικοποίηση

Με τη λέξη «επανακατασκευή» αποδίδουμε τον όρο «reinvention» που αποτελεί κεντρική έννοια της RME και σε μία επί λέξη μετάφραση θα αποδιδόταν ως «επανεπινόηση». Η χρήση του όρου «επανακατασκευή» έχει προταθεί από Έλληνες ερευνητές (Κολέζα, 2000) και διαθέτει μια αμεσότητα που παραπέμπει στην κατασκευαστική αντίληψη για τη γνώση.

Προφανώς υπάρχει μία λεπτή διαφορά μεταξύ της επανεπινόησης και της επανακατασκευής, αφού στην πρώτη δηλώνεται σαφώς ότι τα μαθηματικά έχουν επινοηθεί από την ανθρώπινη κοινότητα, ενώ στη δεύτερη δεν είναι σαφής η επιστημολογική αυτή νύξη.

Ας έρθουμε όμως στην ουσία του όρου που είναι η διδακτική στάση την οποία υπονοεί. Σύμφωνα με την αρχή της επανακατασκευής, ο σχεδιασμός των δραστηριοτήτων, με τις οποίες θα εμπλακεί ο μαθητής, θα πρέπει να του δίνει την ευκαιρία να βιώσει μια διαδικασία όμοια με εκείνη που φαίνεται να έχει ακολουθήσει η ανάπτυξη των μαθηματικών ιδεών. Αυτό σημαίνει ότι θα πρέπει να βασίζεται στην άτυπη, διαισθητική γνώση του μαθητή, η οποία σταδιακά θα μετασχηματιστεί σε αυστηρή, τυπική μαθηματική γνώση. Εδώ ο σχεδιασμός θα μπορούσε να στηριχτεί στην Ιστορία των Μαθηματικών, ως πηγή έμπνευσης, και στις άτυπες λύσεις των μαθητών, καθώς επιχειρούν να λύσουν προβλήματα για τα οποία δεν διαθέτουν γνώσεις ή αλγορίθμους με τους οποίους μπορούν να τα λύσουν άμεσα (Gravenmeijer, 1994).

Αφού προσδιοριστεί η κατάσταση του προβλήματος, καθορίζεται και η διδακτική πορεία ως μια διαδικασία προοδευτικής μαθηματικοποίησης. Η πορεία αυτή είναι κατευθυνόμενη (guided), με την έννοια ότι ο μαθητής εμπλέκεται σε δραστηριότητες που διαθέτουν σαφή προσανατολισμό και υλοποιούνται σε ένα συγκεκριμένο μαθησιακό περιβάλλον, το οποίο έχει σχεδιαστεί και οργανωθεί με στόχο την πρόκληση και υποστήριξη των δράσεων μαθηματικοποίησης.

Αυτό το οποίο έχει υπογραμμίσει ο Freudenthal (1991) και αποσαφηνίζει την έννοια της επανακατασκευής είναι το ότι δεν αναμένουμε ο μαθητής να κατασκευάσει τα πάντα μόνος του. Έμφαση θα πρέπει να δοθεί στο χαρακτήρα της μαθησιακής διαδικασίας και όχι στον όρο καθεαυτό. Είναι σημαντικό οι μαθητές να αντιληφθούν ότι η νέα γνώση είναι προσωπική τους υπόθεση, για την οποία και είναι υπεύθυνοι.

Ας έρθουμε τώρα στην έννοια της μαθηματικοποίησης, η οποία χαρακτηρίζει τη μαθησιακή διαδικασία στο πλαίσιο της RME.

Ο Treffers πρότεινε τη διάκριση δύο μορφών μαθηματικοποίησης, την οριζόντια και την κατακόρυφη (1987).

Κατά την οριζόντια μαθηματικοποίηση οι μαθητές επιχειρούν, με τα μαθηματικά εργαλεία που διαθέτουν, να οργανώσουν και να λύσουν ένα «ρεαλιστικό» πρόβλημα. Οι δραστηριότητες που χαρακτηρίζονται ως οριζόντιες είναι: η περιγραφή της κατάστασης του προβλήματος με μαθηματικούς όρους, η διατύπωση εικασιών, η εκτέλεση πειραμάτων, η οπτικοποίηση του προβλήματος, ο εντοπισμός σχέσεων μεταξύ των παραμέτρων, ο μετασχηματισμός του πραγματικού προβλήματος σε ένα ισοδύναμο μαθηματικό πρόβλημα.
Η κατακόρυφη μαθηματικοποίηση χαρακτηρίζεται από δράσεις όπως:

η αναπαράσταση μιας σχέσης με έναν τύπο, η απόδειξη μιας σχέσης, η γενίκευση, η περιγραφή ενός μαθηματικού μοντέλου με αυστηρά μαθηματική γλώσσα.

Ο ρόλος του διδάσκοντα στην RME

Ο ρόλος του διδάσκοντα στην RME είναι να οργανώνει, να κατευθύνει και να διευκολύνει τους μαθητές. Συγχρόνως, όμως, να αξιολογεί τη διδακτική του πορεία και είναι έτοιμος να την αναθεωρήσει (de Lange, 1996· Gravenmeijer, 1994). Συγκεκριμένα, κατά τη διάρκεια μιας δραστηριότητας, ο διδάσκων:

- Προτείνει στους μαθητές προβλήματα ή, καλύτερα, καταστάσεις προβλήματος κατάλληλα επιλεγμένες.
- Επικοινωνεί με τους μαθητές, δίνοντάς τους στοιχεία και απευθύνοντάς τους ερωτήσεις οι οποίες τους βοηθούν να εστιάσουν στα σημαντικά χαρακτηριστικά της κατάστασης.

- Προτρέπει τους μαθητές να διαπραγματευτούν τις λύσεις και τις ιδέες που επεξεργάζονται.
- Ενθαρρύνει τους μαθητές να προσεγγίζουν την κατάσταση προβλήματος με το δικό τους τρόπο, να διατυπώνουν τις εικασίες τους και να προτείνουν λύσεις δικής τους επινόησης.
- Προτρέπει τους μαθητές να διερευνούν ερωτήματα τα οποία έχουν οι ίδιοι θέσει και τους προτείνει επεκτάσεις στη διερεύνηση.

Ο ρόλος και η σημασία των μοντέλων στην RME

Ως μοντέλο ορίζουμε ένα σύστημα το οποίο περιέχει στοιχειώδη αντικείμενα, διαδικασίες και κανόνες και μπορεί να χρησιμοποιηθεί, για να περιγράψει, να εξηγήσει ή να προβλέψει τη συμπεριφορά άλλων συστημάτων (Doerr & English, 2001). Το ενδιαφέρον της RME στρέφεται σε μοντέλα, των οποίων η δομή παρουσιάζει μαθηματικό ενδιαφέρον.

Τα μοντέλα θα μπορούσαν να χαρακτηριστούν ως γέφυρες μεταξύ της κατάστασης προβλήματος και της τυπικής μαθηματικής γνώσης.

Στο πλαίσιο της RME τα μοντέλα αποτελούν αναπαραστάσεις της κατάστασης του προβλήματος, οι οποίες απεικονίζουν τις ουσιαστικές πτυχές των μαθηματικών εννοιών και δομών που σχετίζονται με τη συγκεκριμένη κατάσταση. Το νόημα του όρου «μοντέλο» δεν θα πρέπει να περιορίζεται στην κυριολεξία του. Αντικείμενα, σχήματα, διαγράμματα, ακόμη και σύμβολα, θα μπορούσαν να θεωρηθούν ως μοντέλα (Treffers, 1987· Gravemeijer, 1994).

Δύο βασικά χαρακτηριστικά των μοντέλων προσδιορίζουν τη διδακτική τους αξία. Αφενός θα πρέπει να προέρχονται από ένα ρεαλιστικό πλαίσιο, στο οποίο η φαντασία του μαθητή έχει πρόσβαση, και αφετέρου θα πρέπει να είναι ευέλικτα, ώστε να μπορούν να χρησιμοποιηθούν σε όλο και πιο πολύπλοκες μαθηματικές δραστηριότητες. Από αυτή ακριβώς την ευελιξία, για χρήση σε πολλαπλά επίπεδα, αντλεί τη δυναμική του το μοντέλο (V. H. Panhuizen, 2003).

Ένα άλλο χαρακτηριστικό που θα πρέπει να διαθέτει ένα μοντέλο είναι η δυνατότητα να συμπεριφέρεται με «φυσικό» τρόπο, να διαθέτει διαφάνεια σε ό,τι αφορά τις σχεδιαστικές επιλογές του κατασκευαστή του, ώστε να δίνει στο μαθητή την αίσθηση ότι έχει κατασκευαστεί από τον ίδιο.

Η δημιουργία μαθηματικών μοντέλων μέσα από διαδικασίες μαθηματικοποίησης μας επιτρέπει την εννοιολογική διάκριση: σε μοντέλα μιας πραγματικής κατάστασης και σε μοντέλα για μία πραγματική κατάσταση (model of – model for) (Gravemeijer, 2002). Ας αποσαφηνίσουμε όμως τη διάκριση αυτή. Καθώς οι μαθητές εμπλέκονται σε δραστηριότητες μαθηματικοποίησης, δημιουργούν μαθηματικές σχέσεις οι οποίες στην αρχή προσδιορίζονται στο πλαίσιο της πραγματικής κατάστασης στην οποία αναφέρονται τα συσχετιζόμενα μεγέθη. Οι συγκεκριμένες σχέσεις-μοντέλα αντλούν το νόημά τους από την πραγματική κατάσταση. Το μοντέλο σε αυτή την περίπτωση μπορεί να χαρακτηριστεί ως ***μοντέλο της*** συγκεκριμένης κατάστασης.

Καθώς το ίδιο μοντέλο προκύπτει από τη μαθηματικοποίηση και άλλων καταστάσεων προβλήματος, αποκτά ένα γενικευμένο χαρακτήρα, αποστασιοποιείται από το αρχικό πλαίσιο και αυτονομείται ως ένα ανεξάρτητο μαθηματικό αντικείμενο, το οποίο μπορεί να χρησιμοποιηθεί για περαιτέρω μαθηματική επεξεργασία. Το μοντέλο τότε έχει την έννοια του ***μοντέλου για*** λύση προβλημάτων.

Ο μετασχηματισμός αυτός πραγματοποιείται σταδιακά, ενόσω οι μαθητές μελετούν τις σχέσεις που προσδιορίζουν το μοντέλο, το οποίο πλέον αντλεί το νόημά του από τις συγκεκριμένες συσχετίσεις των μεγεθών στα οποία αναφέρεται.

Η σημασία της χρήσης μοντέλων στην ανάπτυξη των μαθηματικών αναδεικνύεται και από τη μελέτη ιστορικών κειμένων, όπως τα *Οπτικά* του Ευκλείδη. Στο συγκεκριμένο έργο ο Ευκλείδης επιχειρεί τη δημιουργία γεωμετρικών μοντέλων της οπτικής μας αντίληψης και είναι χαρακτηριστικός ο τρόπος με τον οποίο αναπτύσσει και επεξεργάζεται τα μοντέλα του.

Στην ουσία ακολουθεί μια διαδικασία οριζόντιας και κατακόρυφης μαθηματικοποίησης. Συγκεκριμένα χρησιμοποιεί ως αφετηρία τον τρόπο με τον οποίο αντιλαμβανόμαστε το χώρο και τα αντικείμενα που υπάρχουν σε αυτόν και δημιουργεί γεωμετρικά μοντέλα για να αποσαφηνίσει την αντίληψή μας για τα αντικείμενα αυτά. Κεντρική του επιλογή η αναπαράσταση του μεγέθους ενός αντικειμένου με τη γωνία από την οποία φαίνεται το αντικείμενο αυτό. Στη συνέχεια δημιουργεί γεωμετρικά σχήματα για την περιγραφή πολύ συγκεκριμένων καταστάσεων, τα μελετά με αυστηρά μαθηματικό τρόπο και τελικά σχηματίζει μία γενική θεωρία για την οπτική μας αντίληψη.

RME και χρήση της τεχνολογίας

Η θετική συνεισφορά της χρήσης υπολογιστικών εργαλείων δεν φαίνεται να προκύπτει με σαφήνεια από τις έρευνες (Kaput, 1998· Clements, 2000). Συχνά η συζήτηση για τη χρήση της τεχνολογίας στη μαθηματική εκπαίδευση περιορίζεται και εστιάζει στο ίδιο το εργαλείο και όχι στις δραστηριότητες και στη συγκεκριμένη κατάσταση του προβλήματος με την οποία εμπλέκεται ο μαθητής.

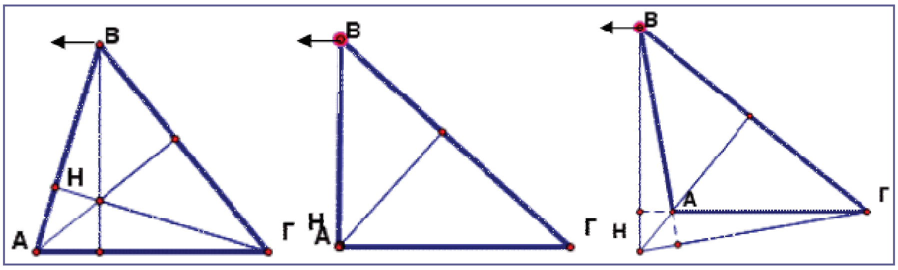
Οι αρχές πάνω στις οποίες στηρίζεται η RME συνιστούν ένα πλαίσιο στο οποίο η τεχνολογία θα μπορούσε να προσφέρει σημαντική αρωγή στη διδασκαλία και τη μάθηση των μαθηματικών.

Καταρχήν, ας δούμε τον τρόπο με τον οποίο αντιλαμβάνονται τη διδακτική αξιοποίηση της τεχνολογίας ερευνήτες που εργάζονται στο πλαίσιο της RME.

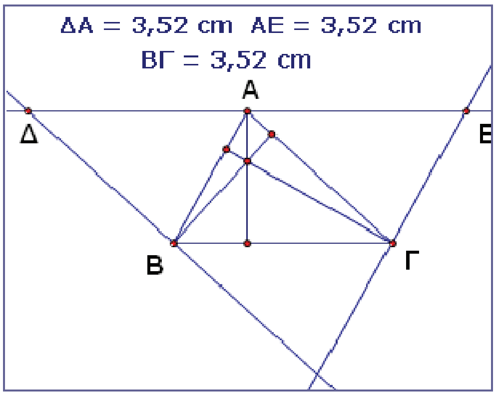
Κατά τον Paul Drijvers, τα τεχνολογικά μέσα δημιουργούν σημαντικές ευκαιρίες στη σύνδεση των αναπαραστάσεων, των διαφόρων θεματικών περιοχών και των τεχνικών που χρησιμοποιούμε. Επιπλέον τονίζει το ρόλο των εργαλείων αυτών στην κατακόρυφη μαθηματικοποίηση. Για παράδειγμα, η χρήση συμβόλων –σημαντική «κατακόρυφη» μαθηματική δραστηριότητα– διευκολύνεται και κυρίως αποσαφηνίζεται (Kynigos, Alexopoulou & Latsi, 2007). Ένα ακόμη παράδειγμα: Ένας μεταβολέας τιμών δίνει την ευκαιρία στους μαθητές να χειριστούν μία παράμετρο με δυναμικό τρόπο και με αυτό τον τρόπο βοηθά τις δραστηριότητες γενίκευσης.

Μία άλλη δυνατότητα που μας παρέχει η τεχνολογία είναι ότι οι μαθητές διευκολύνονται να κάνουν εικασίες και να τις ελέγξουν, εκτελώντας κατά βούληση πειράματα. Ένα δυναμικό τρίγωνο, στο οποίο έχουμε φέρει τα ύψη, για παράδειγμα, δημιουργεί ένα φαινομενολογικό χώρο, όπου οι αναλλοίωτες σχέσεις μεταξύ των μεγεθών που μεταβάλλονται είναι εμφανείς και ελέγξιμες.

Καθώς οι μαθητές μεταβάλλουν το σχήμα του τριγώνου, τα γεωμετρικά αντικείμενα συμμετέχουν σε ένα φαινόμενο κατά το οποίο μεταβάλλονται τα γραμμικά και γωνιακά του μεγέθη. Τα ύψη που παραμένουν συντρέχοντα, σε μία πολύ μεγάλη «συλλογή» τριγώνων, επιτρέπουν στους μαθητές να εξάγουν άτυπα συμπεράσματα για τη συγκεκριμένη ιδιότητα του ύψους, αλλά και για τη θέση του ορθόκεντρου, όταν το τρίγωνο είναι οξυγώνιο, ορθογώνιο ή αμβλυγώνιο.



Τα άτυπα αυτά συμπεράσματα θα μπορούσαν με την καθοδήγηση του διδάσκοντα να μετασχηματιστούν σε αυστηρά μαθηματικά, όταν οι μαθητές κατασκευάσουν παράλληλες από τις κορυφές προς τις απέναντι πλευρές, εκτελέσουν μετρήσεις των τμημάτων που δημιουργούνται και διαπιστώσουν την ύπαρξη παραλληλογράμμων στο σχήμα. Από το σημείο αυτό αρχίζει η απόδειξη της εικασίας που έχουν διατυπώσει.



Οι δυνατότητες οπτικοποίησης και δυναμικής αναπαράστασης δημιουργούν τις κατάλληλες συνθήκες για την κατασκευή μοντέλων και τη μελέτη τους.

Εδώ ίσως εντοπίζεται ένα κεντρικό σημείο συνάντησης της τεχνολογίας με την RME. Η κατασκευή δυναμικών μοντέλων και προσομοιώσεων δημιουργεί ένα ευνοϊκό περιβάλλον για την εκδήλωση και των δύο μορφών μαθηματικοποίησης (Keisoglou & Kynigos, 2006). Καταρχήν δίνονται στους μαθητές πολλαπλές ευκαιρίες να ανταλλάξουν ιδέες και να διαπραγματευτούν τα φαινόμενα που παρουσιάζονται στην οθόνη, καθώς μελετούν την προσομοίωση. Η δυνατότητα να μετασχηματίσουν την αρχική κατασκευή κατά βούληση επιτρέπει τη μελέτη της μαθηματικής δομής, την ανακατασκευή και τη γενικευμένη χρήση της.

Σύνοψη

Τα «ρεαλιστικά μαθηματικά» είναι μία ανθρώπινη δραστηριότητα η οποία εξελίσσεται σε δύο κατευθύνσεις, την οριζόντια και την κατακόρυφη. Η Ρεαλιστική Μαθηματική Εκπαίδευση (RME) θέτει τους μαθητές στο κέντρο των δραστηριοτήτων, δίνει έμφαση στις άτυπες και διαισθητικές τους προσεγγίσεις και θεωρεί το διδάσκοντα ως οργανωτή και καθοδηγητή των μαθητών στην πορεία τους προς την ανακατασκευή της μαθηματικής γνώσης σε προσωπικό επίπεδο. Η χρήση της τεχνολογίας έχει πολλά να προσφέρει, όταν είναι ενταγμένη στο πλαίσιο της RME, αφού αναδεικνύει διάφορες πτυχές της, όπως η δημιουργία και η μελέτη μοντέλων και προσομοιώσεων.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΕΣ ΑΝΑΦΟΡΕΣ

Clements, D. (2000): “From exercises and tasks to problems and projects. Unique contributions of computers to innovative mathematics education”, *Journal of mathematical behaviour*, 19, 9-47, Pergamon Press

Doerr. H, English. L. D (2001), “A modelling perspective on students’ learning through data analysis”, *Proceedings of the 24th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education Utrecht,* The Netherlands

Freudenthal, H. (1991), *Revisiting mathematics education*, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers

Gravemeijer, K. (1994), “Educational development and developmental research in mathematics education”, *Journal for Research in Mathematics Education*, 25(5), 443-471

Gravemeijer, K.P.E. (2002), “Emergent modeling as the basis for an instructional sequence on data analysis”, *Proceedings of the International Conference of Teaching Statistics*, Cape Town, South-Africa, July 7-12, 2002

Heuvel-Panhuizen, M. van der (2001), “Realistic Mathematics Education as work in progress” in F. L. Lin (Ed.), *Common Sense in Mathematics Education*, 1-40, *Proceedings of 2001 The Netherlands and Taiwan Conference on Mathematics Education*, Taipei, Taiwan, November 19-23, 2001

Heuvel-Panhuizen, M. van der (2003), “The didactical use of models in realistic mathematics education: an example from a longitudinal trajectory on percentage”, *Educational Studies in Mathematics*, 54, 9-35, Kluwer Academic Publishers. Netherlands

Kaput, J. (1998), “Technology as a Transformative force in education. What else is needed to make it work”, paper for the N.C.T.M 2000 technology working group in May 1998

Keisoglou, S., Kynigos, C. (2006), “Measurements with a physical and a virtual quadrant: students’ understandings of trigonometric tangent”, *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Prague

Kynigos, C., Alexopoulou, E. & Latsi, M. (2007), “Three dimensional constructions using a co-ordinate system of reference in a computer simulated 3D space”, *Proceedings of the 5th CERME Conference (European Society for Research in Mathematics Education)*, Larnaca, Cyprus, February 22-26, 2007

Lange, J. de (1996), “Using and Applying Mathematics in Education” in A.J. Bishop, et al. (eds), 1996, *International handbook of mathematics education*, Part one, 49-97, Kluwer academic publisher

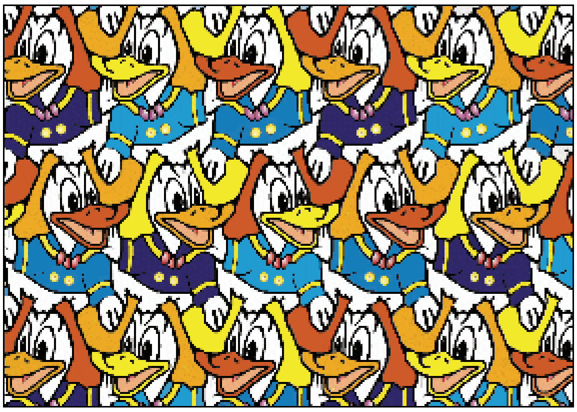
Streefland, Ed. (2000), *Ρεαλιστικά Μαθηματικά στην Πρωτοβάθμια Εκπαίδευση*, επιστημονική επιμέλεια Ευγενία Κολέζα, Leader Books

Treffers, A. (1987), *Three dimensions. A model of goal and theory description in mathematics education: The Wiskobas project*, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers

Paul Drijvers (Τον 1/2008 η διεύθυνση είναι: www.fi.uu.nl/en/fius/materials/drijvers.ppt)

ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΕΣ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ ΓΙΑ ΤΟ ΔΗΜΟΤΙΚΟ

1.1 Επαναλαμβανόμενα ψηφοθετήματα / tessellation

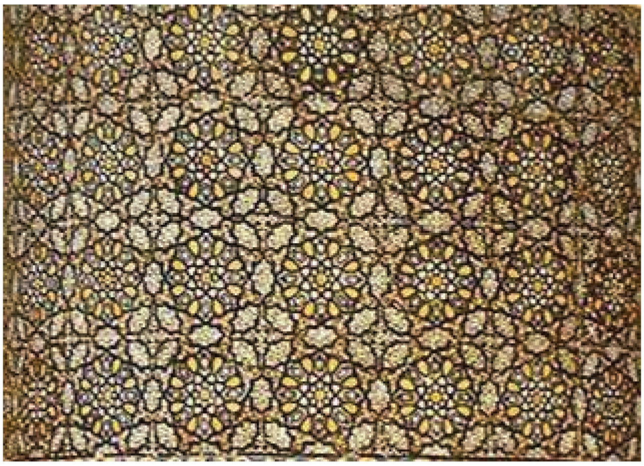


Εικόνα 1: Ο Ντόναλντ.

Σας κάνει κάτι εντύπωση στην παραπάνω εικόνα; Πρόκειται για ένα επαναλαμβανόμενο ψηφοθέτημα/tessellation του Ντόναλντ φτιαγμένο στον υπολογιστή. Τι είναι όμως επαναλαμβανόμενο ψηφοθέτημα/tessellation;

Με τον όρο «tessellation» αναφερόμαστε σε κάθε επαναλαμβανόμενο πρότυπο (pattern) από αλληλοεμπλεκόμενα σχήματα. Πρόκειται για μια επικάλυψη επιφανείας από επαναλαμβανόμενα πολύγωνα ή άλλα σχήματα με τέτοιον τρόπο, ώστε να μην υπάρχουν κενά ή αλληλεπικαλύψεις. Η λέξη «tessellate» προέρχεται από την ελληνική λέξη «τέσσερα» και αρχικά αναφερόταν στην τοποθέτηση μικρών τετραγώνων ή κυβικών πλακιδίων με τρόπο, που να δημιουργείται ένα μωσαϊκό. Η δημιουργία αυτής της λέξης συνδέεται με το γεγονός ότι τα πλακίδια σε σχήμα τετραγώνου μπορούν πιο εύκολα να συνταιριαστούν.

Εξαιρετικής αισθητικής διακοσμητικά επαναλαμβανόμενα μοντέλα από γεωμετρικά σχήματα συναντά κανείς στην τέχνη πολλών λαών. Στην ισλαμική τέχνη, εξαιτίας της απαγόρευσης αναπαράστασης σκηνών από το φυσικό κόσμο, οι καλλιτέχνες του Ισλάμ είναι ασύγκριτοι στη χρήση επαναλαμβανόμενων γεωμετρικών σχεδίων και μωσαϊκών.



Εικόνα 2: Ένα αραβικό επαναλαμβανόμενο ψηφοθέτημα από την Αλάμπρα της Ισπανίας.

Ο Ολλανδός M. C. Escher είναι ένας από τους καλλιτέχνες που έγιναν ιδιαίτερα διάσημοι για τις δημιουργίες tessellations. Αν και εντυπωσιάστηκε από την ισλαμική τέχνη, έδωσε τη δική του προοπτική στα αφηρημένα γεωμετρικά σχήματα που είχε συναντήσει. Συνδυάζοντας τη δημιουργικότητα με τη βαθιά γνώση των μαθηματικών, άρχισε να εκφράζει τις ιδέες που είχε στο μυαλό του και να δημιουργεί περίτεχνα επαναλαμβανόμενα ψηφοθετήματα/tessellations με τη μορφή ψαριών, πουλιών, εντόμων κ.λπ.

Εικόνα 3: Ένα επαναλαμβανόμενο ψηφοθέτημα του M. C. Escher με πουλιά και βάρκες.

Στο πρώτο μέρος των δραστηριοτήτων θα αναζητήσουμε επαναλαμβανόμενα ψηφοθετήματα σε βιβλία τέχνης και στο διαδίκτυο, θα κατασκευάσουμε με τη βοήθεια του υπολογιστή τα δικά μας επαναλαμβανόμενα ψηφοθετήματα με πολύγωνα και στη συνέχεια θα τα ζωγραφίσουμε. Μπορεί όμως κάθε είδος κανονικού πολυγώνου να δημιουργήσει επαναλαμβανόμενο ψηφοθέτημα; Θα μπορούσαμε, άραγε, να συνδυάσουμε περισσότερα από ένα είδη κανονικών πολυγώνων, για να κατασκευάσουμε ένα επαναλαμβανόμενο ψηφοθέτημα; Αυτά είναι δύο ερωτήματα που θα μπορέσετε εύκολα να απαντήσετε στο δεύτερο μέρος των δραστηριοτήτων, αν συνεργαστείτε με τους συμμαθητές και το δάσκαλό σας και προσπαθήσετε να «αποκρυπτογραφήσετε» τα εικονομηνύματα του υπολογιστή.

1.2 Πρώτο εκπαιδευτικό σενάριο για το δημοτικό

1.2.1 Φύλλο εργασίας - Επαναλαμβανόμενα ψηφοθετήματα στην τέχνη

1) Παρατήρησε σε βιβλία τέχνης και στο διαδίκτυο διάφορα έργα τέχνης με επαναλαμβανόμενα σχήματα και κατόπιν συμπλήρωσε τον παρακάτω πίνακα:

Αντικείμενο τέχνης (πίνακας, λιθόστρωτο, μωσαϊκό κ.λπ.)	**Γεωμετρικά σχήματα** που επαναλαμβάνονται

2) Ποια από τα παρακάτω έργα τέχνης έχουν απλά επαναλαμβανόμενα σχήματα και ποια μπορούν να θεωρηθούν επαναλαμβανόμενα ψηφοθετήματα (tessellations);

Με τον όρο tessellation αναφερόμαστε σε κάθε επαναλαμβανόμενο μοτίβο (pattern) από αλληλεμπλεκόμενα σχήματα με τέτοιο τρόπο, ώστε να καλύπτεται μια επιφάνεια χωρίς να υπάρχουν κενά ή επικαλύψεις.

....

....

....

....

....

....

3) Ποιο από τα επαναλαμβανόμενα ψηφοθετήματα/tessellations σου άρεσε περισσότερο και γιατί;

....

....

....

4) Μπορείς να σκεφτείς κάποια επαναλαμβανόμενα ψηφοθετήματα/tessellations που συναντάς καθημερινά στη φύση, στο σπίτι ή στο σχολείο;

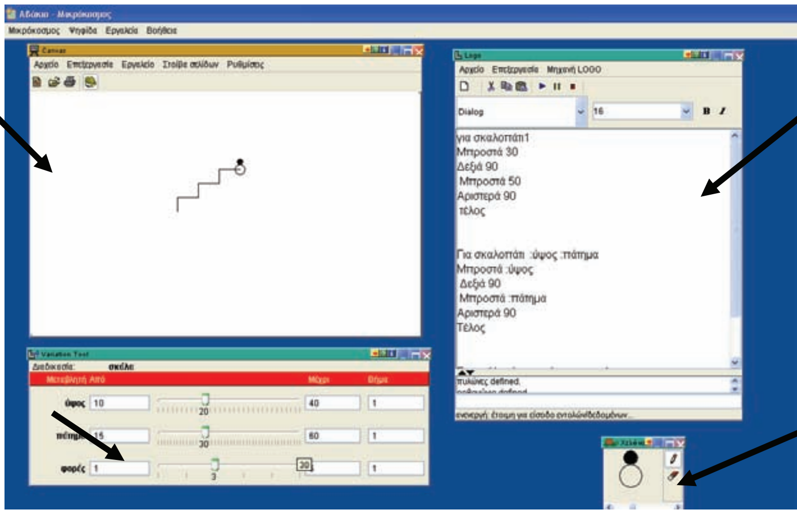
....
....
....

5) Μπορείς να ζωγραφίσεις στο παρακάτω πλαίσιο ένα επαναλαμβανόμενο ψηφοθέτημα;

1.2.2 Φύλλο εργασίας - Κανονικά επαναλαμβανόμενα ψηφοθετήματα / regular tessellation (1)

Στις δραστηριότητες που ακολουθούν θα δουλέψουμε με το *Αβάκιο*. Ας κάνουμε, όμως, πρώτα μια σύντομη περιήγηση στο περιβάλλον του.

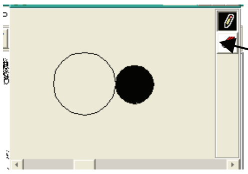
Ψηφίδα Καμβάς
Εδώ ζωγραφίζει η Χελώνα.



Ψηφίδα Logo
Εδώ γράφουμε τις εντολές σε γλώσσα Logo.

Ψηφίδα Μεταβολέας
Σύρουμε με το ποντίκι την μπάρα και βλέπουμε να αλλάζει το σχήμα στον Καμβά!

Ψηφίδα Χελώνα



Για να γράφει η Χελώνα στον Καμβά θα πρέπει να είναι πατημένο το κουμπί με το μαύρο μολύβι.

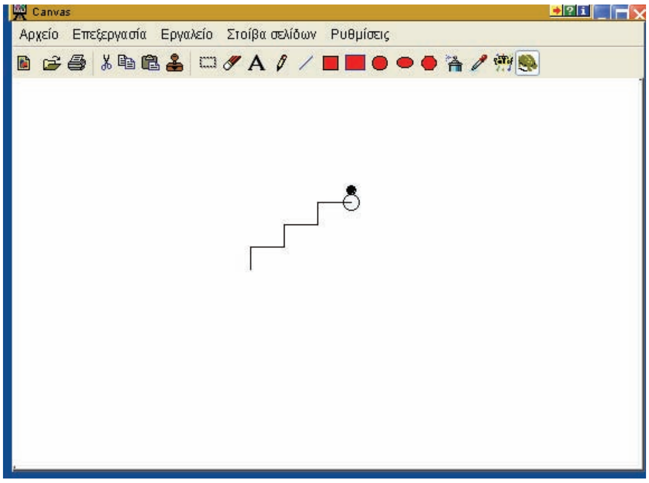
Πίνακας εντολών που μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε στην ψηφίδα Logo

Διαδικασία	Αποτέλεσμα-γεγονός
Σβήσεγραφικά	Καθαρίζει τον Καμβά και επαναφέρει τη Χελώνα στην αρχική της θέση
Καθάρισε	Καθαρίζει τον Καμβά και αφήνει τη Χελώνα στη θέση που βρίσκεται
Στηναρχή	Επαναφέρει τη Χελώνα στην αρχική της θέση, χωρίς να σβήσει τα γραφικά
Μπροστά α	Μετακινεί τη Χελώνα α βήματα μπροστά κατά τη διεύθυνση της κεφαλής της
Πίσω α	Μετακινεί τη Χελώνα α βήματα προς την αντίθετη κατεύθυνση που δείχνει η κεφαλή της
Δεξιά α	Στρίβει την κεφαλή της Χελώνας α μοίρες δεξιά
Αριστερά α	Στρίβει την κεφαλή της Χελώνας α μοίρες αριστερά
Στυλόπάνω	Ανεβάζει τη γραφίδα της Χελώνας
Στυλόκάτω	Κατεβάζει τη γραφίδα της Χελώνας
Γόμα	Σβήνει τις ήδη σχεδιασμένες γραμμές, αρκεί να ακολουθήσει την εντολή του τύπου (μπροστά 50)

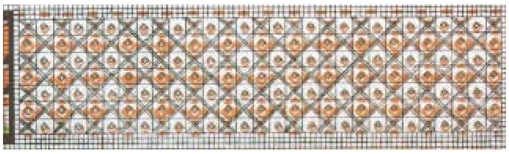
Για να εκτελέσεις μια από τις παραπάνω εντολές, θα πρέπει να πατήσεις το πλήκτρο Enter ή το κουμπί  που βρίσκεται στη γραμμή εργαλείων της ψηφίδας Logo.

Το γραφικό αποτέλεσμα στον Καμβά μπορούμε να το επεξεργαστούμε και γραφικά, ακολουθώντας τα παρακάτω βήματα:

- Ορίζουμε «Νέα Σελίδα Ζωγραφικής», πατώντας το πρώτο από αριστερά κουμπί της γραμμής εργαλείων.
- Από το μενού «Στοίβα σελίδων» επιστρέφουμε στη σελίδα χελώνων που ήμασταν, προηγουμένως. Στην μπάρα εργαλείων παρατηρούμε ότι έχουν εμφανιστεί νέα εργαλεία. Με το εργαλείο «σφραγίδα» μπορούμε να «σφραγίσουμε» ό,τι κάναμε στην αντίστοιχη σελίδα ζωγραφικής.
- Από το μενού «Στοίβα σελίδων» πηγαίνουμε πάλι στη σελίδα ζωγραφικής. Η Χελώνα παύει να υπάρχει και μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τα εργαλεία ζωγραφικής για να επεξεργαστούμε το σχέδιό μας.



1) Στην παρακάτω εικόνα βλέπεις τμήμα ενός μωσαϊκού από την Πομπηία. Ποιο γεωμετρικό σχήμα αποτελεί τη βασική επαναλαμβανόμενη ψηφίδα;



....
....
....

2) Μπορείς να χρησιμοποιήσεις τον υπολογιστή σου και το λογισμικό *Αβάκιο*, για να κατασκευάσεις και εσύ ένα παρόμοιο επαναλαμβανόμενο ψηφοθέτημα (tessellation):
   α) Άνοιξε το *Αβάκιο*.
   β) Οδήγησε τη Χελώνα, δίνοντας τις κατάλληλες εντολές στην ψηφίδα Logo, ώστε να σχηματίσει ένα τετράγωνο.
   γ) Στη συνέχεια οδήγησε τη Χελώνα, ώστε να «ζωγραφίσει» ένα επαναλαμβανόμενο ψηφοθέτημα από τετράγωνα.
   δ) Άνοιξε τη σελίδα ζωγραφικής του *Αβακίου* και επεξεργάσου καλλιτεχνικά το επαναλαμβανόμενο ψηφοθέτημα (tessellation) που κατασκεύασες.

3) Εκτύπωσε, κόψε και κόλλησε στο παρακάτω πλαίσιο το επαναλαμβανόμενο ψηφοθέτημά σου.

1.2.3 Φύλλο εργασίας - Κανονικά επαναλαμβανόμενα ψηφοθετήματα / regular tessellation (2)

Εικόνα 1: Βυζαντικό μωσαϊκό, διαθέσιμο ηλεκτρονικά (Τον 1/2008 η διεύθυνση είναι: http://library.thinkquest.org/16661/gallery/grammar/13.html)

Εικόνα 2: Τμήμα του στεγάστρου που σκεπάζει την αυλή του Βρετανικού Μουσείου.

1) Ποιο γεωμετρικό σχήμα αποτελεί τη βασική επαναλαμβανόμενη ψηφίδα στις παραπάνω εικόνες;
....
....
....

2) Μπορείς να χρησιμοποιήσεις τον υπολογιστή σου και το λογισμικό *Αβάκιο*, για να κατασκευάσεις και εσύ ένα παρόμοιο επαναλαμβανόμενο ψηφοθέτημα (tessellation):

α) Άνοιξε το λογισμικό *Αβάκιο*.

β) Οδήγησε με τις κατάλληλες εντολές τη Χελώνα στην ψηφίδα Logo, για να σχηματίσει ένα ισόπλευρο τρίγωνο.

γ) Οδήγησε τη Χελώνα, ώστε να «ζωγραφίσει» ένα επαναλαμβανόμενο ψηφοθέτημα από ισόπλευρα τρίγωνα.

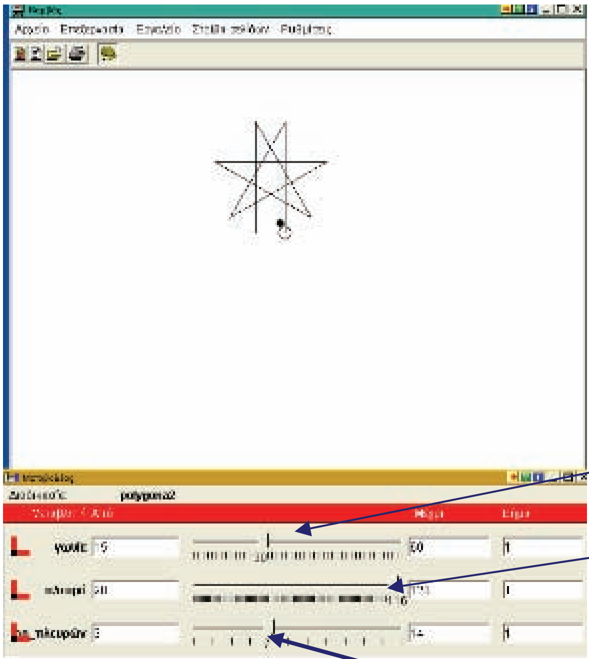
δ) Άνοιξε τη σελίδα ζωγραφικής του *Αβακίου* και επεξεργάσου καλλιτεχνικά το επαναλαμβανόμενο ψηφοθέτημα (tessellation) που κατασκεύασες.

3) Εκτύπωσε, κόψε και κόλλησε στο παρακάτω πλαίσιο το επαναλαμβανόμενο ψηφοθέτημά σου.

1.3 Δεύτερο εκπαιδευτικό σενάριο για το δημοτικό

1.3.1 Φύλλο εργασίας - Κανονικά πολύγωνα και τεθλασμένες γραμμές

Στις δραστηριότητες του δευτέρου εκπαιδευτικού σεναρίου θα χρησιμοποιήσεις κυρίως το εργαλείο του *Αβακίου* με το όνομα Μεταβολέας.



Κινώντας με το ποντίκι αυτό το Μεταβολέα, μπορείς να μεταβάλλεις το μέγεθος της γωνίας του πολυγώνου.

Κινώντας με το ποντίκι αυτό το Μεταβολέα, μπορείς να μεταβάλλεις το μήκος των πλευρών του πολυγώνου.

Κινώντας με το ποντίκι αυτό το Μεταβολέα, μπορείς να μεταβάλλεις τον αριθμό των πλευρών του πολυγώνου.

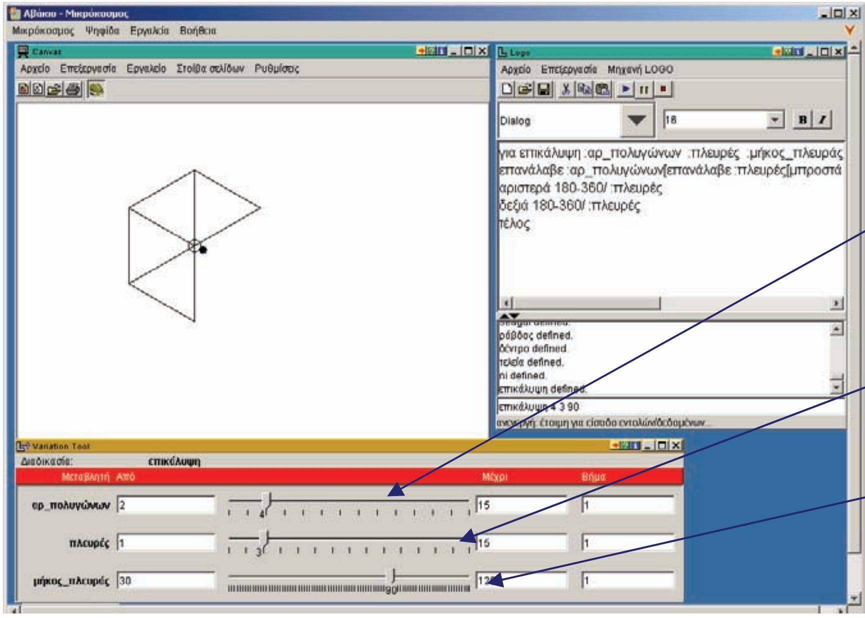
Διαδικασία Mistirio1

1) Χρησιμοποίησε τη διαδικασία *Mistirio1* και το Μεταβολέα και προσπάθησε να κλείσεις την τεθλασμένη γραμμή. Συμπλήρωσε το παρακάτω πινακάκι:

γωνία σε μοίρες	αριθμός πλευρών	ονομασία πολυγώνου

Τι συμπέρασμα βγάζεις; Σε ποιες περιπτώσεις κλείνει το σχήμα;

....
....
....



Εδώ μπορείς να ορίσεις τον αριθμό των αριθμό των πολυγώνων που θέλεις να ζωγραφίσει η Χελώνα γύρω από μια κορυφή.

Εδώ μπορείς να ορίσεις τον αριθμό των πλευρών κάθε πολυγώνου.

Εδώ μπορείς να ορίσεις το μήκος της πλευράς κάθε πολυγώνου.

Διαδικασία Mistirio2

2) Χρησιμοποίησε τη διαδικασία *Mistirio2* και προσπάθησε να βρεις πόσα ισόπλευρα τρίγωνα μπορεί να γράψει η Χελώνα γύρω από το σημείο εκκίνησής της.

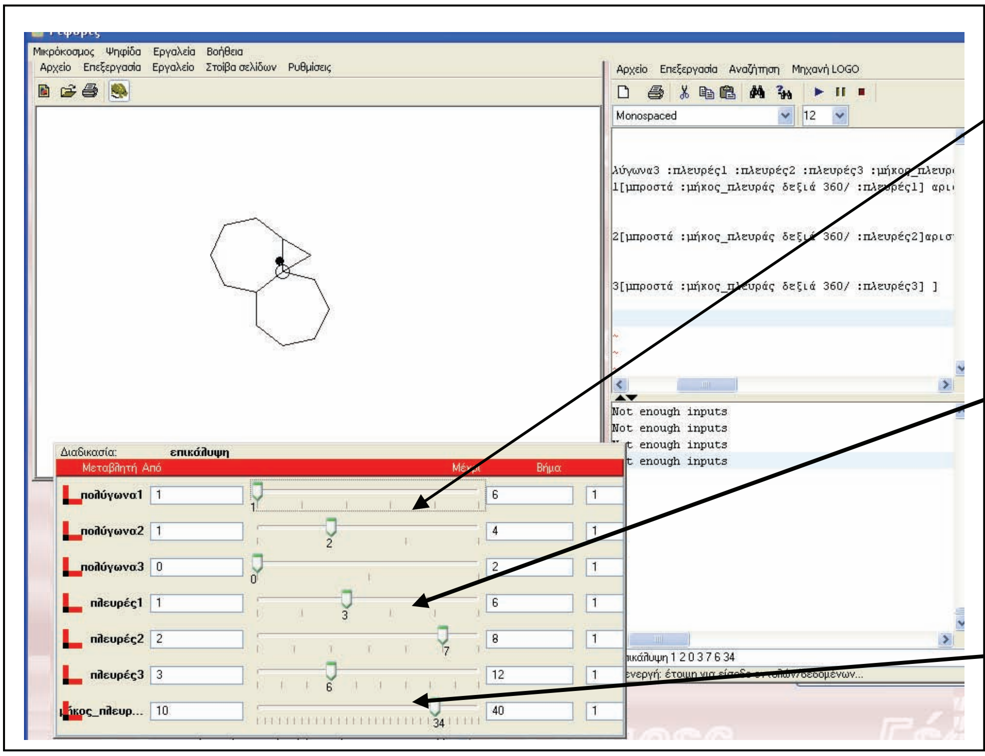
....
....
....

3) Πειραματίσου με τη διαδικασία *Mistirio2*, με διάφορα είδη πολυγώνων, και δημιούργησε ένα επαναλαμβανόμενο ψηφοθέτημα-tessellation. Συμπλήρωσε τον παρακάτω πίνακα:

Είδος πολυγώνου	**Μοίρες εσωτερικής γωνίας πολυγώνου**	**Αριθμός πολυγώνων γύρω από το σημείο εκκίνησης της Χελώνας**	**Άθροισμα γωνιών γύρω από το σημείο εκκίνησης της Χελώνας**	**Διαίρεση του 360 με τις μοίρες της εσωτερικής γωνίας του πολυγώνου**

4) Σε τι συμπέρασμα κατέληξες με βάση τον παραπάνω πίνακα; Ποια είδη κανονικών πολυγώνων θα μπορούσες να χρησιμοποιήσεις για να καλύψεις μια επιφάνεια, χωρίς να αφήσεις κάποιο κενό;

....
....
....



Με τις μεταβλητές πολύγωνα1, πολύγωνα2 και πολύγωνα3 ορίζουμε το πόσες φορές θα επαναληφθεί κάθε είδος πολυγώνου.

Με τις μεταβλητές πλευρές1, πλευρές2 και πλευρές3 ορίζουμε τον αριθμό των πλευρών του πολυγώνου1, του πολυγώνου2 και του πολυγώνου3 αντίστοιχα.

Με τη μεταβλητή μήκος_πλευράς ορίζουμε το μήκος κάθε πλευράς.

Διαδικασία Mistirio3

5) Χρησιμοποίησε τη διαδικασία *Mistirio3* για να δεις αν μπορείς να συνδυάσεις περισσότερα από ένα είδη κανονικών πολυγώνων και να καλύψεις με αυτά μια επιφάνεια γύρω από ένα σημείο, χωρίς να μείνει κάποιο κενό.

α) Μπορείς να προβλέψεις συνδυασμούς πολυγώνων που θα καλύπτουν την επιφάνεια χωρίς κενό; Αν ναι, τότε γράψε τους συνδυασμούς αυτούς παρακάτω:

....

....

β) Επιβεβαίωσες στον υπολογιστή τις προβλέψεις σου;

....

....

γ) Γράψε όλους τους συνδυασμούς των κανονικών πολυγώνων που βρήκες, οι οποίοι μπορούν να καλύψουν μια επιφάνεια χωρίς να αφήσουν κενά μεταξύ τους.

1η περίπτωση: ....

2η περίπτωση: ....

3η περίπτωση: ....

δ) Ποιο είναι το άθροισμα των γωνιών των πολυγώνων γύρω από το σημείο εκκίνησης της Χελώνας στις περιπτώσεις που καλύπτεται ολόκληρη η γύρω επιφάνεια, χωρίς κενά ή αλληλοεπικαλύψεις;

....

....

ε) Σε τι συμπέρασμα κατέληξες με βάση την παραπάνω παρατήρηση;

....

....

....

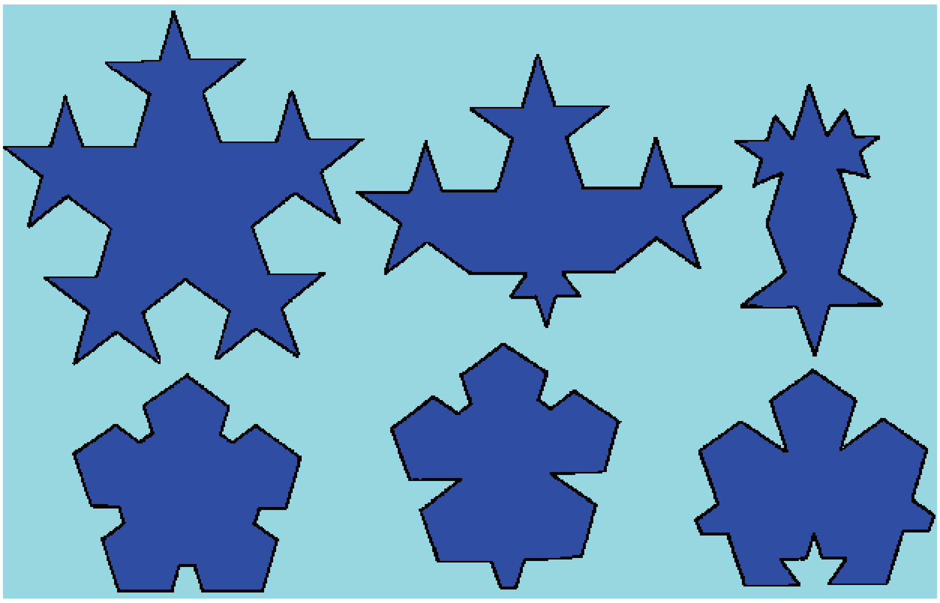
1.3.2 Φύλλο εργασίας - Τα «πλακόστρωτα» του Penrose

Δείγμα από τη δουλειά του R. Penrose, πάτωμα στο Carleton College των ΗΠΑ, διαθέσιμο τον 1/2008 στην ηλεκτρονική διεύθυνση της βιβλιοθήκης με φυσικά μοτίβα του Ίαν Αλεξάντερ: [*http://easyweb.easynet.co.uk/iany/patterns/aperiodic_tilings.htm*](http://easyweb.easynet.co.uk/iany/patterns/aperiodic_tilings.htm)

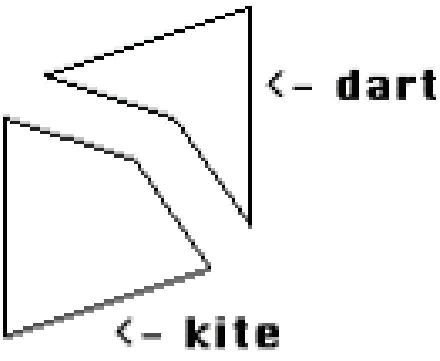
1) Θα μπορούσες να το χαρακτηρίσεις επαναλαμβανόμενο ψηφοθετήμα/tessellations;

....
....
....

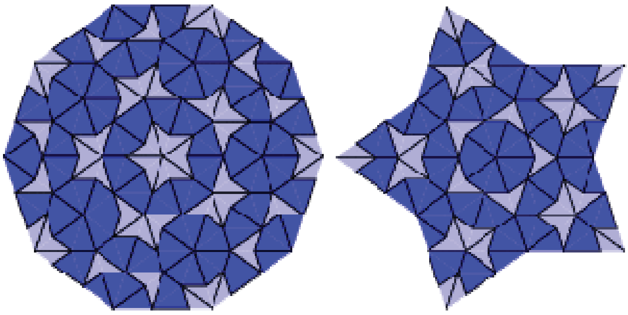
2) Ο Penrose ανακάλυψε αρχικά τρία ζεύγη «πλακαδίων» που μπορούν να καλύψουν μια επιφάνεια με τέτοιον τρόπο που, ενώ μας δημιουργούν την αντίθετη εντύπωση, δεν σχηματίζουν επαναλαμβανόμενα μοντέλα.



Αργότερα ο Penrose μείωσε τα τρία ζεύγη σε ένα. Με το ζεύγος που έμεινε γνωστό ως «a kite and a dart», δηλαδή «αετός και βέλος», μπορεί να καλυφθεί μια ολόκληρη επιφάνεια χωρίς να επαναλαμβάνεται κάποιο μοντέλο!



Μπορείς να κόψεις τα παραπάνω «πλακίδια» και να τα χρησιμοποιήσεις ως πρότυπα για να κατασκευάσεις και άλλα, με τα οποία στη συνέχεια θα κατασκευάσεις το δικό σου ψηφοθέτημα; Αν θες, μπορείς να χρησιμοποιήσεις τα παραπάνω πρότυπα και να κόψεις τα αντίστοιχα «πλακίδια» σε ένα σφουγγάρι. Έτσι, θα δημιουργήσεις τα δικά σου σφραγιδάκια. Αφού βάψεις με τέμπερα τη μια μεριά της «σφραγίδας», μπορείς να φτιάξεις το δικό σου ψηφοθέτημα (η διεύθυνση της εικόνας στον κόμβο του μαθηματικού κόσμου Γουόλφραμ τον 1/2008 είναι: http://mathworld.wolfram.com/PenroseTiles.html).



Ε Κ Π Α Ι Δ Ε Υ Τ Ι Κ Ε Σ   Δ Ρ Α Σ Τ Η Ρ Ι Ο Τ Η Τ Ε Σ   Γ Ι Α   Τ Ο   Γ Υ Μ Ν Α Σ Ι Ο

2.1 Θεματική ενότητα: Οπτικό πεδίο – προοπτικό επίπεδο

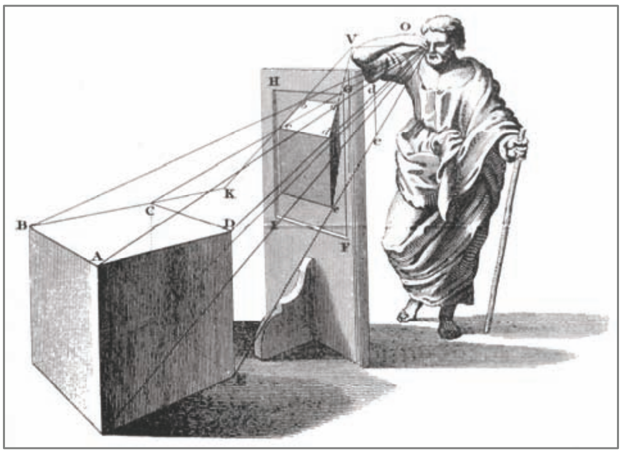
ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΕΣ

Ένα μέρος από τις δραστηριότητες που ακολουθούν στηρίζονται στην έννοια της οπτικής μας γωνίας, δηλαδή της γωνίας που σχηματίζουν οι οπτικές μας ακτίνες με τα άκρα του αντικειμένου που παρατηρούμε. Ο τρόπος, όμως, με τον οποίο η όρασή μας δημιουργεί την αντίληψη του χώρου που μας περιβάλλει έχει σαν αποτέλεσμα να αντιλαμβανόμαστε το χώρο αυτό προοπτικά, δηλαδή παραμορφωμένο. Ο προοπτικός χώρος και το προοπτικό δάπεδο είναι οι έννοιες πάνω στις οποίες στηρίζονται οι υπόλοιπες δραστηριότητες.

Στα κείμενα που ακολουθούν υπάρχουν πληροφορίες οι οποίες θα σας βοηθήσουν να κατανοήσετε τόσο την έννοια της οπτικής μας γωνίας όσο και την έννοια της προοπτικής παραμόρφωσης.

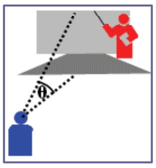
Η οπτική μας γωνία

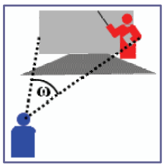
Η οπτική μας αντίληψη, δηλαδή ο τρόπος με τον οποίο αντιλαμβανόμαστε τα σώματα στο φυσικό περιβάλλον, μπορεί να μελετηθεί μέσω μιας συγκεκριμένης γωνίας, η οποία ονομάζεται οπτική γωνία του παρατηρητή. Η μελέτη της οπτικής μας αντίληψης με την βοήθεια γωνιών έλκει την καταγωγή της από τους αρχαίους Έλληνες.



(Η εικόνα προέρχεται από το φυσικό τμήμα του Πανεπιστημίου της Σιγκαπούρης και τον 1/2008 η διεύθυνση είναι: http://www.math.nus.edu.sg/aslaksen/projects/perspective/)

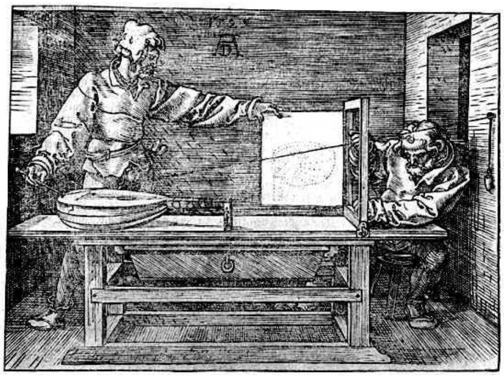
Δύο χαρακτηριστικές οπτικές μας γωνίες, κατά την παρατήρηση ενός αντικειμένου που βρίσκεται σε απόσταση, είναι η θ και η ω, εκ των οποίων η μία καλύπτει το αντικείμενο καθ' ύψος και η άλλη κατά πλάτος.

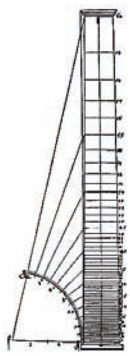




Είναι χαρακτηριστικό ότι κατά την Αναγέννηση οι ζωγράφοι, πολλοί από τους οποίους ήταν συγχρόνως και σπουδαίοι μαθηματικοί, επιζητώντας να απεικονίσουν με πειστικό τρόπο το φυσικό περιβάλλον και τα αντικείμενά του, μελετούσαν τρόπους να σταθεροποιήσουν τη γωνία όρασης των αντικειμένων που ζωγράφιζαν.

Ένας από τους ζωγράφους αυτούς, ο Albrecht Durer, είχε κάνει συστηματικές μετρήσεις και είχε επινοήσει κατασκευές με τις οποίες παρατηρούσε τα αντικείμενα που ζωγράφιζε από συγκεκριμένη αμετάβλητη γωνία.

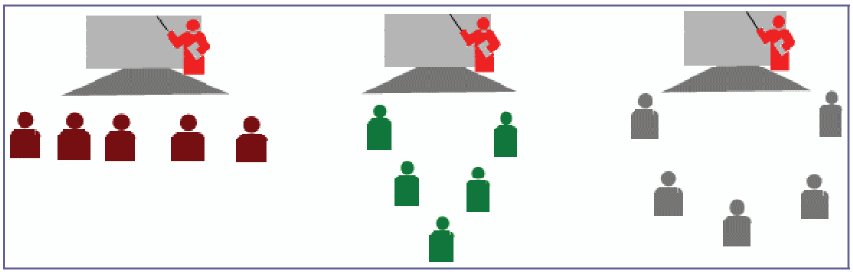




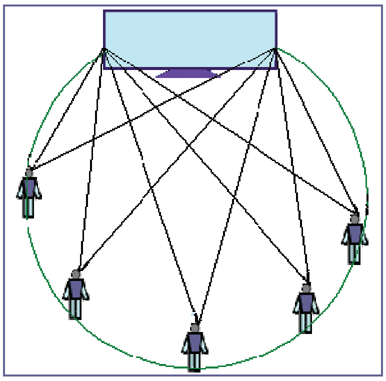
Η εικόνα προέρχεται από την ηλεκτρονική παρουσίαση του 11ου κεφαλαίου του βιβλίου «Τετραγωνίζοντας τον κύκλο: Η Γεωμετρία στην Τέχνη και την Αρχιτεκτονική» του Πολ Κάλτερ, από το Πανεπιστήμιο του Ντάρτμουθ και τον 1/2008 η διεύθυνσή της είναι: http://www.dartmouth.edu/~matc/math5.geometry/unit11/unit11.html#top

Ήδη, όπως φαίνεται στο παραπάνω σχέδιο, είχε μελετήσει τη σχέση γωνίας και ύψους, ώστε να κατανοήσει καλύτερα τις οπτικές παραμορφώσεις που υφίστανται τα αντικείμενα που βρίσκονται σε μεγάλα ύψη.

Ένα χαρακτηριστικό πρόβλημα που σχετίζεται με την οπτική γωνία θέασης ενός σταθερού αντικειμένου είναι και το εξής: Ποια είναι η διάταξη εκείνη των θεατών στην οποία βλέπουν μία παρουσίαση το ίδιο «καλά»;



Η μαθηματική περιγραφή του προβλήματος ανάγεται στην εύρεση της καμπύλης εκείνης, πάνω στην οποία όλοι οι θεατές βλέπουν με την ίδια οπτική γωνία μία παρουσίαση.



Η καμπύλη αυτή είναι ένας κύκλος, ενώ η μαθηματική εξήγηση στηρίζεται στις εγγεγραμμένες γωνίες που βαίνουν στο ίδιο τόξο.

Ο προοπτικός χώρος

Έχετε σκεφτεί ποτέ ότι τα πράγματα που παρατηρούμε γύρω μας, ιδιαίτερα αυτά που βρίσκονται σε αρκετή απόσταση, φαίνονται πολύ διαφορετικά από ό,τι είναι στην πραγματικότητα; Η διαφορά αυτή μας επιτρέπει να μιλάμε για τα «φαινόμενα αντικείμενα» και για τα «πραγματικά αντικείμενα», δηλαδή για τα αντικείμενα όπως φαίνονται από απόσταση και τα αντικείμενα όπως φαίνονται από κοντά.

Τον 1/2008 η διεύθυνση της εικόνας στο δικτυακό κόμβο flickr είναι:
http://www.flickr.com/photos/theunholytrinity/sets/872208/

Τον 1/2008 η διεύθυνση της εικόνας στο δικτυακό κόμβο flickr είναι:
http://www.flickr.com/photos/flc/76701319/

Στη διάρκεια των δραστηριοτήτων που αναφέρονται στο προοπτικό επίπεδο και στον προοπτικό χώρο θα μελετήσουμε, με τη βοήθεια των μαθηματικών, τον τρόπο που φαίνεται ένα τετράγωνο πάτωμα και ένα δωμάτιο με μεγάλες διαστάσεις.

Το προοπτικό τετράγωνο, λοιπόν, είναι το φαινόμενο τετράγωνο και ο προοπτικός κύβος είναι ο φαινόμενος κύβος και στόχος μας είναι να βρούμε τρόπους να κατασκευάζουμε τα αντικείμενα αυτά, ώστε να φαίνονται όσο το δυνατόν πιο φυσικά. Αρκετοί καλλιτέχνες το προσπάθησαν αυτό κατά την Αναγέννηση και εμείς θα χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο που προτείνει ο Jean Pelerin.

Η κατασκευή του Pelerin

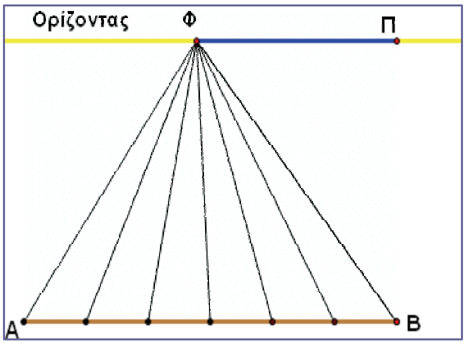
Ο Jean Pelerin (1445-1522), που είναι γνωστός και ως Viator, εξέδωσε το 1505 το έργο του *Εικονική Προοπτική*, όπου περιέγραφε έναν απλό αλλά και έγκυρο τρόπο για την κατασκευή του προοπτικού επιπέδου.

Ας δούμε την κατασκευή αυτή σε φάσεις, ώστε να μπορέσουμε στη συνέχεια να την εφαρμόσουμε.

Φάση 1η: Γραμμή του ορίζοντα και σημείο φυγής

Ο Pelerin χρησιμοποιεί τη γραμμή του ορίζοντα και πάνω σε αυτή κατασκευάζει ένα σημείο Φ στο οποίο φαίνεται ότι συγκλίνουν οι παράλληλες γραμμές που κατευθύνονται στο βάθος της εικόνας. Το σημείο αυτό είναι γνωστό και ως σημείο φυγής. Επίσης λαμβάνει υπ' όψιν και την απόσταση ΠΦ του παρατηρητή Π από την εικόνα.

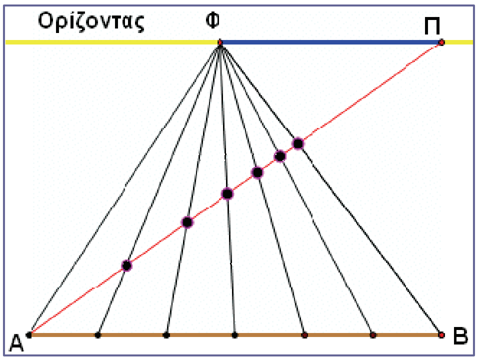
Χωρίζει το τμήμα ΑΒ σε ίσα τμήματα και τα ενώνει με το σημείο φυγής.



Φάση 2η: Η διαγώνιος

Στη συνέχεια κατασκευάζει το διαγώνιο τμήμα που ενώνει το Π με το άκρο Α της βάσης.

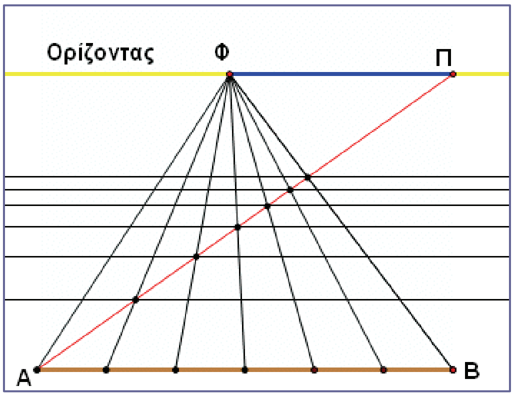
Το τμήμα αυτό δημιουργεί σημεία τομής με τις ευθείες που συγκλίνουν. Τα σημεία αυτά θα καθορίσουν στη συνέχεια από πού θα φέρουμε παράλληλες προς τη γραμμή του ορίζοντα.



Φάση 3η: Οι παράλληλες προς τη γραμμή του ορίζοντα

Από τα σημεία τομής φέρνει παράλληλες προς τη βάση.

Οι παράλληλες αυτές τέμνουν τις συγκλίνουσες και δημιουργούν το προοπτικό δάπεδο, άρα και το προοπτικό επίπεδο.



2.2 Δραστηριότητες για την Α' Γυμνασίου

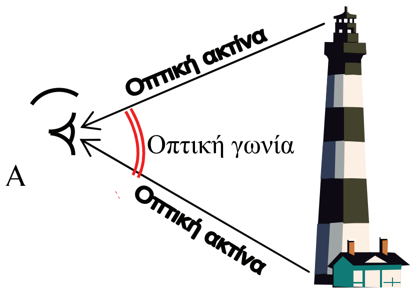
2.2.1 Δραστηριότητα: ΟΠΤΙΚΗ ΓΩΝΙΑ

Ονοματεπώνυμο μαθητών: -- **Τάξη:** ----------

-- **Ημερομηνία:** ----------

Φύλλο εργασίας

Το ανθρώπινο μάτι μπορεί να παρομοιαστεί με μία σφαίρα, στο κέντρο της οποίας συγκεντρώνονται οι οπτικές ακτίνες που προέρχονται από το αντικείμενο που παρατηρούμε. Οι δύο ακραίες οπτικές ακτίνες καθορίζουν αυτό που αποκαλούμε οπτική γωνία.



Προφανώς, η οπτική γωνία μεταβάλλεται καθώς εμείς μετακινούμαστε, πλησιάζοντας ή απομακρυνόμενοι από το αντικείμενο, δηλαδή καθώς μεταβάλλεται η απόστασή μας από το αντικείμενο.

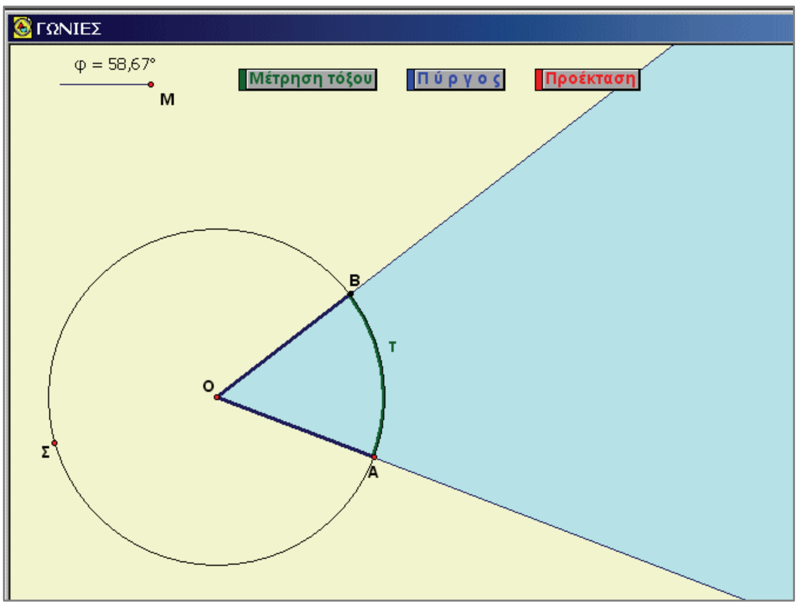
Αρχικά, θα πρέπει να μελετήσετε το κείμενο που αναφέρεται στην **Οπτική γωνία** (συνοδευτικό λογισμικό, Ενότητα 2: Εκπαιδευτικές δραστηριότητες για το γυμνάσιο).

1) Εκτελέστε το εξής πείραμα: Με τη βοήθεια δύο μικρών λεπτών ράβδων (π.χ. δύο μολύβια) μετρήστε την οπτική γωνία με την οποία φαίνεται ένα αντικείμενο (π.χ. η πόρτα της αίθουσας από το επάνω μέρος της μέχρι το πάτωμα). Σε αυτή τη δραστηριότητα ο ένας από τους δύο της ομάδας σας κρατά τα μολύβια και ο άλλος μετρά με ένα μοιρογνωμόνιο τη γωνία και την καταγράφει. Επαναλάβετε το πείραμα και για άλλα αντικείμενα, π.χ. παράθυρα.

2) Οι ειδικοί λένε ότι η μέγιστη οπτική γωνία, μέσα στην οποία μπορούμε να αντιλαμβανόμαστε αντικείμενα, είναι 100^o περίπου. Εξετάστε, με όποιον τρόπο νομίζετε κατάλληλο, αν αυτό ευσταθεί.

Ανοίξτε το αρχείο vision του λογισμικού. Στην οθόνη προβάλλονται:

Ένας κύκλος με κέντρο Ο που μπορεί να μεταβάλλεται από το σημείο Σ.
Μία γωνία με κορυφή το Ο, χρωματισμένη γαλάζια. Η γωνία αυτή μπορεί να μεταβάλλεται, σύροντας το σημείο Μ, ενώ, συγχρόνως, εμφανίζεται και το μέτρο της φ.
Το τόξο τ που ορίζει η γωνία πάνω στον κύκλο.
Το κουμπί «Μέτρηση τόξου» που εμφανίζει το μέτρο του τόξου τ.
Το κουμπί «Πύργος», από όπου εμφανίζεται ένας γνωστός πύργος.
Το κουμπί «Προέκταση», από όπου εμφανίζεται η προέκταση μιας πλευράς της γωνίας.
Ένα κουμπί βοήθειας για τον τρόπο με τον οποίο μεταβάλλονται τα αντικείμενα στην οθόνη.



ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ ΓΙΑ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ:

3) Στον παρακάτω πίνακα συμπληρώστε τη στήλη «Γεωμετρικό μοντέλο» με τα αντικείμενα που εμφανίζονται στην οθόνη και αντιστοιχούν ένα προς ένα με τα φυσικά αντικείμενα της πρώτης στήλης.

Πραγματική κατάσταση	**Γεωμετρικό μοντέλο**
Οφθαλμός	
Ακραίες οπτικές ακτίνες	
Οπτική γωνία	
Δύο μολύβια	
Μοιρογνωμόνιο	

4) Μετακινήστε το σημείο Μ (μεταβολέας) και κατασκευάστε στην αρχή οξείες γωνίες, στη συνέχεια ορθή και στο τέλος αμβλείες.

5) Με το κουμπί «Πύργος» εμφανίστε την εικόνα ενός γνωστού πύργου. Μελετήστε την οπτική γωνία για τον πύργο που υπάρχει στην οθόνη.

6) Με τη βοήθεια του κουμπιού «Μέτρηση τόξου» εμφανίστε το μέτρο του τόξου τ. Στην οθόνη σας έχετε τώρα τη μέτρηση της γωνίας και του αντίστοιχου τόξου. Τι παρατηρείτε; Σε τι συμπέρασμα καταλήγετε για τον τρόπο με τον οποίο μετράμε τις γωνίες;

7) Μεταβάλετε την ακτίνα του κύκλου, σύροντας το σημείο Σ. Εξετάστε αν μεταβάλλεται και η γωνία. Παρατηρήστε τη μέτρηση του τόξου. Σε τι συμπέρασμα καταλήγετε;

8) Με τη βοήθεια του μεταβολέα κατασκευάστε γωνίες μεγαλύτερες των 180^o. Χρησιμοποιήστε το κουμπί «Προέκταση» για να εμφανίσετε την προέκταση μίας πλευράς της γωνίας. Ποια είναι η θέση της προέκτασης της πλευράς ως προς τη γωνία; Αν τις γωνίες αυτές τις ονομάσουμε μη κυρτές, να διατυπώσετε έναν κανόνα για το πότε μία γωνία θα ονομάζεται μη κυρτή με βάση τη θέση της προέκτασης της πλευράς ως προς τη γωνία.

2.2.2 Δραστηριότητα: ΤΟ ΠΡΟΟΠΤΙΚΟ ΔΑΠΕΔΟ

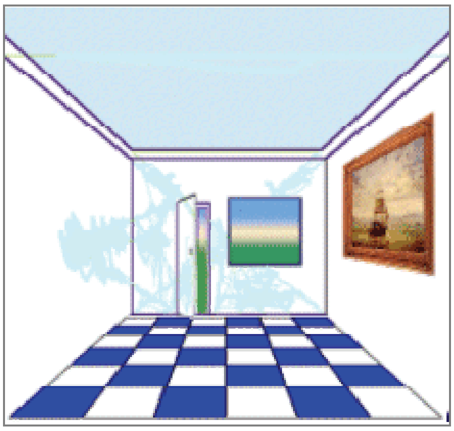
Ονοματεπώνυμο μαθητών: -- **Τάξη:** ------------

-- **Ημερομηνία:** ------------

Αρχίστε, μελετώντας το κείμενο για τον **προοπτικό χώρο** (συνοδευτικό λογισμικό, Ενότητα 2: Εκπαιδευτικές δραστηριότητες για το γυμνάσιο).

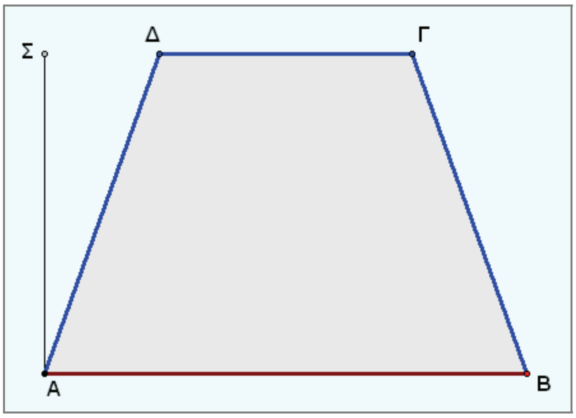
Φύλλο εργασίας

1) Πριν εργαστείτε στον υπολογιστή, παρατηρήστε την παρακάτω εικόνα και απαντήστε στις ερωτήσεις που ακολουθούν.



α) Ποιο είναι το σχήμα που **φαίνεται** να έχει το δάπεδο;
β) Ποιο είναι το **πραγματικό** σχήμα του δαπέδου; Πώς δικαιολογείτε την απάντησή σας;

Αυτή ακριβώς την εντύπωση που μας δημιουργεί ένα πλακόστρωτο δάπεδο πρόκειται να μελετήσουμε με τη βοήθεια του λογισμικού. Ανοίξτε το αρχείο tetragono του λογισμικού.



Στην οθόνη προβάλλεται:

Ένα τραπέζιο ΑΒΓΔ, στο οποίο μπορούμε να μεταβάλλουμε τη μικρή βάση ΔΓ από το σημείο Δ και τη μεγάλη βάση από το σημείο Β. Από το σημείο Σ μπορούμε να αυξήσουμε ή να ελαττώσουμε το ύψος του. Επιπλέον υπάρχουν τρία κουμπιά μετρήσεων, από τα οποία μπορείτε να αντλήσετε πληροφορίες για τις μεταβολές των γεωμετρικών αντικειμένων και τις μετρήσεις τους, καθώς και ένα κουμπί με τη βοήθεια για την κατασκευή της μεσοκαθέτου ενός τμήματος

ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ ΓΙΑ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ:

2) Να μεταβάλετε το ύψος του τραπεζίου από το σημείο Σ. Αν υποθέσετε ότι το τραπέζιο παριστάνει ένα δάπεδο, ποια αίσθηση σας δίνει το δάπεδο, καθώς ελαττώνεται το ύψος του τραπεζίου, και ποια καθώς αυξάνεται;

3) Μετρήστε τις μη παράλληλες πλευρές του τραπεζίου. Τι παρατηρείτε; Στη συνέχεια μετρήστε τις γωνίες της μικρής και της μεγάλης του βάσης. Τι παρατηρείτε; Τι παρατηρείτε;

4) Σύρετε τα σημεία Σ, Β, Δ, ώστε, με βάση τις μετρήσεις σας, να είναι βέβαιο ότι το τραπέζιο έχει μετατραπεί σε τετράγωνο.

5) Μετατρέψτε το τετράγωνο σε ορθογώνιο παραλληλόγραμμο και στη συνέχεια σε τραπέζιο.

6) Φέρτε τη μεσοκάθετο της μεγάλης βάσης και να ελέγξετε αν είναι μεσοκάθετος και της μικρής βάσης.

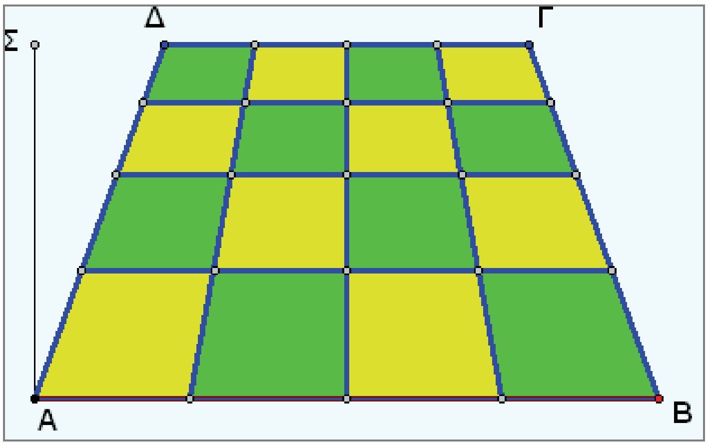
7) Προεκτείνετε τις πλευρές ΒΓ και ΑΔ, ώστε να τέμνονται. Πού βρίσκεται το σημείο τομής; Πώς μπορούμε να χαρακτηρίσουμε τη μεσοκάθετη ως προς το τραπέζιο;

8) Χωρίστε τη μεγάλη και τη μικρή βάση σε τέσσερα ίσα μέρη και κατασκευάστε τα τμήματα που ενώνουν τα σημεία της μικρής βάσης με τα αντίστοιχα σημεία της μεγάλης βάσης.

9) Κατασκευάστε τη διαγώνιο ΑΓ και βρείτε τα σημεία στα οποία τέμνεται με τα τμήματα που δημιουργήσατε στην προηγούμενη δραστηριότητα. Από τα σημεία αυτά φέρτε παράλληλες προς τις βάσεις.

10) Προφανώς το δάπεδο είναι ορθογώνιο ή τετράγωνο. Θέλουμε να καλύψουμε το δάπεδο με τετράγωνες πλάκες. Πώς μπορούμε να το πετύχουμε με βάση την προηγούμενη δραστηριότητα;

Σημείωση: Το δάπεδο θα πρέπει μετά την κάλυψή του να παρουσιάζει την παρακάτω εικόνα.



11) Μετρήστε τις διαστάσεις των τετραγώνων όπως φαίνονται στο προοπτικό πάτωμα. Βρείτε τους λόγους των τμημάτων με τη βοήθεια του λογισμικού. Τι παρατηρείτε; Πώς εξηγείτε τις παρατηρήσεις σας;

12) Μεταβάλετε το ύψος ΑΣ. Ισχύει αυτό που παρατηρήσατε στην προηγούμενη δραστηριότητα;

13) Γράψτε τα συμπεράσματά σας με μορφή κανόνων.

2.3 Δραστηριότητες για τη Β' Γυμνασίου

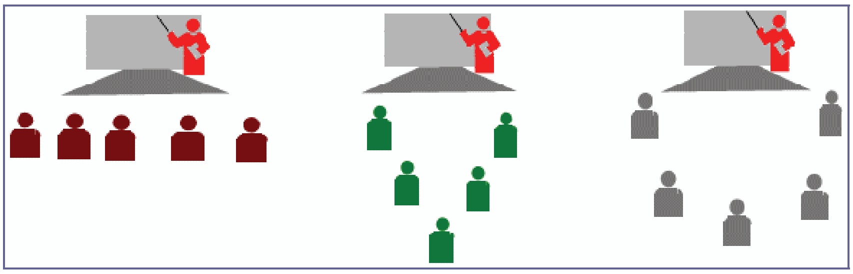
2.3.1 Δραστηριότητα: ΟΠΤΙΚΗ ΓΩΝΙΑ ΤΟΥ ΘΕΑΤΗ

Ονοματεπώνυμο μαθητών: -- **Τάξη:** ------------
-- **Ημερομηνία:** ------------

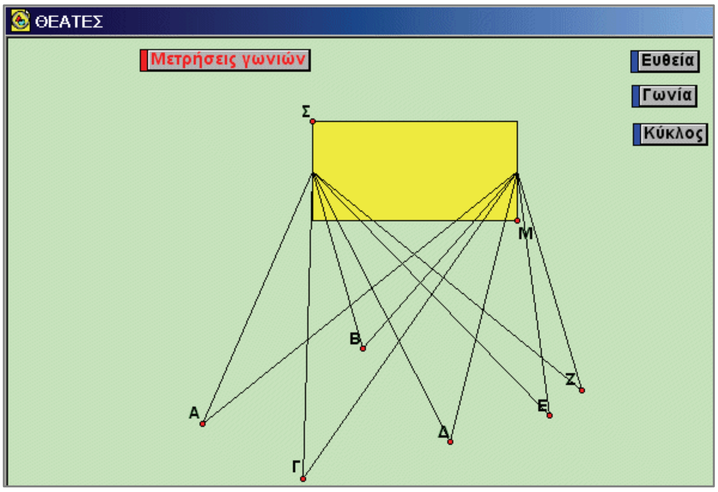
Φύλλο εργασίας

Να μελετήσετε το συμπληρωματικό κείμενο της **Οπτικής γωνίας** (συνοδευτικό λογισμικό, Ενότητα 2: Εκπαιδευτικές δραστηριότητες για το γυμνάσιο).

Σε καθεμία από τις παρακάτω εικόνες εμφανίζονται μερικοί θεατές οι οποίοι παρακολουθούν μία παρουσίαση. Σε ποια άραγε από εικόνες αυτές οι θεατές έχουν την ίδια οπτική γωνία προς τον παρουσιαστή; Με άλλα λόγια, σε ποια από αυτές οι θεατές βλέπουν όλοι το ίδιο καλά;



Ανοίξτε το αρχείο theates του λογισμικού.



Στην οθόνη εμφανίζονται:
Ένα κίτρινο ορθογώνιο παραλληλόγραμμο το οποίο μπορεί να μεταβάλλεται από τα σημεία Σ και Μ.
Τα ελεύθερα σημεία Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ, που είναι και κορυφές των αντίστοιχων γωνιών.
Τα κουμπιά «Ευθεία», «Γωνία», «Κύκλος» που εμφανίζουν τα αντίστοιχα σχήματα στην οθόνη.
Το κουμπί «Μετρήσεις γωνιών» που εμφανίζει τα μέτρα των έξι γωνιών.

ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ ΓΙΑ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ:

1) Στον παρακάτω πίνακα συμπληρώστε τη στήλη «Γεωμετρικό μοντέλο» με τα αντικείμενα που εμφανίζονται στην οθόνη.

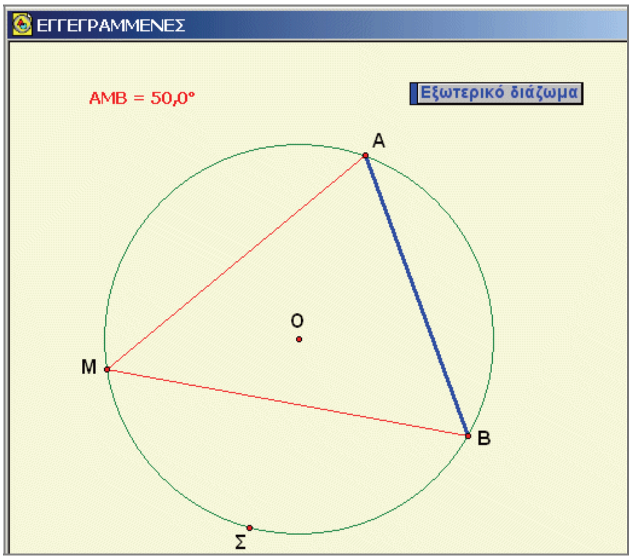
Πραγματική κατάσταση	Γεωμετρικό μοντέλο
Πίνακας παρουσίασης	
Θεατές	
Οπτικές γωνίες	

2) Με το κουμπί «Ευθεία» εμφανίστε την ευθεία και τοποθετήστε επάνω της τους θεατές, τον ένα δίπλα στον άλλο. Εμφανίστε τις μετρήσεις των γωνιών, σχολιάστε τις οπτικές γωνίες των θεατών και καταγράψτε τα συμπεράσματά σας.

3) Αποκρύψτε την ευθεία και με το κουμπί «Γωνία» εμφανίστε τη γωνία. Τοποθετήστε σε διάταξη τους θεατές πάνω σε αυτή. Σχολιάστε τα μέτρα των γωνιών.

4) Αποκρύψτε τη γωνία και με το κουμπί «Κύκλος» εμφανίστε τον κύκλο. Τοποθετήστε σε διάταξη τους θεατές πάνω σε αυτόν. Σε ποια περίπτωση φαίνεται ότι οι οπτικές γωνίες μπορεί να είναι και ίσες;

Κλείστε το αρχείο αυτό και ανοίξτε εκείνο με τίτλο gonies.



Στην οθόνη παρουσιάζονται:
Ένας κύκλος που μπορεί να μεταβληθεί, αν σύρετε το σημείο Σ ή το σημείο Ο. Μία εγγεγραμμένη γωνία με κορυφή το σημείο Μ που βλέπει το τόξο ΑΒ. Η μέτρηση της γωνίας ΑΜΒ. Ένα κουμπί με τίτλο «Εξωτερικό διάζωμα» που εμφανίζει ένα τόξο από έναν κύκλο μεγαλύτερο από τον αρχικό και μία εγγεγραμμένη γωνία με τη μέτρησή της.

5) Μετακινήστε το σημείο Μ που βρίσκεται πάνω στον κύκλο. Παρατηρήστε τη μέτρηση της γωνίας. Διατυπώστε το συμπέρασμα στο οποίο καταλήγετε.

6) Κατασκευάστε την επίκεντρη γωνία ΑΟΒ και μετρήστε τη. Μεταβάλετε τη θέση του σημείου Μ και συγκρίνετε τις μετρήσεις των δύο γωνιών (επίκεντρης-εγγεγραμμένης). Σε τι συμπέρασμα καταλήγετε;

7) Με βάση το αμέσως προηγούμενό σας συμπέρασμα αιτιολογήστε το συμπέρασμα που αποκομίσατε στη δραστηριότητα 4.

8) Μεταβάλετε τη θέση των σημείων Α και Β, ώστε το τμήμα να γίνει διάμετρος. Ποια είναι η τιμή της γωνίας ΑΜΒ; Αιτιολογήστε γιατί η τιμή της γωνίας είναι εκείνη που δείχνει η μέτρηση με το λογισμικό.

9) Μετακινήστε το σημείο Μ (θεατής), ώστε να βρεθεί «πίσω» από τον πίνακα παρουσίασης (τμήμα ΑΒ). Ποια είναι τώρα η τιμή της γωνίας ΑΜΒ; Ποια σχέση έχει με τη μέτρηση, όταν το Μ βρισκόταν «μπροστά» από τον πίνακα παρουσίασης; Διατυπώστε το συμπέρασμά σας και αιτιολογήστε το με μαθηματικούς συλλογισμούς.

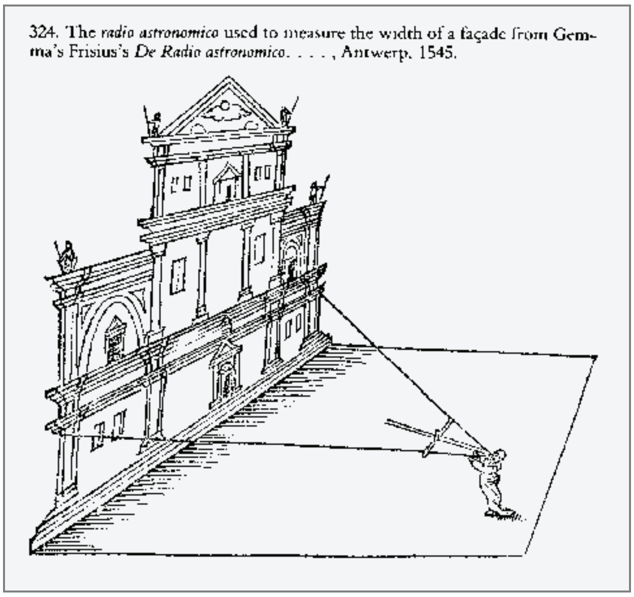
10) Εμφανίστε το δεύτερο κύκλο με το κουμπί «Εξωτερικό διάζωμα». Συγκρίνετε τις οπτικές γωνίες των θεατών που βρίσκονται σε αυτά τα δύο διαφορετικά διαζώματα και διατυπώστε τα συμπεράσματά σας για τις θέσεις που προσφέρουν τη βέλτιστη οπτική γωνία στο θεατή.

2.3.2 Δραστηριότητα: ΟΠΤΙΚΗ ΓΩΝΙΑ ΚΑΙ ΜΕΤΡΗΣΕΙΣ

Ονοματεπώνυμο μαθητών: .... **Τάξη:** ....
.... **Ημερομηνία:** ....

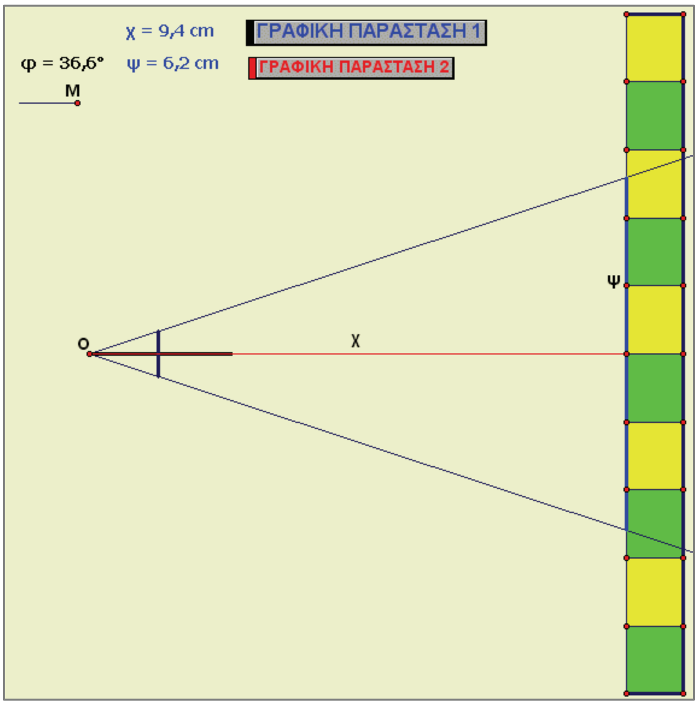
Φύλλο εργασίας

Στην παρακάτω γκραβούρα του 16ου αιώνα παρουσιάζεται ένας μηχανικός της εποχής ο οποίος προσπαθεί να εντοπίσει την οπτική γωνία με την οποία φαίνεται η πρόσοψη ενός κτηρίου και μέσω αυτής το πλάτος του.



Η εικόνα προέρχεται από την ηλεκτρονική παρουσίαση του 15ου κεφαλαίου του βιβλίου «Τετραγωνίζοντας τον κύκλο: Η Γεωμετρία στην Τέχνη και την Αρχιτεκτονική» του Πολ Κάλτερ, από το Πανεπιστήμιο του Ντάρτμουθ και τον 1/2008 η διεύθυνσή της είναι: http://www.dartmouth.edu/~matc/math5.geometry/unit15/unit15.html

Με τη δραστηριότητα που ακολουθεί θα προσπαθήσουμε να δώσουμε απάντηση στο εξής ερώτημα: Το όργανο μέτρησης επιτρέπει στο μηχανικό να βλέπει όλη την πρόσοψη του κτηρίου από τη θέση στην οποία βρίσκεται. Τι θα συμβεί, αν πλησιάσει ή απομακρυνθεί από το κτήριο, χωρίς να μεταβάλλει τη γωνία του οργάνου; Πόσο λιγότερο ή περισσότερο τμήμα της πρόσοψης θα παρατηρεί σε κάθε του μετακίνηση;



Ανοίξτε το αρχείο metrisi του λογισμικού. Στην οθόνη εμφανίζονται:

Στο δεξιό άκρο ένα μεγάλο ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, χωρισμένο σε μικρότερα ίσα χρωματισμένα παραλληλόγραμμα.
Ένα σημείο Ο που είναι η κορυφή μιας γωνίας φ και μπορεί να μεταφέρεται μόνο εμπρός ή πίσω. Ένα τμήμα χ κάθετο από το Ο προς το ορθογώνιο και ένα τμήμα ψ που αποτελεί τμήμα του ορθογωνίου και ορίζεται από τις πλευρές της γωνίας.
Η γωνία φ μπορεί να μεταβάλλεται από το σημείο Μ και, συγχρόνως, να προβάλλεται το μέτρο της.
Το κουμπί «Γραφική παράσταση 1» εμφανίζει ένα σύστημα αξόνων και ένα σημείο Σ, του οποίου μπορούμε εύκολα να διακρίνουμε τις συντεταγμένες. Το σύστημα αυτό είναι κανονικό, δηλαδή η μονάδα μέτρησης πάνω στον χ΄χ είναι ίση με τη μονάδα μέτρησης πάνω στον ψ΄ψ.
Το κουμπί «Γραφική παράσταση 2» εμφανίζει ένα σύστημα αξόνων και ένα σημείο Τ, του οποίου μπορούμε εύκολα να διακρίνουμε τις συντεταγμένες. Το

σύστημα αυτό δεν είναι κανονικό, δηλαδή η μονάδα μέτρησης πάνω στον χ΄χ είναι διαφορετική από τη μονάδα μέτρησης πάνω στον ψ΄ψ.

ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ ΓΙΑ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ:

1) Μετακινήστε το σημείο Ο και στη συνέχεια το σημείο Μ και συμπληρώστε τον παρακάτω πίνακα. Υποθέστε ότι βρίσκεστε πάνω από τον παρατηρητή του σχεδίου και τον βλέπετε σε κάτοψη.

Πραγματική κατάσταση	Γεωμετρικό μοντέλο
Οφθαλμός	
Οπτική γωνία	
Απόσταση του παρατηρητή από τον τοίχο	
Το τμήμα του τοίχου που παρατηρεί	

2) Μετακινήστε το σημείο Ο. Από τα τρία μεγέθη που μας ενδιαφέρουν (οπτική γωνία, απόσταση του παρατηρητή, τμήμα του παρατηρούμενου τοίχου), ποια παραμένουν σταθερά και ποια μεταβάλλονται;

3) Παρατηρήστε τις τιμές των μεταβαλλόμενων ποσών. Εξετάσετε, με οποιονδήποτε τρόπο, αν τα ποσά αυτά είναι ανάλογα.

4) Εμφανίστε τους άξονες με το κουμπί «Άξονες» και το σημείο Σ με το κουμπί «Γραφική παράσταση 1». Κινήστε το σημείο Ο και παρατηρήστε τις συντεταγμένες του σημείου Σ. Ποια σχέση έχουν με τα ποσά που εξετάζουμε;

5) Εμφανίστε το ίχνος του σημείου Σ και σύρετε το σημείο Ο. Τι μορφή έχει η γραμμή που γράφει το σημείο Σ; Πώς συνδέεται η γραμμή που προέκυψε με τα συμπεράσματά σας από τη δραστηριότητα 4;

6) Καταργήστε την εμφάνιση του ίχνους του σημείου Σ, αλλάξτε την τιμή της γωνίας φ και επαναλάβετε τη διαδικασία της προηγούμενης δραστηριότητας. Τι παρατηρείτε; Τι άλλαξε και τι παρέμεινε ίδιο;

7) Ας εξετάσουμε τώρα αν η σχέση που συνδέει τη γωνία φ με το τμήμα ψ του παρατηρούμενου τοίχου είναι όμοια με τη σχέση που συνδέει τα ποσά χ και ψ. Κλείστε το κουμπί «Γραφική παράσταση 1» και εμφανίστε ένα καινούριο σύστημα αξόνων και το σημείο Τ με το κουμπί «Γραφική παράσταση 2». Σε τι διαφέρει το σύστημα αυτό από το προηγούμενο;

8) Μεταβάλετε τη γωνία φ και παρατηρήστε τις συντεταγμένες του σημείου Σ. Εξετάστε αν τα ποσά φ και ψ είναι ανάλογα.

9) Εμφανίστε το ίχνος του σημείου Τ. Μεταβάλετε τις τιμές της γωνίας φ. Τι μορφή έχει η γραμμή που γράφει το ίχνος του Τ; Πώς συνδέεται η γραμμή που προέκυψε με τα συμπεράσματά σας από τη δραστηριότητα 8;

2.4 Δραστηριότητες για τη Γ' Γυμνασίου

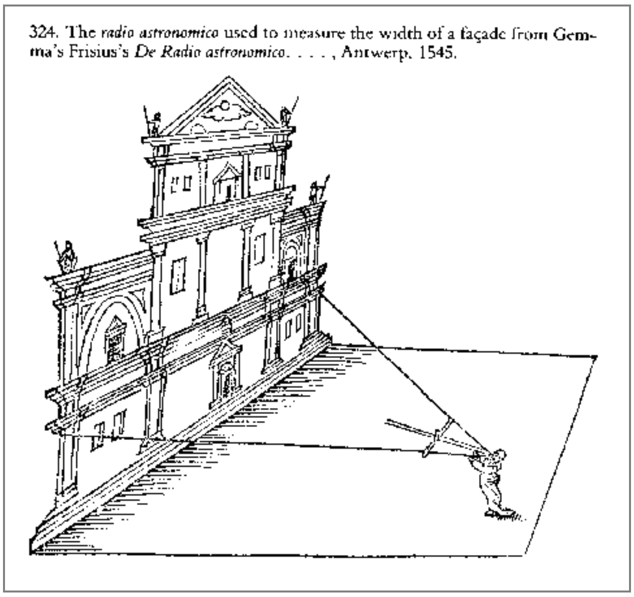
2.4.1 Δραστηριότητα: ΕΡΓΑΛΕΙΑ ΜΕΤΡΗΣΗΣ

Ονοματεπώνυμο μαθητών: -- **Τάξη:** ------------

-- **Ημερομηνία:** ------------

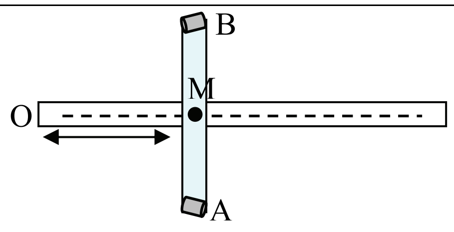
Φύλλο εργασίας

Στην παρακάτω γκραβούρα του 16ου αιώνα παρουσιάζεται ένα μηχανικός της εποχής, ο οποίος προσπαθεί να εντοπίσει το πλάτος του κτηρίου.



Η εικόνα προέρχεται από την ηλεκτρονική παρουσίαση του 15ου κεφαλαίου του βιβλίου «Τετραγωνίζοντας τον κύκλο: Η Γεωμετρία στην Τέχνη και την Αρχιτεκτονική» του Πολ Κάλτερ, από το Πανεπιστήμιο του Ντάρτμουθ και τον 1/2008 η διεύθυνσή της είναι: http://www.dartmouth.edu/~matc/math5.geometry/unit15/unit15.html

Θα κάνουμε μερικές χρήσιμες υποθέσεις. Ο μηχανικός είχε τη δυνατότητα να μετρά εύκολα την απόστασή του από την πρόσοψη, καθόσον ο περίβολος του οικήματος ήταν στρωμένος με πλάκες συγκεκριμένων διαστάσεων, οπότε μπορούσε να μετρά τον αριθμό των πλακών από το σημείο που βρισκόταν μέχρι την πρόσοψη.

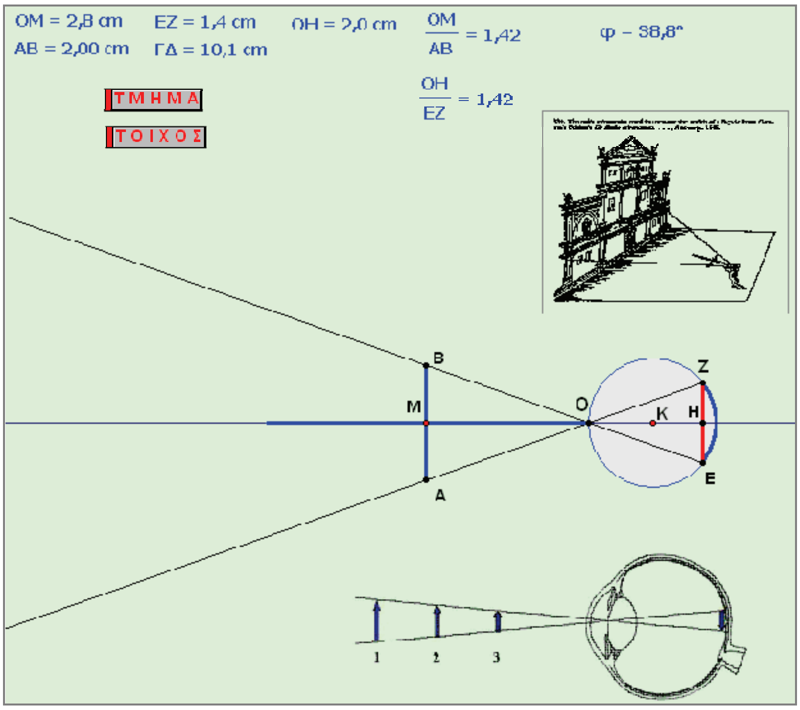
	Το διπλανό εργαλείο αποτελείται από δύο κάθετα τμήματα: το ένα είναι το ΑΒ και το άλλο έχει ως αρχή το Ο και αποτελεί τη βάση στήριξης του ΑΒ. Το τμήμα ΑΒ μπορεί και μετακινείται μπρος πίσω, οπότε μεταβάλλεται και η οπτική γωνία ΑΟΒ.

Ο μηχανικός τοποθετούσε τον ένα οφθαλμό του στο σημείο Ο και προσπαθούσε να παρατηρήσει από τις μικρές διόπτρες, στα σημεία Α και Β, τα δύο άκρα της πρόσοψης που βρίσκονταν απέναντι. Επίσης μπορούσε να μετρήσει εύκολα την απόσταση ΟΜ, αφού υπήρχε αρίθμηση επάνω στο εργαλείο.

Το πρόβλημα που θα μελετήσουμε είναι πώς μπορούμε να αξιοποιήσουμε το εργαλείο, δηλαδή τι μαθηματικά έπρεπε να χρησιμοποιήσει ο μηχανικός, ώστε με τα τότε αριθμητικά δεδομένα να μπορέσει να μετρήσει την πρόσοψη του κτηρίου;

Ανοίξτε το αρχείο ergalio του λογισμικού.

Στην οθόνη εμφανίζονται:
Δύο εικόνες στις οποίες παρουσιάζεται ένα απλό σχέδιο της λειτουργίας του ανθρώπινου ματιού και μία γκραβούρα στην οποία παριστάνεται ένας άνθρωπος που προσπαθεί να μετρήσει την πρόσοψη ενός κτηρίου με ένα απλό εργαλείο.



Μεταξύ των δύο εικόνων υπάρχει ένας κύκλος που μπορεί να κινείται μπρος πίσω από το σημείο Κ. Μπροστά από τον κύκλο υπάρχει ένα οριζόντιο μπλε τμήμα και ένα κατακόρυφο ΑΒ, το οποίο μπορεί να κινείται μπρος πίσω από το σημείο Μ. Τα κουμπιά «Τμήμα» και «Τοίχος» εμφανίζουν, αντίστοιχα, ένα ευθύγραμμο τμήμα ΓΔ και ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο. Τέλος, εμφανίζονται οι μετρήσεις αρκετών τμημάτων, καθώς και το μέτρο της γωνίας ΑΟΒ.

ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ ΓΙΑ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ:

1) Συμπληρώστε τον επόμενο πίνακα.

Πραγματική κατάσταση	Γεωμετρικό μοντέλο
Οφθαλμός	
Εργαλείο	
Οπτική γωνία	
Απόσταση του παρατηρητή από τον τοίχο	
Το τμήμα του τοίχου που παρατηρεί.	

2) Μετακινήστε το σημείο Μ. Με βάση τις μετρήσεις, διαπραγματευτείτε με την ομάδα σας το ερώτημα: Ποια ποσά μεταβάλλονται και ποια ποσά παραμένουν σταθερά;

3) Υπολογίσετε τους λόγους $\frac{OM}{OH}$ και $\frac{AB}{EZ}$. Τι παρατηρείτε;

4) Μετρήστε τα τμήματα ΟΒ και ΟΕ και υπολογίστε το λόγο τους. Τι παρατηρείτε; Τι σχέση έχουν μεταξύ τους οι γωνίες των δύο τριγώνων;

5) Από το κουμπί «Τμήμα» εμφανίστε το τμήμα ΓΔ. Σύρετε το σημείο Σ και παρατηρήστε τις μετρήσεις. Ποια ποσά παραμένουν σταθερά και ποια μεταβάλλονται; Ποια αναλογία προκύπτει;

6) Πώς θα μπορούσαμε να υπολογίσουμε το τμήμα ΓΔ (αν δεν διαθέταμε τη μέτρηση στην οθόνη), όταν είναι γνωστά τα μήκη των τμημάτων ΟΜ, ΟΣ και ΑΒ;

7) Εμφανίστε τώρα την προσομοίωση της πρόσοψης ενός κτηρίου με το κουμπί «Τοίχος». Υποθέστε ότι βλέπετε την κάτοψη του τοίχου, η οποία μπορεί να μεταβάλλεται από το σημείο Τ. Πώς μπορούμε να μετρήσουμε το πλάτος της πρόσοψης με βάση τις υπάρχουσες μετρήσεις;

8) Μεταβάλετε τις διαστάσεις και τη θέση του υποτιθέμενου τοίχου, από το σημείο Σ, και επαναλάβετε τις μετρήσεις με τη μέθοδο που ήδη έχετε επινοήσει. Επιβεβαιώστε τα αποτελέσματά σας, μετρώντας με τη βοήθεια του λογισμικού το ευθύγραμμο τμήμα που αντιστοιχεί στο πλάτος του τοίχου.

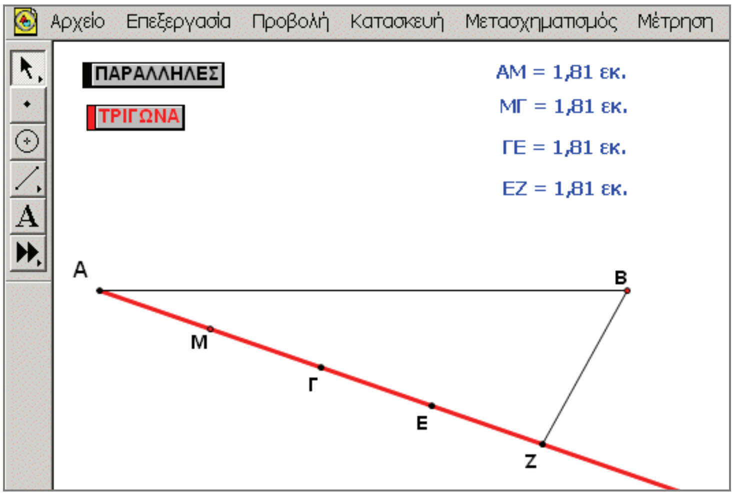
9) Ας έρθουμε τώρα στο φυσικό εργαλείο. Περιγράψτε τον τρόπο με τον οποίο ο μηχανικός μετρούσε τις προσόψεις των κτηρίων, χρησιμοποιώντας το συγκεκριμένο εργαλείο.

2.4.2 Δραστηριότητα: ΤΟ ΠΡΟΟΠΤΙΚΟ ΕΠΙΠΕΔΟ

Ονοματεπώνυμο μαθητών: .... **Τάξη:** ....
.... **Ημερομηνία:** ....

Φύλλο εργασίας 1

Ανοίξτε το αρχείο tmimata του λογισμικού. Στην οθόνη προβάλλονται:



Ένα τμήμα ΑΒ, του οποίου το μήκος μεταβάλλεται από το σημείο Β.
Μία ημιευθεία με αρχή το Α, πάνω στην οποία έχουν κατασκευαστεί τα τμήματα ΑΜ, ΜΓ, ΓΕ, ΕΖ και οι μετρήσεις των τμημάτων αυτών. Το μήκος των τμημάτων μεταβάλλεται, σύροντας το σημείο Μ.
Το κουμπί «Παράλληλες», με το οποίο εμφανίζονται τρεις παράλληλες ευθείες προς το τμήμα ΒΖ, τα σημεία τομής των παραλλήλων με το τμήμα ΑΒ και οι μετρήσεις των τμημάτων που δημιουργούνται πάνω στο ΑΒ.

Το κουμπί «Τρίγωνα» με το οποίο εμφανίζονται τέσσερα τρίγωνα που η μία πλευρά τους είναι παράλληλη προς την ημιευθεία.

ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ ΓΙΑ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ:

1) Πριν εμφανίσετε τις ευθείες και τα τρίγωνα με τα κουμπιά, μετακινήστε το σημείο Μ. Τι παραμένει σταθερό και τι μεταβάλλεται;

2) Εμφανίστε τις παράλληλες με το κουμπί «Παράλληλες». Μετακινήστε το σημείο Μ και παρατηρήστε τις μετρήσεις. Τι αλλάζει και τι παραμένει σταθερό;

3) Μεταβάλετε το μήκος του τμήματος ΑΒ. Τι μεταβάλλεται και τι παραμένει σταθερό;

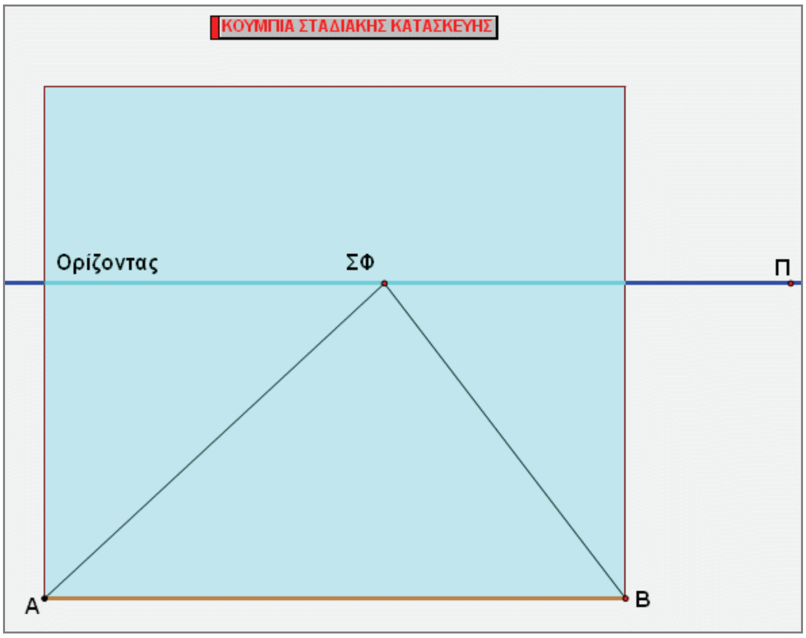
4) Περιγράψτε μία διαδικασία με την οποία θα μπορείτε να χωρίσετε ένα τμήμα σε πέντε, έξι και γενικά σε ν ίσα τμήματα, με βάση τις προηγούμενες δραστηριότητες.

5) Προφανώς δεν μπορούμε να στηριχτούμε στις μετρήσεις, για να υποστηρίξουμε ότι μία πρόταση στα μαθηματικά ισχύει σε όλες τις περιπτώσεις. Εμφανίστε τα κίτρινα τρίγωνα με το κουμπί «Τρίγωνα». Με δεδομένο ότι όλα τα κόκκινα τμήματα είναι παράλληλα προς την ημιευθεία, εξηγήστε γιατί τα τρίγωνα αυτά είναι μεταξύ τους ίσα.

6) Μπορείτε τώρα να αιτιολογήσετε γιατί η μέθοδος χωρισμού ενός τμήματος σε ίσα τμήματα, που έχετε ήδη κατασκευάσει, είναι έγκυρη από μαθηματική άποψη;

Φύλλο εργασίας 2

Ανοίξτε το αρχείο prooptiko του λογισμικού.



Στην οθόνη προβάλλονται:
α) Ένα «παράθυρο στο χώρο», δηλαδή ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο (το γαλάζιο) με βάση το τμήμα ΑΒ.
β) Στην πάνω πλευρά του «παραθύρου» διακρίνουμε τη γραμμή του ορίζοντα με το σημείο φυγής ΣΦ.
γ) Το σημείο Π πάνω στη γραμμή του ορίζοντα.
δ) Το «Κουμπί σταδιακής κατασκευής» με το οποίο εμφανίζονται άλλα βοηθητικά κουμπιά, εφόσον σας το ζητήσει ο καθηγητής.

ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ ΓΙΑ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ:

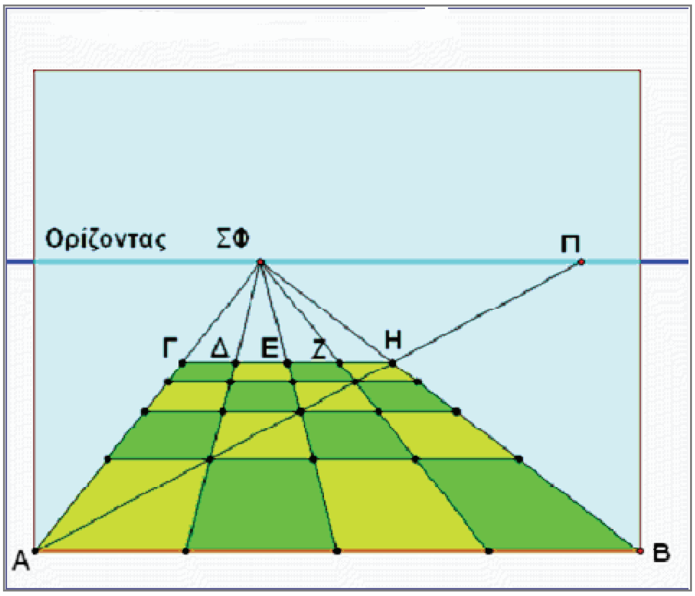
1) Κατασκευάστε την κάλυψη του δαπέδου με βάση την περιγραφή του Pelerin. Χρησιμοποιήστε τη μέθοδο χωρισμού ενός τμήματος σε ίσα τμήματα που κατασκευάσατε στην προηγούμενη δραστηριότητα.

2) Ονομάστε Γ, Δ, Ε, Ζ και Η τα σημεία της τελευταίας γραμμής του δαπέδου (της πιο μικρής από τις παράλληλες) και μετρήστε με τη βοήθεια του λογισμικού τις αποστάσεις μεταξύ των σημείων. Σύρετε το σημείο φυγής (ΣΦ). Τι παρατηρείτε;

3) Μετακινήστε το σημείο Π. Τι έχετε να παρατηρήσετε σχετικά με τις μετρήσεις; Γράψτε τον κανόνα που φαίνεται να ισχύει για τη συγκεκριμένη κατασκευή.

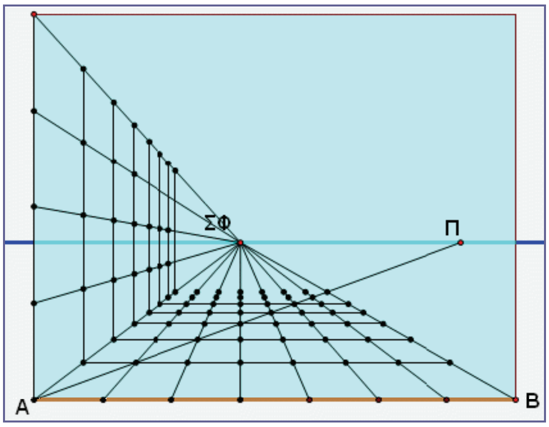
4) Αιτιολογήστε με τη βοήθεια της έννοιας της ομοιοθεσίας τα παραπάνω συμπεράσματα.

5) Κατασκευάστε όλα τα τετράγωνα και χρωματίστε τα με δύο χρώματα εναλλάξ, για να δημιουργήσετε ένα διακοσμημένο δάπεδο σε προοπτική. Το αποτέλεσμά σας θα μοιάζει με την παρακάτω εικόνα.



6) Μετακινήστε πάνω ή κάτω τη γραμμή του ορίζοντα (από το μέρος που βρίσκεται έξω από το «παράθυρο»). Τι είναι αυτό που αλλάζει; Συζητήστε μεταξύ σας και προσπαθήστε να δώσετε μία φυσική εξήγηση (όχι υποχρεωτικά μαθηματική). Σκεφτείτε κυρίως τι σημαίνει «χαμηλώνει η γραμμή του ορίζοντα». Ποια κίνηση θα πρέπει να κάνει ένας παρατηρητής, για να συμβεί αυτό;

7) Τώρα πλέον μπορείτε να κατασκευάσετε έναν προοπτικό τοίχο, δηλαδή ένα επίπεδο κατακόρυφο και όχι οριζόντιο. Μελετήστε την παρακάτω εικόνα και σκεφτείτε τι ενέργειες θα πρέπει να κάνετε με το λογισμικό, ώστε να ολοκληρωθεί η κατασκευή. Πώς μπορούμε να κατασκευάσουμε μία προοπτική οροφή;



2.5 Project Γυμνασίου

Θεματική ενότητα: Το προοπτικό μοντέλο του Alberti

Πριν αρχίσετε να εργάζεστε στα φύλλα εργασίας, θα πρέπει να μελετήσετε τη μέθοδο του **δυναμικού σημείου**. Η μέθοδος αυτή είναι απαραίτητη, καθώς θα εφαρμοστεί σε ορισμένες δραστηριότητες, ώστε να μπορέσετε να προσδιορίσετε τις σχέσεις μεταξύ δύο ποσών που μεταβάλλονται.

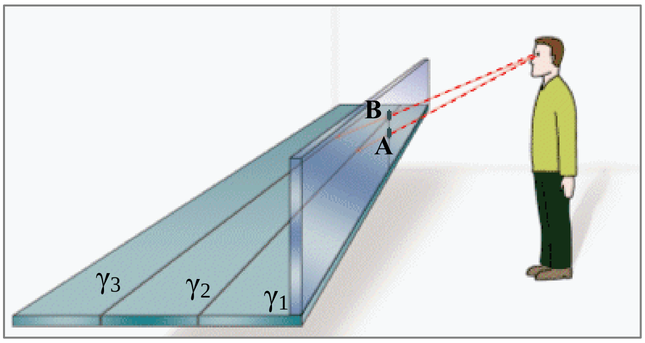
2.5.1 ΟΙ ΟΠΤΙΚΕΣ ΑΚΤΙΝΕΣ

Ονοματεπώνυμο μαθητών: -- **Τάξη:** ----------

-- **Ημερομηνία:** ----------

Φύλλο εργασίας

Στην εικόνα προβάλλεται ένας άνθρωπος που βρίσκεται σε μία απόσταση από ένα τειχίο, πάνω στο οποίο υπάρχουν δύο οπές Α και Β. Στο οριζόντιο επίπεδο υπάρχουν τρεις παράλληλες γραμμές γ_1, γ_2, γ_3.

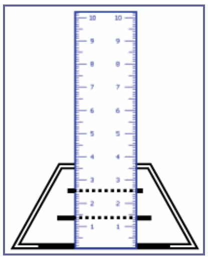


Εικόνα 1

Το πρόβλημα είναι πόσο θα πρέπει να απέχουν οι δύο οπές μεταξύ τους, ώστε ο άνθρωπος να παρατηρεί συγχρόνως και τις δύο γραμμές, χωρίς να χρειαστεί να μετακινηθεί.

ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ ΓΙΑ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ:

1) Κάντε ένα πείραμα. Κρατήστε κατακόρυφα πάνω στο θρανίο σας ένα διαφανή (πλαστικό) χάρακα.



Τοποθετήστε σε ίσες αποστάσεις κάποια αντικείμενα (π.χ. στυλό). Σημειώστε πάνω στο χάρακα τις αποστάσεις στις οποίες φαίνεται ότι βρίσκονται τα αντικείμενα αυτά. Επαναλάβετε το πείραμα με περισσότερα αντικείμενα αυτή φορά. Τι σχέση έχουν οι «φαινόμενες» αποστάσεις πάνω στο χάρακα;

2) Ας υποθέσουμε ότι ο άνθρωπος στην εικόνα (κατάσταση προβλήματος) βρίσκεται μπροστά σε ένα μικρό αδιαφανές τοιχίο, πίσω από το οποίο υπάρχουν παράλληλες προς αυτό γραμμές, σε ίσες αποστάσεις μεταξύ τους. Το τοιχίο διαθέτει δυο οπές Α και Β, από όπου ο άνθρωπος μπορεί να παρατηρεί δύο γραμμές. Αν η πρώτη οπή απέχει από τη βάση του τοιχίου 40 εκ., πόσο θα πρέπει να απέχει η δεύτερη;

3) Κατασκευάστε ένα γεωμετρικό σχήμα που να αναπαριστά την κατάσταση που περιγράφει το πρόβλημα.

4) Εξετάστε από ποια μεγέθη εξαρτάται η λύση του συγκεκριμένου προβλήματος.

5) Κάντε μία εκτίμηση για την απόσταση των οπών με βάση το σχήμα και αιτιολογήστε την.

6) Με τη βοήθεια των γεωμετρικών σας οργάνων ελέγξτε αν η εκτίμησή σας αυτή ήταν σωστή ή όχι.

7) Ανοίξτε το αρχείο Alberti_1. Αναγνωρίστε στο σχήμα που προβάλλεται στην οθόνη τα διάφορα στοιχεία του προβλήματος. Ελέγξτε τα σταθερά και μεταβλητά μεγέθη, σύροντας τα σημεία Μ, Β, Σ. Είναι η προσομοίωση αυτή όμοια με την αρχική κατάσταση του προβλήματος;

8) Με τη βοήθεια του λογισμικού μετρήστε τα μεγέθη που πρόκειται να διερευνήσετε. Καταγράψτε τις μετρήσεις σας.

9) Μελετήστε στο καρτεσιανό επίπεδο τη σχέση των μεταβαλλόμενων μεγεθών με τη μέθοδο του δυναμικού σημείου.

10) Μεταβάλετε ένα προς ένα τα μεταβλητά μεγέθη και μελετήστε τις μετρήσεις που προβάλλονται στην οθόνη.

11) Διατυπώστε κανόνες σχετικούς με τους τρόπους που μεταβάλλονται τα μεγέθη που μελετάτε.

2.5.2 Η ΜΕΛΕΤΗ ΤΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ ΤΟΥ ALBERTI

Ονοματεπώνυμο μαθητών: -- **Τάξη:** ------------

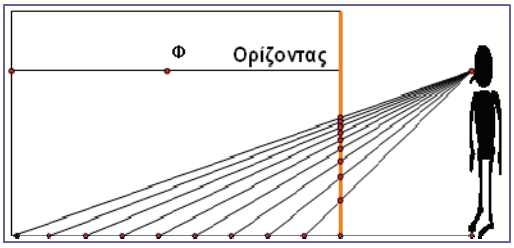
-- **Ημερομηνία:** ------------

Φύλλο εργασίας

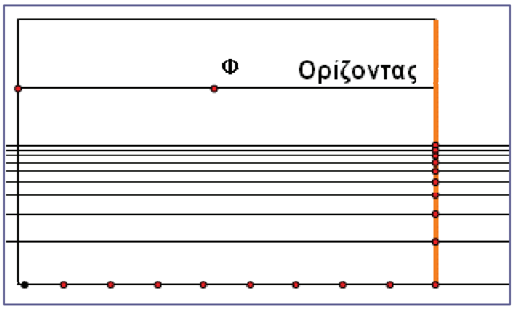
Η κατασκευή του μοντέλου του Alberti

Ο Alberti ήταν ένας ζωγράφος της Αναγέννησης που πρώτος έγραψε ένα έργο σχετικά με το πώς μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα προοπτικό δάπεδο, όπως είναι οι λιθόστρωτες πλάκες, σε μια πλατεία. Στο έργο αυτό θεωρεί την εικόνα, που θα ζωγραφίσει, να εμφανίζεται πίσω από ένα παράθυρο, στο βάθος του οποίου βρίσκεται το σημείο φυγής, δηλαδή το σημείο όπου φαίνεται να συγκλίνουν οι γραμμές. Το σημείο αυτό βρίσκεται στο ύψος του παρατηρητή, δηλαδή πάνω στον ορίζοντα.

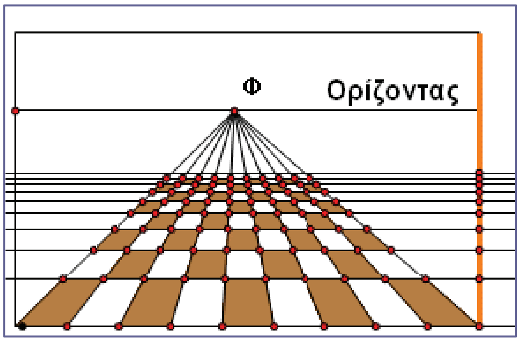
Η κατασκευή του μοντέλου αρχίζει με το σχηματισμό ενός ορθογώνιου παραλληλόγραμμου (παράθυρο) και μιας ευθείας παράλληλης προς τη βάση του που παριστάνει τη γραμμή του ορίζοντα. Επάνω στη γραμμή αυτή τοποθετείται το σημείο φυγής Φ.



Χωρίζουμε τη βάση του πατώματος σε ίσα τμήματα και φέρνουμε τις οπτικές ακτίνες του παρατηρητή.



Φέρνουμε παράλληλες προς τη γραμμή του ορίζοντα από τα σημεία τομής των ακτίνων με την κατακόρυφη πλευρά του παραθύρου.



Ενώνουμε το σημείο φυγής Φ με τα σημεία που χωρίζουν σε ίσα μέρη τη βάση. Τα σημεία τομής των παραλλήλων με τις ευθείες που συγκλίνουν στο Φ δημιουργούν την κάλυψη στο πάτωμα.

ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ ΓΙΑ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ:

1) Μελετήστε το κείμενο όπου περιγράφεται ο τρόπος με τον οποίο ο Alberti προτείνει την κατασκευή ενός προοπτικού δαπέδου.

2) Με τη βοήθεια του μοντέλου κατασκευάστε στο τετράδιό σας ένα προοπτικό δάπεδο.

3) Ανοίξτε το αρχείο Alberti_2 της προσομοίωσης του μοντέλου του Alberti. Μελετήστε την προσομοίωση και προσδιορίστε τα σημαντικά στοιχεία της, δηλαδή το σημείο φυγής, το ύψος του παρατηρητή, την απόσταση του παρατηρητή από τον πίνακα, το μέγεθος του παραθύρου κ.λπ.

4) Μελετήστε τη σχέση των τμημάτων που βρίσκονται στην ίδια παράλληλη ευθεία. Τι παρατηρείτε;

5) Εξετάστε αν το μοντέλο είναι κατάλληλο, δηλαδή αν η διαγώνιος του δαπέδου περνά από όλα τα διαγώνια σημεία του δαπέδου.

6) Μελετήστε τα μήκη των κατακόρυφων τμημάτων β1, β2, β3 κ.λπ. και ελέγξτε αν υπάρχει κάποια σχέση που τα συνδέει. Επίσης εντοπίστε από ποια μεγέθη εξαρτάται το μήκος τους.

7) Με τη βοήθεια του λογισμικού διερεύνησης συναρτήσεων κάντε τη γραφική παράσταση των μετρήσεων των τμημάτων. Τι προτείνετε να περιέχουν οι δύο στήλες χ, ψ του πίνακα τιμών;

8) Μεταβάλετε το ύψος h και επαναλάβετε την κατασκευή της γραφικής παράστασης για τις νέες πλέον μετρήσεις. Τι παρατηρείτε;

9) Κατασκευάστε στην προέκταση του δαπέδου και άλλα ίσα τμήματα. Υπολογίστε τα αντίστοιχα τμήματα β10, β11 κ.λπ. και επαναλάβετε τη γραφική παράσταση. Τι παρατηρείτε;

10) Μελετήστε τον τρόπο με τον οποίο αυξάνεται το μήκος των τμημάτων β1, β2 κ.λπ. με τη βοήθεια της μεθόδου του δυναμικού σημείου. Σε τι διαφέρει και σε τι είναι όμοιο το αποτέλεσμα της μελέτης σας αυτής από τη μελέτη που κάνατε με το λογισμικό διερεύνησης συναρτήσεων;

2.5.3 ΜΕΛΕΤΗ ΕΡΓΩΝ ΤΕΧΝΗΣ

Ονοματεπώνυμο μαθητών: -- **Τάξη:** ------------

-- **Ημερομηνία:** ------------

Φύλλο εργασίας

Υπάρχουν καλλιτέχνες της Αναγέννησης οι οποίοι χρησιμοποίησαν το μοντέλο του Alberti για την κατασκευή του προοπτικού τους δαπέδου. Πώς μπορούμε, με τη βοήθεια του δυναμικού μοντέλου, να εντοπίσουμε το σημείο φυγής, τη σχετική απόσταση του παρατηρητή από τον πίνακα και γενικά τον τρόπο με τον οποίο ο καλλιτέχνης δημιούργησε το χώρο μέσα στον πίνακα;

Εικόνα 2.

ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ ΓΙΑ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ:

1) Επισκεφθείτε επιλεγμένες διευθύνσεις στο διαδίκτυο (Olga’s Gallery και Web Gallery of Art[1]):

Για παράδειγμα, στην http://www.abcgallery.com/E/eyck/eyck.html μπορείτε να εντοπίσετε πίνακες στους οποίους ο καλλιτέχνης έχει χρησιμοποιήσει τις αρχές της προοπτικής με ένα σημείο φυγής. Αν έχετε διάθεση να ερευνήσετε περισσότερους καλλιτέχνες, μπορείτε να επισκεφθείτε τη διεύθυνση: http://www.abcgallery.com/movemind.html#Renaissance και να επιλέξετε ονόματα καλλιτεχνών, όπως ο Raphael. Σχολιάστε τα έργα που έχουν δημιουργηθεί με πρόθεση την προοπτική απεικόνιση, χωρίς όμως κάποιο μοντέλο (http://www.abcgallery.com/I/italy/crivelli2.html). Επισκεφτείτε τη διεύθυνση: http://www.wga.hu/frames-e.html?/html/p/piero/francesc/girolamo.html και αποθηκεύστε την εικόνα.

2) Εισάγετε σε ένα αρχείο word την εικόνα που αποθηκεύσατε και αυξήστε τη φωτεινότητά της. Στη συνέχεια κάντε αντιγραφή της εικόνας αυτής. Ορίστε ένα σημείο Π πάνω στην αριστερή κατακόρυφη πλευρά του «παραθύρου» στο μοντέλο του Albert. Κάντε δεξί κλικ στην οθόνη και επιλέξτε επικόλληση.

3) Προσαρμόστε το προοπτικό δάπεδο του μοντέλου πάνω στην εικόνα. Ερευνήστε τη θέση του σημείου φυγής της εικόνας. Εκτιμήστε το ύψος της γυναίκας που φαίνεται στην εικόνα και στη συνέχεια το βάθος και το ύψος του δωματίου.

4) Απαλείψτε την εικόνα του πίνακα και εισάγετε μία άλλη η οποία δεν διαθέτει σαφές δάπεδο. Βρείτε τα στοιχεία του πίνακα στην περίπτωση αυτή.

[1] Όλες οι διευθύνσεις είναι ενεργές τον 1/2008.

2.5.4 Ο ΠΡΟΟΠΤΙΚΟΣ ΧΩΡΟΣ

Ονοματεπώνυμο μαθητών: -- **Τάξη:** ------------

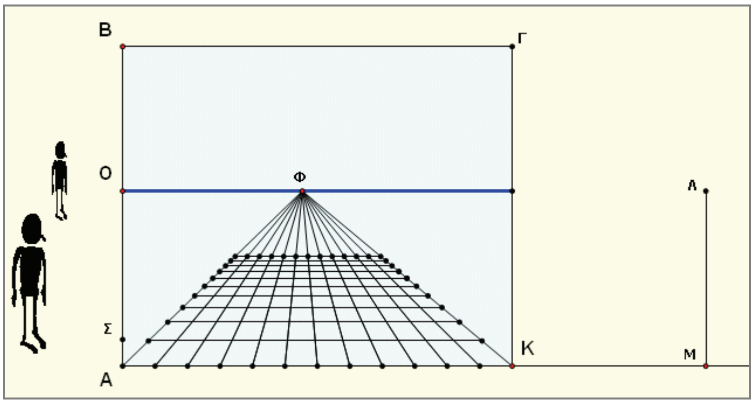
-- **Ημερομηνία:** ------------

Φύλλο εργασίας

Έχετε σκεφτεί πώς μπορούμε να μετρήσουμε το πραγματικό ύψος ενός ανθρώπου, όταν διαθέτουμε μία ολόσωμη φωτογραφία του τραβηγμένη από απόσταση; Για να μπορέσουμε να πραγματοποιήσουμε μία τέτοια μέτρηση, θα πρέπει πρώτα να μελετήσουμε τις ιδιότητες αυτού που ονομάζουμε προοπτικό χώρο, δηλαδή του χώρου των πραγμάτων έτσι όπως τα αντιλαμβανόμαστε και όχι έτσι όπως είναι πραγματικά.

Σε προηγούμενες δραστηριότητες μελετήσαμε ένα μοντέλο με το οποίο μπορούμε να κατασκευάσουμε το προοπτικό επίπεδο. Αυτό που θα προσπαθήσουμε εδώ είναι η κατασκευή του προοπτικού χώρου, δηλαδή το εσωτερικό ενός δωματίου έτσι όπως φαίνεται. Μέσα σε έναν τέτοιο χώρο οι μετρήσεις θα πρέπει να ακολουθούν ορισμένους κανόνες, τους οποίους μπορούμε να εφαρμόσουμε και στην περίπτωση της φωτογραφίας.

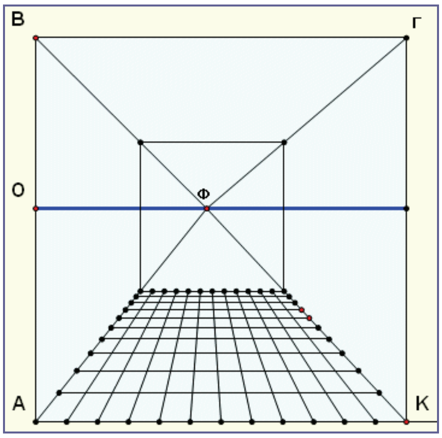
Ανοίξτε το αρχείο Alberti_3. Στην οθόνη εμφανίζεται: το «παράθυρο» ΑΒΓΚ, το προοπτικό δάπεδο, η γραμμή του ορίζοντα με το σημείο φυγής Φ, το ύψος του παρατηρητή ΜΛ και τέλος δύο άτομα που περιμένουν την κατασκευή του δωματίου, για να τοποθετηθούν μέσα σε αυτό. Τα άτομα αυτά καλό θα είναι να μετακινούνται από τα σημεία που βρίσκονται στο επάνω αριστερό τους μέρος.



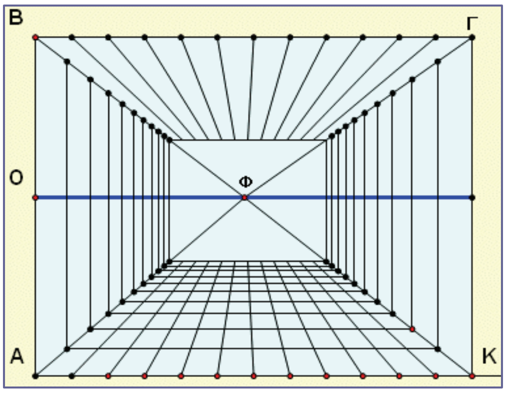
Από εδώ αρχίζει η σταδιακή κατασκευή του προοπτικού δωματίου.

ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ ΓΙΑ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ:

1) Κατασκευάστε τα τμήματα που είναι απαραίτητα για τη δημιουργία του τοίχου που βρίσκεται στο βάθος του δωματίου.

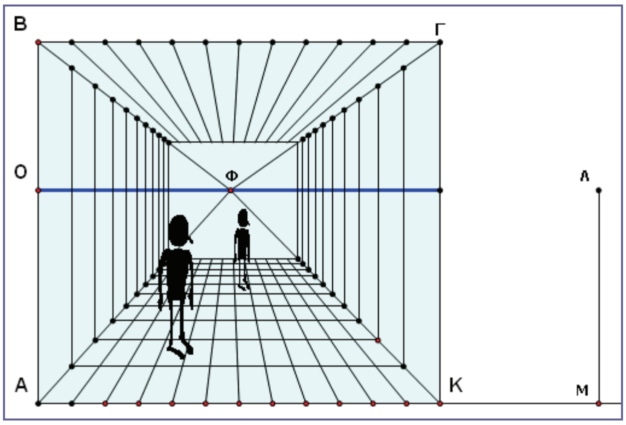


2) Φέρτε τις κατάλληλες παράλληλες ευθείες, ώστε να δημιουργηθεί το παρακάτω σχήμα.



Όπως θα παρατηρήσετε, έχει κατασκευαστεί ένα προοπτικό δωμάτιο το οποίο είναι δυναμικό, αφού μεταβάλλεται καθώς μεταβάλλουμε την απόσταση του παρατηρητή από το «παράθυρο» ή τη γραμμή του ορίζοντα. Ας τοποθετήσουμε τώρα τους δύο ανθρώπους μέσα στο δωμάτιο αυτό.

3) Ας υποθέσουμε ότι τα ύψη των δύο ανθρώπων είναι ίσα. Ποια είναι η σωστή θέση του ανθρώπου που βρίσκεται στο βάθος του δωματίου;



4) Αν υποθέσουμε ότι το ύψος των ανθρώπων είναι 1,80 μ., πόσο θα είναι το ύψος του δωματίου;

5) Μετακινήστε το σημείο Μ, δηλαδή τον παρατηρητή. Είναι απαραίτητη η διόρθωση της θέσης των δύο ανθρώπων;

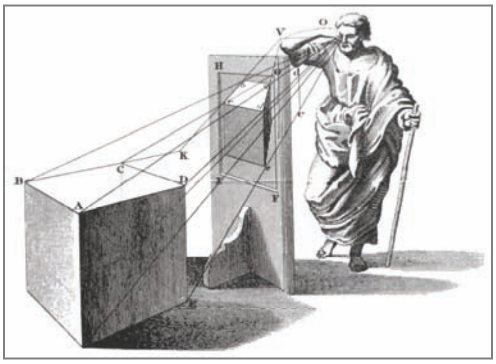
6) Μεταβάλετε το ύψος της γραμμής του ορίζοντα. Πώς πρέπει να αλλάξει η θέση των δύο ανθρώπων;

ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΕΣ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ ΓΙΑ ΤΟ ΛΥΚΕΙΟ

3.1 Θεματική ενότητα: Μετρήσεις μέσω ακτίνων (οπτικών – φωτός)

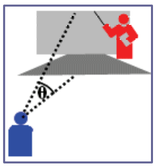
Η οπτική μας γωνία

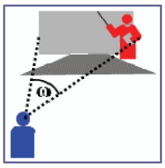
Η οπτική μας αντίληψη, δηλαδή ο τρόπος με τον οποίο αντιλαμβανόμαστε τα σώματα στο φυσικό περιβάλλον, μπορεί να μελετηθεί μέσω μιας συγκεκριμένης γωνίας η οποία ονομάζεται οπτική γωνία του παρατηρητή. Η μελέτη της οπτικής μας αντίληψης με τη βοήθεια γωνιών έλκει την καταγωγή της από τους αρχαίους Έλληνες.



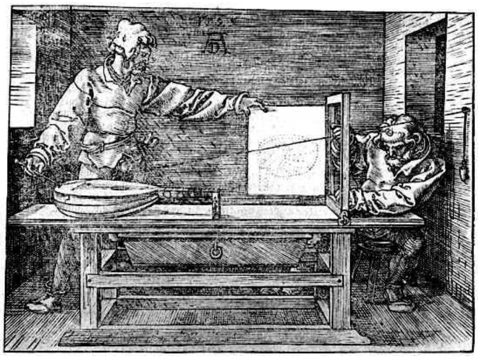
Η εικόνα προέρχεται από την «Εισαγωγή στην ιστορία και τη θεωρία της προοπτικής» του καθηγητή Έλμερ Άσλακσεν στο Πανεπιστήμιο του Ντάρτμουθ και τον 5/2008 η διεύθυνσή της είναι: *http://www.math.nus.edu.sg/aslaksen/projects/perspective/*

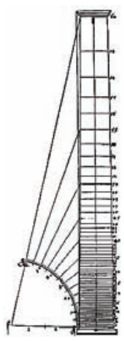
Δύο από τις χαρακτηριστικές οπτικές μας γωνίες, κατά την παρατήρηση ενός αντικειμένου που βρίσκεται σε απόσταση, είναι η θ και η ω, εκ των οποίων η μία καλύπτει το αντικείμενο καθ' ύψος και η άλλη κατά πλάτος.





Είναι χαρακτηριστικό ότι κατά την Αναγέννηση οι ζωγράφοι, πολλοί από τους οποίους ήταν συγχρόνως και σπουδαίοι μαθηματικοί, προσπαθώντας να απεικονίσουν με πειστικό τρόπο το φυσικό περιβάλλον και τα αντικείμενά του μελετούσαν τρόπους να σταθεροποιήσουν τη γωνία όρασης των αντικειμένων που ζωγράφιζαν. Ένας από αυτούς, ο Albrecht Durer, είχε κάνει συστηματικές μετρήσεις και είχε επινοήσει κατασκευές με τις οποίες παρατηρούσε από συγκεκριμένη, αμετάβλητη γωνία τα αντικείμενα που ζωγράφιζε.





Οι εικόνες προέρχονται από την ηλεκτρονική παρουσίαση του 11ου κεφαλαίου του βιβλίου «Τετραγωνίζοντας τον κύκλο: Η Γεωμετρία στην Τέχνη και την Αρχιτεκτονική» του Πολ Κάλτερ, από το Πανεπιστήμιο του Ντάρτμουθ και τον 5/2008 η διεύθυνσή της είναι: http://www.dartmouth.edu/~matc/math5.geometry/unit11/unit11.html#top

Όπως είναι φανερό, ο ζωγράφος είχε μελετήσει τη σχέση γωνίας και ύψους, προκειμένου να κατανοήσει καλύτερα τις οπτικές παραμορφώσεις που υφίστανται τα αντικείμενα που βρίσκονται σε μεγάλα ύψη. Κατά τον πρώιμο αλλά και κατά τον ύστερο Μεσαίωνα, κυρίως δε κατά τη διάρκεια της Αναγέννησης, χρησιμοποιήθηκαν απλά εργαλεία μέτρησης ενός απομακρυσμένου αντικειμένου τα οποία αξιοποίησαν τις οπτικές μας ακτίνες και την οπτική γωνία. Ωστόσο, η πρώτη συστηματική προσπάθεια μέτρησης με απλό εργαλείο βρίσκεται καταγεγραμμένη στα *Οπτικά* του Ευκλείδη, το δε εργαλείο είναι ένας απλός καθρέπτης. Οι δραστηριότητες που ακολουθούν, δύο για κάθε τάξη, μελετούν τα μαθηματικά που σχετίζονται με την οπτική μας γωνία και με την προσπάθεια να τη χρησιμοποιήσουμε σε συγκεκριμένα, πραγματικά προβλήματα.

3.2 Δραστηριότητες για την Α' Λυκείου

3.2.1 Δραστηριότητα: ΕΡΓΑΛΕΙΑ ΜΕΤΡΗΣΕΩΝ

Ονοματεπώνυμο μαθητών: -- **Τάξη:** ------------
-- **Ημερομηνία:** ------------

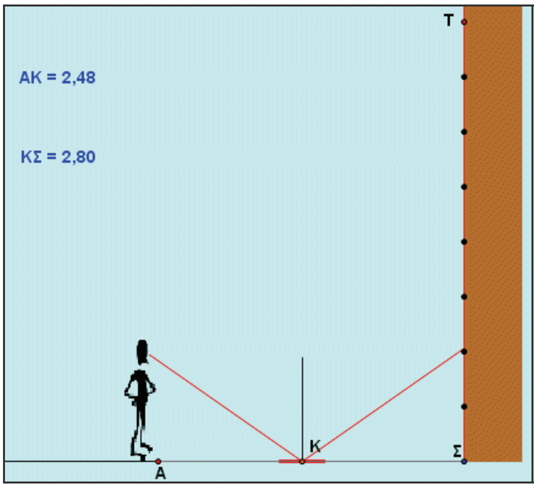
Φύλλο εργασίας 1

Βρισκόσαστε μπροστά σε ένα κτήριο και στο έδαφος υπάρχει ένα μικρός καθρέφτης.

Προχωράτε μπρος πίσω, μέχρι να δείτε την κορυφή του κτηρίου στον καθρέφτη. Μπορείτε να υπολογίσετε το ύψος του κτηρίου;

Με τη δραστηριότητα αυτή θα διαπιστώσετε ότι δεν πρόκειται για μια ιδιαίτερα δύσκολη διαδικασία, αρκεί βέβαια να είναι γνωστές μερικές αποστάσεις, όπως η απόσταση του καθρέφτη από το κτήριο και η απόστασή μας από τον καθρέφτη.

Ανοίξτε το αρχείο katoptro metrisis_1 του λογισμικού. Στην οθόνη προβάλλονται:



α) Ένας άνθρωπος που κοιτάζει στον καθρέφτη που βρίσκεται στο έδαφος. Ας υποθέσουμε ότι η οπτική του ακτίνα ξεκινά από τα μάτια του, ανακλάται στον καθρέφτη και καταλήγει σε κάποιο ύψος του κτηρίου. (Στη φύση η πορεία της φωτεινής ακτίνας είναι βέβαια αντίστροφη.)

β) Αν θέλουμε να μετακινήσουμε τον άνθρωπο, θα πρέπει σύρουμε το σημείο Α. Η οπτική ακτίνα ακολουθεί το βασικό νόμο της ανάκλασης, δηλαδή η γωνία πρόσπτωσης είναι ίση με τη γωνία ανάκλασης. Η απόσταση ΑΚ του ανθρώπου από το κάτοπτρο Κ εμφανίζεται στην οθόνη.

γ) Αν θέλουμε να μετακινήσουμε το κάτοπτρο, θα πρέπει να σύρουμε το σημείο Κ.

δ) Η προσομοίωση της πρόσοψης ΣΤ του κτηρίου έχει μεταβλητό ύψος, το οποίο μπορούμε να μεταβάλλουμε σύροντας το σημείο Τ. Επιπλέον, είναι χωρισμένη σε ίσα τμήματα. Σύρετε τα σημεία Α και Τ, για να διαπιστώσετε πώς αλλάζουν τα μήκη των τμημάτων.

ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ ΓΙΑ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ:

1) Τοποθετήστε τον άνθρωπο σε μια μικρή απόσταση από το κάτοπτρο, π.χ. 1 μονάδα (αν στη θέση αυτή ο άνθρωπος δεν βλέπει το κτήριο στον καθρέφτη, τότε μετακινήστε και τον καθρέφτη). Αν διπλασιάσουμε την απόσταση του ανθρώπου από το κάτοπτρο, πώς θα μεταβληθεί το ύψος στο οποίο βλέπει ο άνθρωπος;

2) Τοποθετήστε τον άνθρωπο σε αρκετή απόσταση από τον καθρέφτη. Αν τον σύρετε στη μισή απόσταση, πώς θα μεταβληθεί το ύψος στο οποίο βλέπει ο άνθρωπος;

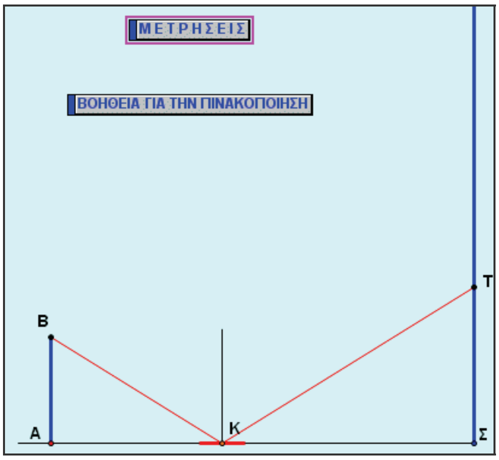
3) Επαναλάβετε τις παραπάνω ενέργειες, τριπλασιάζοντας την απόσταση ή μειώνοντάς τη στο 1/3 της αρχικής. Υπάρχει κάποιος κανόνας με τον οποίο φαίνεται να μεταβάλλονται τα δύο ποσά;

Φύλλο εργασίας 2

Στην προηγούμενη δραστηριότητα προέκυψαν κάποια συμπεράσματα για τον τρόπο που συνδέεται η απόσταση του ανθρώπου από τον καθρέφτη,καθώς και για το ύψος του κτηρίου στο οποίο βλέπει ο άνθρωπος. Τα συμπεράσματα όμως αυτά θα πρέπει να τα ελέγξουμε με μαθηματικά εργαλεία, όπως είναι ο πίνακας τιμών και η γραφική παράσταση.

Ανοίξτε το αρχείο katoptro metrisis_2 του λογισμικού. Στην οθόνη προβάλλονται:

Ένα τμήμα ΑΒ που μπορεί να μετακινείται από το σημείο Α.
Η οπτική ακτίνα ΒΚ που είναι ουσιαστικά η ανάκλαση της ακτίνας ΤΚ πάνω στο κάτοπτρο Κ, το οποίο μπορεί να μετακινηθεί από το σημείο Κ.
Τα κουμπί «Μετρήσεις», από όπου εμφανίζονται μετρήσεις διαφόρων μεγεθών.
Επίσης, εμφανίζονται διάφορα κουμπιά βοήθειας για την κατασκευή συνάρτησης, για τη μέτρηση γωνιών και για την κατασκευή πινάκων από ζεύγη μετρήσεων.



ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ ΓΙΑ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ:

1) Τοποθετήστε τον καθρέφτη σε μια σταθερή θέση, π.χ. σε απόσταση 3 μονάδων από το κτήριο, και μετακινήστε το τμήμα ΑΒ. Κατασκευάστε έναν πίνακα, που να περιλαμβάνει αρκετές τιμές, τοποθετώντας στην πρώτη στήλη του τις μετρήσεις για το ΑΚ και στη δεύτερη τις μετρήσεις για το ύψος ΣΤ στο οποίο φτάνει η οπτική ακτίνα.

2) Με βάση τη διάταξη των σημείων στους άξονες, επαληθεύεται ή απορρίπτεται ο κανόνας στον οποίο καταλήξατε στο πρώτο μέρος της δραστηριότητας; Τι σχέση έχουν τα δύο ποσά μεταξύ τους;

3) Πώς μπορούμε από τον πίνακα τιμών να εντοπίσουμε αυτή τη σχέση;

4) Μετρήστε τις γωνίες των δύο τριγώνων ΑΒΚ και ΣΤΚ. Τι παρατηρείτε; Ποια είναι η σχέση των δύο τριγώνων;

5) Πώς δικαιολογούμε, μέσω της σχέσης των δύο τριγώνων, τα συμπεράσματα για τα μήκη των τμημάτων ΑΚ και ΣΤ;

6) Με ποιον τρόπο μπορούμε πλέον να μετράμε, με έναν καθρέφτη, το ύψος ενός κτηρίου, όταν γνωρίζουμε τις αποστάσεις που είναι απαραίτητες για τη συγκεκριμένη μέτρηση;

3.2.2 Δραστηριότητα: ΚΑΤΟΠΤΡΑ

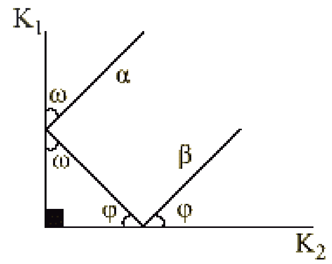
Ονοματεπώνυμο μαθητών: -- **Τάξη:** ------------

-- **Ημερομηνία:** ------------

Φύλλο εργασίας 1

Ας υποθέσουμε ότι πρόκειται να λύσουμε την παρακάτω άσκηση του βιβλίου.

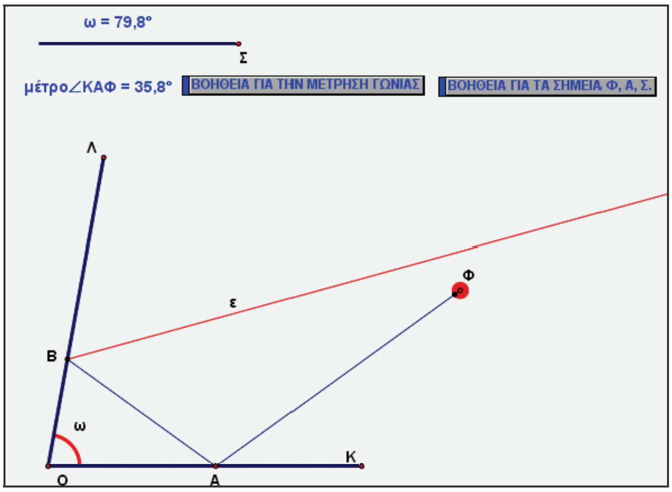
7. Δύο επίπεδα κάτοπτρα K_1, K_2 είναι κάθετα. Φωτεινή ακτίνα α προσπίπτει αρχικά στο K_1 και μετά την ανάκλαση στο K_2, εξέρχεται κατά την ακτίνα β. Τι πορεία θα ακολουθήσει, σε σχέση με την αρχική ακτίνα α;



Απόσπασμα από το σχολικό βιβλίο της Γεωμετρίας της Α΄ και Β΄ Λυκείου σ. 88.

Το ερώτημα που τίθεται είναι το εξής: Όταν τα κάτοπτρα δεν είναι κάθετα τι μπορεί να συμβαίνει;

Ανοίξτε το αρχείο katoptra του λογισμικού. Στην οθόνη προβάλλονται:



Μία προσομοίωση των κατόπτρων ΟΚ και ΟΛ.
Μία προσομοίωση της διαδρομής της φωτεινής ακτίνας από την πηγή Φ μέχρι και την τελικά ανακλώμενη ακτίνα ε.
Ένας μεταβολέας με άκρο το σημείο Σ, με το οποίο μπορούμε να μεταβάλλουμε τη γωνία ω των δύο κατόπτρων.
Το μέτρο της γωνίας ΚΑΦ, δηλαδή της γωνίας πρόσπτωσης της αρχικής ακτίνας.
Δύο κουμπιά βοήθειας που αναφέρονται στον τρόπο με τον οποίο μπορούμε να μετράμε γωνίες και στη χρήση συγκεκριμένων σημείων της προσομοίωσης.

ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ ΓΙΑ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ:

1) Μεταβάλετε μόνο την τιμή της γωνίας ω από το σημείο Σ, ώστε τα δύο κάτοπτρα να γίνουν κάθετα. Διερευνήστε την κατεύθυνση της τελικής ανακλώμενης ακτίνας ε. Ποια φαίνεται να είναι η θέση της ε ως προς την αρχική ακτίνα ΦΑ;

2) Διατηρήστε τη γωνία ω ορθή και μεταβάλετε μόνο τη θέση της φωτεινής πηγής Φ. Ποια φαίνεται να είναι η θέση της ε ως προς την αρχική ακτίνα ΦΑ;

3) Μετρήστε τις κατάλληλες γωνίες, ώστε να επιβεβαιώσετε ή να απορρίψετε τα συμπεράσματά σας από τις δύο προηγούμενες ασκήσεις.

4) Αποδείξτε με αυστηρά μαθηματικό τρόπο τα τελικά σας συμπεράσματα.

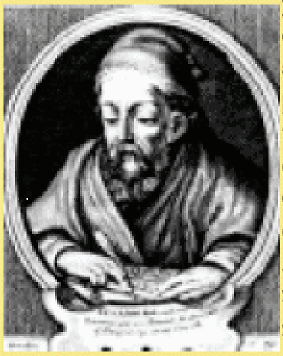
Φύλλο εργασίας 2

Ο Ευκλείδης έχει διατυπώσει μία σειρά προτάσεων - αιτημάτων, εκ των οποίων εκείνο που έχει προκαλέσει τις περισσότερες συζητήσεις είναι το πέμπτο. Ας δούμε πώς περιγράφεται το αίτημα αυτό στα ιστορικά σημειώματα που περιλαμβάνονται στο σχολικό εγχειρίδιο, στο κεφάλαιο των παραλλήλων.

Αυτό ακριβώς το πέμπτο αίτημα θα αποτελέσει ένα μαθηματικό εργαλείο-κριτήριο με το οποίο μπορούμε να διερευνήσουμε τη σχετική θέση δύο ευθειών στην οθόνη του υπολογιστή.

Η θεωρία των παραλλήλων

Το αίτημα του Ευκλείδη. Στο Βιβλίο Ι των «Στοιχείων» του ο Ευκλείδης



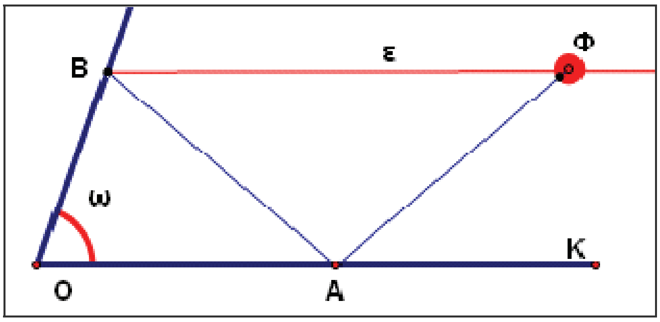
ορίζει ως παράλληλες «τις ευθείες εκείνες που βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο και προεκτεινόμενες επ' άπειρον και από τα δύο μέρη δε συναντώνται σε κανένα απ' αυτά» (Ορισμός 23). Αμέσως μετά διατυπώνει πέντε αιτήματα, τα τέσσερα πρώτα από τα οποία εκφράζουν τις βασικές ιδιότητες των γεωμετρικών κατασκευών με τη βοήθεια του κανόνα και του διαβήτη, ενώ το πέμπτο αποφαίνεται ότι:

«Εάν μια ευθεία που τέμνει δύο ευθείες σχηματίζει τις εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες μικρότερες από δύο ορθές, τότε οι δύο ευθείες προεκτεινόμενες επ' άπειρον συναντώνται στο μέρος που οι σχηματιζόμενες γωνίες είναι μικρότερες από δύο ορθές» (Αίτημα V).

ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ ΓΙΑ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ:

1) Μεταβάλετε τη γωνία ω από το σημείο Σ, ώστε να είναι οξεία. Ποια είναι η σχετική θέση της ε ως προς την αρχική ακτίνα ΦΑ; Πώς μπορούμε να δικαιολογήσουμε τη σχετική θέση των δύο ευθειών με τη βοήθεια του πέμπτου αιτήματος του Ευκλείδη;

2) Σύρετε το σημείο Σ, ώστε η γωνία ω να πάρει ακέραια τιμή, π.χ. 70°. Μετακινήστε τη φωτεινή πηγή Φ, ώστε η τελική ακτίνα ε να γίνει παράλληλη προς το οριζόντιο κάτοπτρο. Ποιες γωνίες θα πρέπει να μετρήσουμε, ώστε να βεβαιωθούμε μέσω των μετρήσεων ότι πράγματι οι δύο ευθείες (ε και ΟΚ) είναι παράλληλες;



3) Υπολογίστε με αυστηρά μαθηματικό τρόπο τη γωνία πρόσπτωσης ΚΑΦ, όταν ω=70°, ώστε η ε να είναι παράλληλη προς το οριζόντιο κάτοπτρο.

4) Μεταβάλετε τη γωνία ω, ώστε να γίνει αμβλεία. Ποια είναι η σχετική θέση της ε ως προς την αρχική ακτίνα ΦΑ; Πώς μπορούμε να δικαιολογήσουμε τη σχετική θέση των δύο ευθειών με τη βοήθεια του πέμπτου αιτήματος του Ευκλείδη;

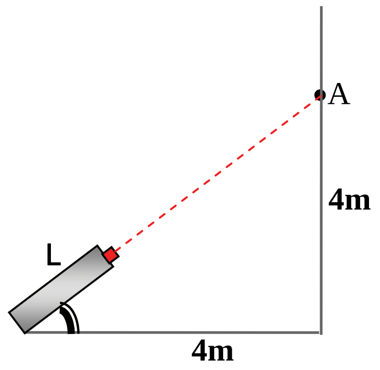
3.3 Δραστηριότητες για τη Β' Λυκείου

3.3.1 Δραστηριότητα: Ο ΠΡΟΒΟΛΕΑΣ

Ονοματεπώνυμο μαθητών: -- **Τάξη:** ------------
-- **Ημερομηνία:** ------------

Φύλλο εργασίας

Στο παρακάτω σχήμα ο προβολέας L φωτίζει το σημείο A πάνω σε έναν τοίχο. Για να φωτίσει σε ένα σημείο που βρίσκεται σε διπλάσιο ύψος, θα πρέπει:



A) Να διπλασιαστεί η γωνία.

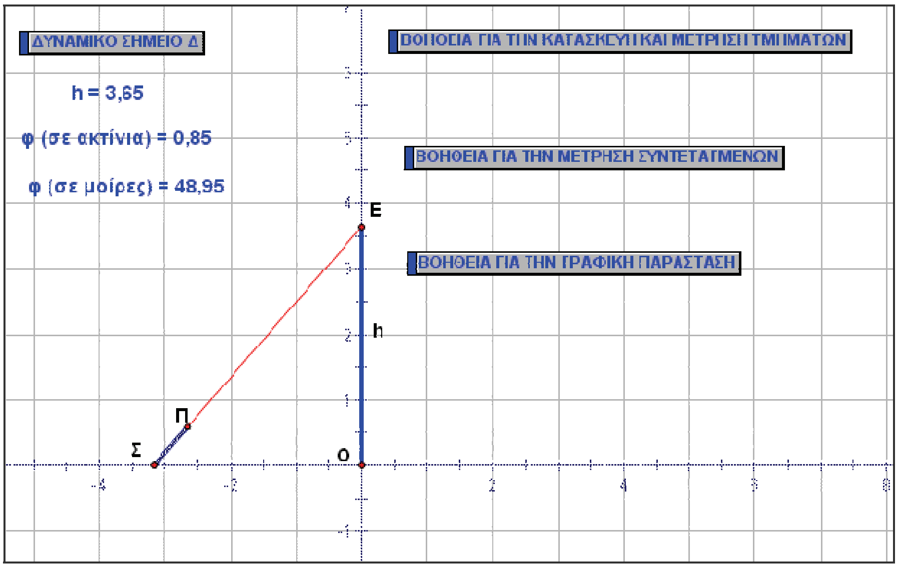
B) Να πλησιάσει ο προβολέας προς τον τοίχο.

Γ) Να αυξηθεί η γωνία κατά 18°.

Δ) Να αυξηθεί η γωνία κατά 40°.

Επιχειρώντας να απαντήσουμε στο ερώτημα αυτό, θα διαπιστώσουμε ότι δεν είναι και το ευκολότερο, αν δεν διαθέτουμε κάποια ιδιαίτερα εργαλεία, έστω και έναν υπολογιστή τσέπης. Στην παρακάτω δραστηριότητα θα διερευνήσουμε σε βάθος την κατάσταση προβλήματος που σχετίζεται με τον προβολέα, με τη βοήθεια μιας προσομοίωσής του.

Ανοίξτε το αρχείο proboleas του λογισμικού. Στην οθόνη προβάλλονται:



α) Μία προσομοίωση του προβολέα ΣΠ, ο οποίος εστιάζει σε ένα ύψος ΟΕ=h. Ο προβολέας μπορεί και μετακινείται μπρος πίσω από το σημείο Σ και να περιστρέφεται γύρω από το σημείο Π.
β) Οι μετρήσεις του ύψους h (χωρίς μονάδες μέτρησης) και της γωνίας φ του προβολέα με τον οριζόντιο άξονα.
γ) Το κουμπί «Δυναμικό σημείο Δ», με το οποίο εμφανίζεται ένα σημείο Δ που οι συντεταγμένες του μεταβάλλονται, καθώς περιστρέφεται ο προβολέας.
δ) Τα κουμπιά βοήθειας τα οποία μπορείτε να χρησιμοποιείτε, καθώς προσπαθείτε να απαντήσετε στις ερωτήσεις του φύλλου εργασίας.

ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ ΓΙΑ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ:

1) Ελέγξτε με τη βοήθεια της προσομοίωσης και των μετρήσεων αν τα ποσά «γωνία φ» και «ύψος h» είναι ανάλογα ή όχι.

2) Διερευνήστε ποια από τις απαντήσεις του αρχικού ερωτήματος είναι η σωστή.

3) Υπολογίστε στο τετράδιό σας το ύψος h με βάση τη γωνία φ και την απόσταση ΟΣ του προβολέα.

4) Με βάση την προηγούμενη άσκηση, πώς μπορούμε να μετρήσουμε το ύψος ενός κτηρίου, χρησιμοποιώντας έναν προβολέα όπως εκείνον που εμφανίζεται στην προσομοίωση;

5) Υποθέστε ότι ο προβολέας μπορεί να περιστρέφεται και προς τα κάτω, δηλαδή ότι το h είναι πλέον βάθος και όχι ύψος. Εστιάστε σε βάθος 4 μονάδων. Με ποιον τρόπο το λογισμικό συμβολίζει το βάθος και την προς τα κάτω περιστροφή του προβολέα;

Φύλλο εργασίας 2

Τώρα πλέον είναι ευκαιρία να δούμε ποια είναι η γραφική παράσταση της σχέσης που συνδέει τη γωνία φ με το ύψος h.

ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ ΓΙΑ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ:

1) Εμφανίστε το σημείο Δ και μετρήστε τις συντεταγμένες του. Περιστρέψτε τον προβολέα και συγκρίνετε τις συντεταγμένες του Δ με τις μετρήσεις που προβάλλονται στην οθόνη. Τι παρατηρείτε;

2) Εμφανίστε το ίχνος του σημείου Δ και περιστρέψτε τον προβολέα. Ποια είναι η μορφή της καμπύλης που δημιουργείται; Ποια είναι η συνάρτηση της οποίας η γραφική παράσταση είναι η καμπύλη που εμφανίστηκε;

3) Σύρετε το σημείο Σ, έως ότου η απόστασή του από το Ο γίνει 1. Επαναλάβετε την κατασκευή της γραφικής παράστασης. Ποια σχέση παριστάνεται τώρα με τη συγκεκριμένη καμπύλη;

4) Κατασκευάστε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης που αντιστοιχεί στη σχέση που βρήκατε με τη βοήθεια του λογισμικού. Τι σχέση έχει η καμπύλη που κατασκεύασε το ίχνος του Δ με τη γραφική παράσταση που κατασκεύασε το λογισμικό;

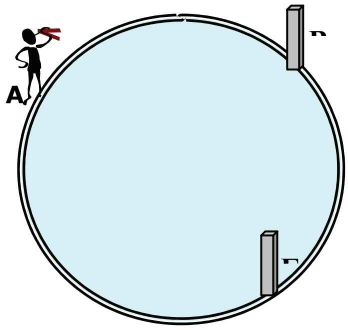
5) Είναι η συνάρτηση περιοδική; Ποια είναι η περίοδος; Είναι άρτια ή περιττή συνάρτηση;

6) Μεταφέρετε το σημείο Σ σε απόσταση 2 μονάδων από το Ο και κατασκευάστε την καμπύλη του ίχνους του Δ. Ποιας συνάρτησης η γραφική παράσταση εμφανίζεται στην οθόνη;

3.3.2 Δραστηριότητα: Η ΠΙΣΙΝΑ

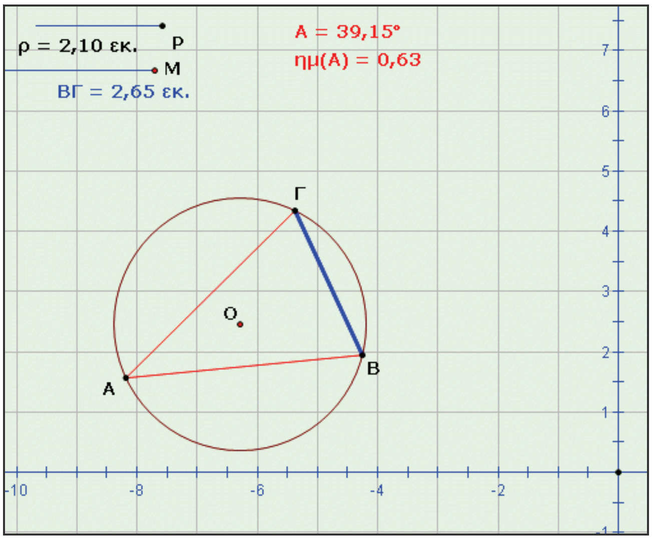
Ονοματεπώνυμο μαθητών: .... **Τάξη:** ....
.... **Ημερομηνία:** ....

Φύλλο εργασίας



Ο άνθρωπος στην παραπάνω εικόνα θέλει να υπολογίσει την ακτίνα της πισίνας, στην οποία όμως δεν έχει πρόσβαση, αφού είναι γεμάτη νερό. Διαθέτει ένα γωνιόμετρο, ένα όργανο δηλαδή με το οποίο μπορεί να μετρήσει τη γωνία ΒΑΓ, ενώ γνωρίζει ήδη την απόσταση ΒΓ των δύο πασάλων που βρίσκονται στα σημεία Β και Γ της περιφέρειας της πισίνας. Ας προσπαθήσουμε να λύσουμε το πρόβλημα αυτό μέσα από μια προσομοίωσή του.

Ανοίξτε το αρχείο Metrisi pisinas του λογισμικού. Στην οθόνη προβάλλονται:



Ένας κύκλος κέντρου Ο, στον οποί έχει εγγραφεί ένα τρίγωνο ΑΒΓ. Η κορυφή Α μπορεί να κινείται πάνω στον κύκλο με σύρσιμο.
Δύο μεταβολείς με άκρα Ρ και Μ, με τους οποίους μπορούμε να μεταβάλλουμε την ακτίνα ρ του κύκλου και το μήκος της πλευράς ΒΓ, αντίστοιχα.
Οι μετρήσεις της ακτίνας ρ και της πλευράς (χορδής) ΒΓ.
Η μέτρηση της γωνίας Α του τριγώνου, καθώς και το ημίτονο της γωνίας.
Ένα κουμπί βοήθειας με το οποίο εμφανίζονται υποδείξεις για την κατασκευή ενός δυναμικού σημείου με συγκεκριμένες συντεταγμένες.
Ένα δεύτερο κουμπί βοήθειας, το οποίο θα σας χρησιμεύσει όταν κληθείτε να κάνετε κάποια απόδειξη.

ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ ΓΙΑ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ:

1) Σύρετε το σημείο Ρ και στη συνέχεια το σημείο Μ. Σημειώστε τα ποσά που μεταβάλλονται κάθε φορά.

2) Στόχος μας είναι να εντοπίσουμε τις σχέσεις μεταξύ των ποσών αυτών. Παρατηρήστε και καταγράψτε αρκετές μετρήσεις των ποσών που μεταβάλλονται, μόλις σύρετε το σημείο Ρ. Φαίνεται από τις μετρήσεις να ισχύει κάποια σχέση;

3) Παρατηρήστε και καταγράψτε αρκετές μετρήσεις των ποσών που μεταβάλλονται, μόλις σύρετε το σημείο Μ. Φαίνεται από τις μετρήσεις να ισχύει κάποια σχέση;

4) Κατασκευάστε ένα δυναμικό σημείο με συντεταγμένες (ημ(Α), ρ) και εμφανίστε το ίχνος του. Μεταβάλετε την ακτίνα ρ. Διαπραγματευτείτε την καμπύλη που φαίνεται να διαγράφει το δυναμικό σημείο. Ποια σχέση θα μπορούσε να συνδέει τα δύο ποσά;

5) Με τη βοήθεια των μετρήσεων επιβεβαιώστε ή απορρίψτε την απάντησή σας στο προηγούμενο ερώτημα.

6) Κατασκευάστε ένα δυναμικό σημείο με συντεταγμένες (ημ(Α), ΒΓ) και εμφανίστε το ίχνος του. Μεταβάλετε την πλευρά ΒΓ. Διαπραγματευτείτε την καμπύλη που φαίνεται να διαγράφει το δυναμικό σημείο. Ποια σχέση θα μπορούσε να συνδέει τα δύο ποσά;

7) Με τη βοήθεια των μετρήσεων επιβεβαιώστε ή απορρίψτε την απάντησή σας στο προηγούμενο ερώτημα.

8) Διατυπώστε μία πρόταση με την οποία θα εκφράζετε τον τρόπο που συνδέονται τα ποσά ΒΓ, Ρ, ημ(Α).

9) Ας υποθέσουμε τώρα ότι θέλετε να περιγράψετε στον άνθρωπο του αρχικού προβλήματος μία διαδικασία με την οποία θα καταφέρει να μετρήσει την ακτίνα της πισίνας. Τι θα τον συμβουλεύατε να κάνει, χρησιμοποιώντας και το γωνιόμετρο;

10) Ωστόσο, μία πρόταση, η οποία στηρίζεται μόνο σε μετρήσεις και γραφικές παραστάσεις, κινδυνεύει να θεωρηθεί μη έγκυρη από αυστηρά μαθηματική άποψη. Κάντε μία γενική απόδειξη της πρότασης, χρησιμοποιώντας την αντίστοιχη βοήθεια από την οθόνη.

3.4 Δραστηριότητες για τη Γ' Λυκείου

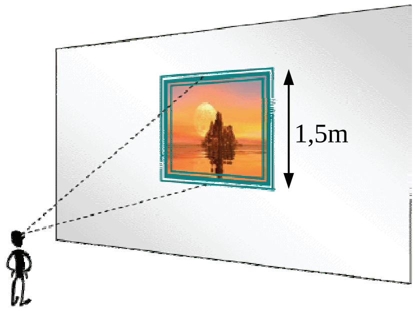
3.4.1 Δραστηριότητα: Η ΒΕΛΤΙΣΤΗ ΟΠΤΙΚΗ ΓΩΝΙΑ

Ονοματεπώνυμο μαθητών: -- **Τάξη:** ------------

-- **Ημερομηνία:** ------------

Φύλλο εργασίας

Ας υποθέσουμε ότι ο επισκέπτης μιας έκθεσης ζωγραφικής έχει ύψος α=1,70 μ. και θέλει να απολαύσει τον αγαπημένο του πίνακα που βρίσκεται σε μία από τις αίθουσες της έκθεσης. Το ύψος του πίνακα είναι υ=1,50 μ. και το πάνω μέρος του πίνακα απέχει από το πάτωμα h=3,5 μ. Το πρόβλημα που τίθεται είναι το εξής: Σε πόση απόσταση από τον πίνακα θα πρέπει να σταθεί, ώστε να έχει τη μέγιστη, άρα και τη βέλτιστη, οπτική γωνία;



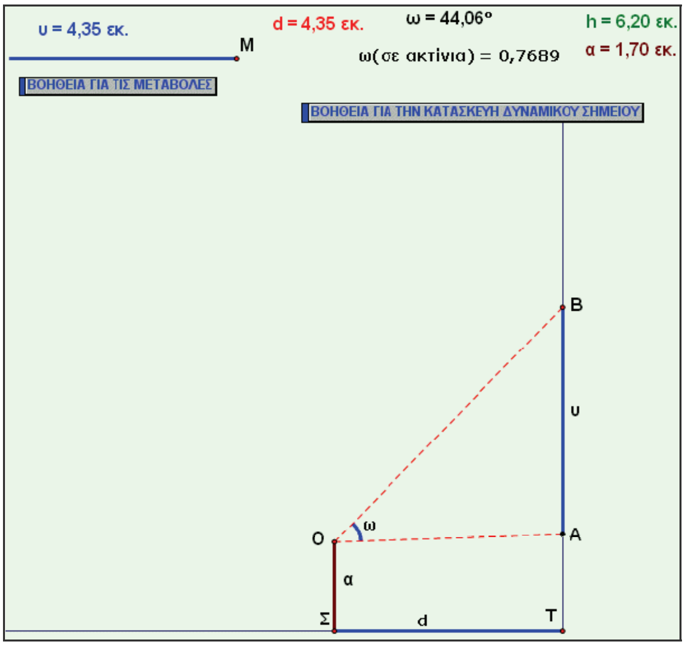
ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ ΓΙΑ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ:

1) Κατασκευάστε ένα γεωμετρικό μοντέλο της πραγματικής κατάστασης.

2) Κατασκευάστε μία σχέση που να συνδέει την απόσταση d του επισκέπτη από τον τοίχο με την τριγωνομετρική εφαπτομένη της οπτικής του γωνίας ω.

3) Μελετήστε τον τύπο (μοντέλο) που έχει προκύψει και μέσω αυτού εκτιμήστε την απόσταση στην οποία θα πρέπει να σταθεί ο επισκέπτης, για να έχει τη μέγιστη οπτική γωνία. Χρησιμοποιήστε αποκλειστικά μαθηματικές μεθόδους για τον εντοπισμό μεγίστων ελαχίστων. Με ποιον τρόπο αυξάνεται ή ελαττώνεται η οπτική μας γωνία σε σχέση την απόσταση d;

4) Ανοίξτε το αρχείο model_1. Εντοπίστε τα μεγέθη που μεταβάλλονται και μελετήστε τον τρόπο με τον οποίο η μεταβολή καθενός από τα μεγέθη αυτά επηρεάζει τη μέγιστη τιμής της γωνίας. Χρησιμοποιήστε τις μετρήσεις που προβάλλονται στην οθόνη.



5) Κατασκευάστε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης (μοντέλου) που δημιουργήσατε στη δεύτερη άσκηση. Ποιες ιδιότητες της συνάρτησης μπορούμε να αναγνωρίσουμε από τη γραφική παράσταση;

6) Βρείτε (κατά προσέγγιση) τη μέγιστη τιμή της συνάρτησης με βάση τη γραφική της παράσταση. Σε ποια απόσταση εμφανίζεται η μέγιστη τιμή; Συγκρίνετε το αποτέλεσμα αυτό με την απάντηση που δώσατε στην τρίτη άσκηση.

7) Ποιες μεταβολές υφίσταται η γραφική παράσταση, όταν μεταβάλλουμε το υ;

8) Ποιες μεταβολές υφίσταται η γραφική παράσταση, όταν μεταβάλλουμε το h;

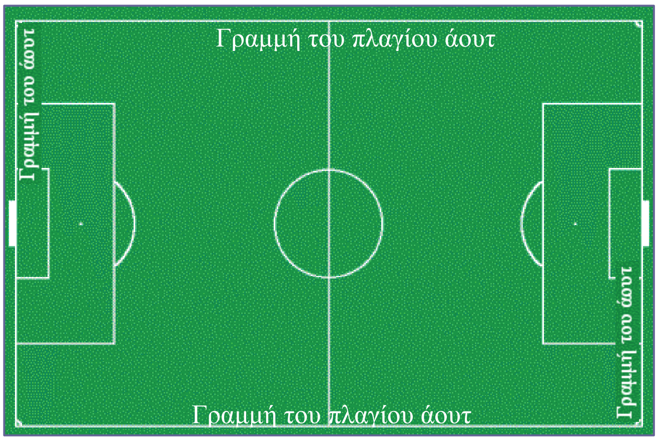
3.4.2 Δραστηριότητα: Η ΒΕΛΤΙΣΤΗ ΘΕΣΗ ΣΤΟ ΠΟΔΟΣΦΑΙΡΟ

Πληροφορίες για τον αγωνιστικό χώρο.
Το ποδόσφαιρο είναι ένα ομαδικό άθλημα που παίζεται σε ένα γήπεδο σχήματος ορθογωνίου παραλληλογράμμου με επίπεδη επιφάνεια. Κατά κανόνα είναι καλυμμένο με χόρτο.

- Το ελάχιστο μήκος του είναι 90 μ. και το μέγιστο 120 μ.
- Το ελάχιστο πλάτος του 45 μ. και το μέγιστο 90 μ.
- Για διεθνείς αγώνες ποδοσφαίρου, το ελάχιστο μήκος είναι 100 μ. και το μέγιστο 110 μ., ενώ το ελάχιστο πλάτος 64 μ. και το μέγιστο 79 μ.
- Γενικά οι διαστάσεις του αγωνιστικού χώρου δεν επιτρέπεται να είναι μικρότερες των 45x90 μ., ούτε και μεγαλύτερες από 90x120 μ.

Το στάδιο Καραϊσκάκη έχει αγωνιστικό χώρο με διαστάσεις 80x120 μ.

Το Ολυμπιακό Στάδιο διαθέτει γήπεδο ποδοσφαίρου με διαστάσεις 68x105 μ.



Ο αγωνιστικός χώρος

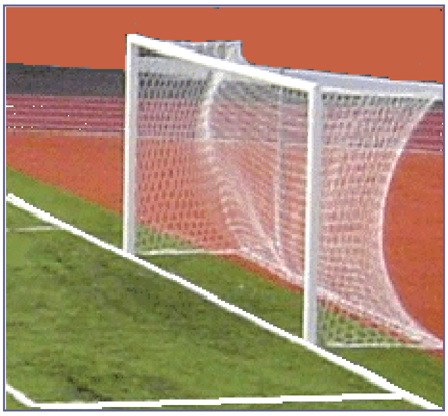
Ο αγωνιστικός χώρος ορίζεται από άσπρες γραμμές, από τις οποίες οι δύο μεγαλύτερες γραμμές, δηλαδή οι μεγάλες πλευρές του ορθογωνίου, είναι οι γραμμές του πλάγιου άουτ.

Μπροστά από κάθε τέρμα είναι χαραγμένη η περιοχή τέρματος ή μικρή περιοχή. Πρόκειται για ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, 18,50x5,50 μ., που η μία πλευρά του είναι η γραμμή του τέρματος, το οποίο με τη σειρά του βρίσκεται στο μέσο της γραμμής αυτής. Πιο μπροστά ακόμα είναι χαραγμένη η μεγάλη ή επανορθωτική περιοχή, επίσης ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο 40,30 x 16,50 μ., που κι αυτό έχει μια πλευρά του στη γραμμή του τέρματος, το οποίο βρίσκεται στο μέσο αυτής της πλευράς. Το σχέδιο του γηπέδου συμπληρώνουν τέσσερις μικροί κύκλοι, που βρίσκονται χαραγμένοι στις τέσσερις γωνίες του και προορίζονται για το χτύπημα των κόρνερ, και δύο μικροί λευκοί δίσκοι του πέναλτυ, σε απόσταση 11 μ. από το τέρμα και ακριβώς απέναντι από το μέσο του. Στα τέσσερα σημεία του κόρνερ είναι τοποθετημένα κίτρινα σημαιάκια σε λευκούς πασσάλους.

Οι δύο μικρότερες πλευρές του ορθογωνίου, πάνω στις οποίες βρίσκονται τα τέρματα, είναι οι γραμμές του άουτ.

Ο αγωνιστικός χώρος χωρίζεται κατά πλάτος σε δύο ίσα μέρη με μια διαχωριστική γραμμή, τη γραμμή του κέντρου, στο μέσο της οποίας είναι χαραγμένος ένας άσπρος κύκλος με ακτίνα 9,15 μ., ο οποίος λέγεται «κέντρο του γηπέδου».

Οι εστίες (τέρματα)
Στο μέσο των δύο γραμμών του άουτ είναι τοποθετημένα τα τέρματα που σχηματίζονται από δύο κάθετα δοκάρια τα οποία απέχουν μεταξύ τους 7,32 μ. και ενώνονται με ένα άλλο οριζόντιο δοκάρι σε ύψος 2,44 μ. από το έδαφος. Τα δοκάρια αυτά είναι βαμμένα άσπρα. Πίσω από κάθε τέρμα είναι τοποθετημένο ένα δίχτυ που διατηρείται τεντωμένο με δύο υποστηρίγματα.



Η εστία (τέρμα)

Μία εστία που είναι κατασκευασμένη σύμφωνα με τις προδιαγραφές της Διεθνούς Ομοσπονδίας Ποδοσφαίρου διαθέτει τις παρακάτω προδιαγραφές:

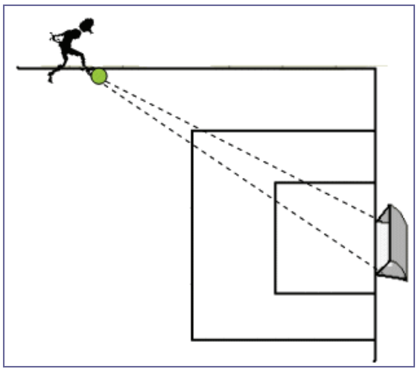
- Αποτελείται από τρεις δοκούς (δύο κάθετες και μία οριζόντια) είναι από ενισχυμένο σωλήνα 4 ιντσών (πάχος τοιχωμάτων 3,5 χιλ.).
- Το άνοιγμα της εστίας, εσωτερικά, είναι 7.320 χιλ. Το ύψος είναι 3.050 χιλ., ώστε μετά την πάκτωση να έχουμε καθαρό ύψος 2.440 χιλ.
- Η εστία αντιστηρίζεται με δύο ενισχυμένους σωλήνες 1 ¼ ιντσών ο καθένας. Το κάθε αντιστήριγμα σχηματίζει Γ με γωνία 60^{o}.
- Η επάνω πλευρά κάθε αντιστηρίγματος έχει μήκος 1.300 χιλ., προσαρμόζεται σε ειδική υποδοχή που βρίσκεται στη συμβολή των δοκών με γωνία 16^{o}.

Ονοματεπώνυμο μαθητών: -- **Τάξη:** ------------

-- **Ημερομηνία:** ------------

Φύλλο εργασίας

Ο ποδοσφαιριστής που φαίνεται στην εικόνα θέλει να γνωρίζει ποια είναι η ιδανική θέση, καθώς κατευθύνεται προς το αντίπαλο τέρμα, ώστε να διαθέτει τη μέγιστη δυνατή γωνία για να εκτελέσει σουτ. Προφανώς θα πρέπει να υποθέσετε ότι η μπάλα θα έχει ευθύγραμμη και όχι καμπυλόγραμμη πορεία.



ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ ΓΙΑ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ:

1) Κατασκευάστε ένα γεωμετρικό μοντέλο της πραγματικής κατάστασης. Φροντίσετε ώστε το μοντέλο να είναι όσο το δυνατόν πιο ρεαλιστικό. Χρησιμοποιήστε τις πληροφορίες που υπάρχουν για τις πραγματικές διαστάσεις του **αγωνιστικού χώρου**.

2) Κατασκευάστε μία σχέση που να συνδέει την απόσταση του παίκτη από τη γωνία του αγωνιστικού χώρου (corner) με τη γωνία υπό την οποία βλέπει ο παίκτης το τέρμα.

3) Μελετήστε τη σχέση (μοντέλο) που έχει προκύψει και μέσω αυτής εκτιμήστε την απόσταση από την οποία θα πρέπει ο παίκτης να εκτελέσει σουτ, για να έχει τη μέγιστη οπτική γωνία.

4) Σχεδιάστε και κατασκευάστε ένα δυναμικό εικονικό μοντέλο της κατάστασης με τη βοήθεια του λογισμικού.

5) Μελετήστε τη γραφική παράσταση της σχέσης που συνδέει την απόσταση του παίκτη από τη γωνία του αγωνιστικού χώρου (corner) με τη γωνία υπό την οποία βλέπει ο παίκτης το τέρμα.

3.5 Project Λυκείου

Θεματική ενότητα: Μαθηματικά μοντέλα της οπτικής μας αντίληψης

Έχετε σκεφτεί ποτέ ότι τα αντικείμενα που βρίσκονται στο φυσικό περιβάλλον μας είναι γνωστά μόνο μέσω των αισθήσεών μας;

Οι αισθήσεις μας είναι οι είσοδοι των πληροφοριών που προέρχονται από τον εξωτερικό κόσμο, οι οποίες πληροφορίες αποτελούν και την αφετηρία της αντίληψης που έχουμε για τον κόσμο. Συχνά, όμως, οι αισθήσεις παραμορφώνουν τα αντικείμενα και το περιβάλλον τους και τότε μιλάμε για ψευδαισθήσεις. Ας δούμε μερικά παραδείγματα.

Όταν βρισκόμαστε μπροστά σε ένα διάδρομο, τότε έχουμε την εντύπωση ότι στο βάθος οι διάφορες γραμμές συγκλίνουν, το πάτωμα ανασηκώνεται, ενώ η οροφή χαμηλώνει.

Η εικόνα προέρχεται από το δικτυακό τόπο του άλμπουμ φωτογραφιών flickr και τον 1/2008 η διεύθυνσή της είναι: http://www.flickr.com/photos/olivander/64237803/

Το δωμάτιο φαίνεται σαν μια κόλουρη πυραμίδα και επομένως μπορούμε να μιλάμε για τον προοπτικό χώρο του δωματίου, γνωρίζοντας ότι ο πραγματικός χώρος είναι ένα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο. Αυτός ακριβώς ο προοπτικός χώρος είναι ο χώρος της οπτικής μας αντίληψης, έτσι όπως μας τον παρουσιάζει η όρασή μας.

Το θέμα που τίθεται τώρα είναι το εξής: Άραγε υπάρχουν κανόνες και νόμοι οι οποίοι διέπουν τον προοπτικό χώρο; Δηλαδή μπορούμε να οργανώσουμε με μαθηματικό τρόπο την οπτική μας αντίληψη;

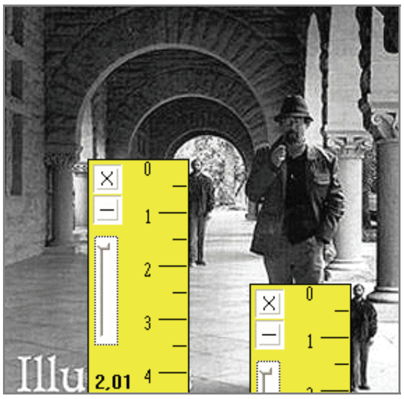
Η απάντηση στο ερώτημα αυτό έχει ενδιαφέρον, γιατί αν στον προοπτικό χώρο τοποθετήσουμε τα αντικείμενα τυχαία, χωρίς δηλαδή κάποια αρχή, τότε προκύπτουν καταστάσεις όπως η επόμενη.

Η εικόνα βρίσκεται στο δικτυακό τόπο με τις οπτικές ψευδαισθήσεις (optical illusions), στην ενότητα «ψευδαισθήσεις απόστασης» και η διεύθυνσή της τον 5/2008 είναι: http://www.amazing-optical-illusions.com/index2new.htm

Στην εικόνα παρουσιάζονται τρεις άνθρωποι που βαδίζουν σε ένα διάδρομο. Ο άνθρωπος Α, που βρίσκεται στο βάθος, φαίνεται να έχει μικρότερο μέγεθος από τον Β που βρίσκεται σε πρώτο πλάνο, όμως ακόμη μικρότερο μέγεθος φαίνεται να έχει ο άνθρωπος Γ.

Ας μετρήσουμε τώρα τα ύψη των ανθρώπων πάνω στην οθόνη.

Η μέτρηση επαναφέρει την τάξη στα αντικείμενα και τα τοποθετεί στη σωστή τους διάταξη.



Τώρα πλέον γνωρίζουμε ότι οι δύο εικόνες των ανθρώπων Α και Γ έχουν το ίδιο μέγεθος και επομένως η σχέση Α>Γ είναι μία ψευδαίσθηση, αφού Α=Γ. Αυτή ακριβώς η διάσταση έχει προκύψει από την παραβίαση κάποιων κανόνων, δηλαδή των νόμων που διέπουν τον προοπτικό μας χώρο.

Από πότε όμως άρχισε ο άνθρωπος να μελετά συστηματικά, δηλαδή επιστημονικά, την οπτική του αντίληψη; Η πρώτη επιστημονική προσέγγιση των οπτικών φαινομένων, από μαθηματική άποψη, έγινε από τον Ευκλείδη, τον 4ο αιώνα π.Χ., μέσα από τις προτάσεις που διατύπωσε και απέδειξε στα *Οπτικά* του. Στη μελέτη αυτή ο Ευκλείδης συγκεντρώνει και καταγράφει όλες τις μέχρι τότε εμπειρικές γνώσεις γύρω από την οπτική αντίληψη και επιχειρεί μία γεωμετρική ερμηνεία των οπτικών φαινομένων.

Το βασικό μαθηματικό εργαλείο που χρησιμοποιεί ο Ευκλείδης για να εκφράσει τα φαινόμενα μεγέθη είναι η γωνία του παρατηρητή ή η **οπτική γωνία**, όπως θα την αποκαλούμε στη συνέχεια.

Η οπτική μας αντίληψη είναι το αντικείμενο μελέτης των δραστηριοτήτων του συγκεκριμένου σεναρίου. Στόχος μας είναι να μετατρέψουμε τα φαινόμενα σε νοούμενα, δηλαδή να τα κατανοήσουμε όσο το δυνατόν καλύτερα. Αυτό ακούγεται αρκετά φιλόδοξο, αλλά διαθέτουμε δύο σημαντικά εργαλεία που θα μας επιτρέψουν να μελετήσουμε και να κατανοήσουμε καλύτερα τον τρόπο που φαίνονται τα αντικείμενα. Τα εργαλεία αυτά είναι τα μαθηματικά και ο υπολογιστής.

Αυτό που θα πρέπει να κρατήσουμε είναι ότι το φυσικό μας περιβάλλον μπορεί να γίνει περισσότερο κατανοητό μέσα από τα μαθηματικά μοντέλα που κατασκευάζουμε. Τα μοντέλα αυτά αναπτύσσονται, γίνονται όλο και περισσότερο πολύπλοκα και με τη βοήθεια της τεχνολογίας μπορούμε πλέον να κατασκευάζουμε φυσικές προσομοιώσεις, διαμορφώνοντας το δικό μας εικονικό κόσμο.

Η συνάρτηση f(x)=τόξοεφx ή f(x)=arctanx

Πολλές φορές είναι αναγκαίο να λύνουμε εξισώσεις της μορφής εφx=α, όπου ο αριθμός α δεν είναι άμεσα μετατρέψιμος σε εφαπτομένη ενός τόξου. Για παράδειγμα, η εξίσωση εφx=3 (ε) δεν είναι δυνατόν να λυθεί χωρίς τη βοήθεια κατάλληλων εργαλείων, όπως ο πίνακας τιμών ή ο υπολογιστής τσέπης.

Αν διαθέταμε μία συνάρτηση, η οποία σε κάθε τιμή της εφαπτομένης ενός τόξου x να αντιστοιχεί σε μία τιμή του τόξου x, τότε, προφανώς, θα μπορούσαμε να λύσουμε σύντομα και εύκολα οποιαδήποτε εξίσωση σαν την (ε) μέσω της γραφικής παράστασης της συνάρτησης. Πράγματι, η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τη λύση μιας εξίσωσης, αρκεί να διαθέτουμε τα εργαλεία που κατασκευάζουν τη γραφική παράσταση. Επιπλέον, τα εργαλεία αυτά θα πρέπει να μας επιτρέπουν να ψάχνουμε για ζεύγη τιμών πάνω στη γραφική παράσταση.

Υπάρχει μία συνάρτηση και ένα εργαλείο που μας επιτρέπουν να κάνουμε όλα όσα είναι αναγκαία, για να λύσουμε την εξίσωση (ε) με γραφική παράσταση. Η συνάρτηση λέγεται τόξο εφαπτομένης x και σε συντομογραφία τοξοεφx, ενώ τη συναντάμε και ως arctanx. Το εργαλείο που μας δίνει τη δυνατότητα να λύσουμε μία πολύπλοκη εξίσωση με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης είναι το λογισμικό *Function Probe*, με το οποίο μπορούμε σε κάθε σημείο της γραφικής του παράστασης να εντοπίζουμε τις συντεταγμένες αυτόματα.

Η συνάρτηση αυτή, όμως, δεν είναι χρήσιμη μόνο για να λύνουμε εξισώσεις, αλλά και για έναν άλλο εξίσου σημαντικό λόγο. Μας δίνει τη δυνατότητα να μελετάμε την οπτική μας αντίληψη, δηλαδή τη γωνία με την οποία φαίνεται ένα αντικείμενο από έναν παρατηρητή.

3.5.1 Η ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ f(x)=arctan(x)

Ονοματεπώνυμο μαθητών: .... **Τάξη:** ....
.... **Ημερομηνία:** ....

Φύλλο εργασίας

Όταν η τιμή της γωνίας x, που ανήκει στο διάστημα $(-\frac{\pi}{2}\ ,\ \frac{\pi}{2})$, είναι γνωστή, τότε μπορούμε να υπολογίσουμε την τιμή της εφαπτομένης της γωνίας και τη συνάρτηση με την οποία πραγματοποιείται αυτή η αντιστοιχία. Με άλλα λόγια, ο υπολογισμός είναι η f(x)=tanx (f(x)=εφx).
Σε πολλά προβλήματα, όμως, είναι γνωστή η τιμή της εφαπτομένης της γωνίας x και ζητείται η τιμή της γωνίας x. Αυτό ακριβώς το πρόβλημα θα μελετήσουμε με τη βοήθεια του λογισμικού *Function Probe*.

ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ ΓΙΑ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ:

1) Κατασκευάστε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης y=tanx στο διάστημα $(-\frac{\pi}{2}\ ,\ \frac{\pi}{2})$.

Βοήθεια 1

2) Δημιουργήστε μία ακολουθία αρκετών σημείων (20-30) από τη γραφική παράσταση. Ορίστε αντίθετες τιμές για την αρχική και την τελική τιμή. Αποστείλετε τα σημεία στον πίνακα. Τι σχέση έχουν οι τιμές της εφαπτομένης για τις αντίθετες τιμές της γωνίας x; Πώς εξηγείται η σχέση αυτή;

Βοήθεια 2

3) Ορίστε τις τιμές της εφαπτομένης στον πίνακα ως στήλη του x και τις τιμές της γωνίας ως στήλη του y. Αποστείλετε τα σημεία στο γράφημα, ενώστε τα και μελετήστε τη διάταξή τους. Ποια συνάρτηση θα μπορούσε να οριστεί με τη γραφική παράσταση, πάνω στην οποία φαίνεται να ανήκουν τα σημεία;

Βοήθεια 3

4) Κατασκευάστε τη συμμετρική της γραφικής παράστασης της εφαπτομένης, δηλαδή της y=tanx, ως προς την ευθεία y=x. Τι παρατηρείτε; Μπορείτε να εξηγήσετε αυτό που παρατηρήσατε;

Βοήθεια 4

5) Κατασκευάστε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης y=arctanx. Τι παρατηρείτε; Ποια σχέση συνδέει τις δύο συναρτήσεις; Ποια είναι η πρακτική χρήση της συγκεκριμένης συνάρτησης, δηλαδή τι μας επιτρέπει να υπολογίσουμε;

Βοήθεια 5

6) Μελετήστε τη συμπεριφορά της γραφικής παράστασης της y=arctanx για μεγάλες τιμές του x. Τι παρατηρείτε; Τι τιμές μπορεί να πάρει η συνάρτηση;

Βοήθεια 6

7) Ανοίξτε το αρχείο arctan του λογισμικού. Μελετήστε το γεωμετρικό μοντέλο και εντοπίστε τα μεγέθη που μπορούν να μεταβληθούν. Μελετήστε τον τρόπο κατασκευής του σημείου Μ. Ποιες είναι οι συντεταγμένες του σημείου;

Βοήθεια 7

8) Κατασκευάστε το ίχνος του σημείου Μ και μεταβάλετε το μήκος του τμήματος d. Ποια συνάρτηση θα μπορούσε να έχει γραφική παράσταση την καμπύλη που γράφει το ίχνος του Μ;

Βοήθεια 8

9) Με τη βοήθεια του λογισμικού κατασκευάστε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης, προκειμένου να επιβεβαιώσετε ή να απορρίψετε τη σχέση που κατασκευάσατε στην προηγούμενη ερώτηση.

Βοήθεια 9

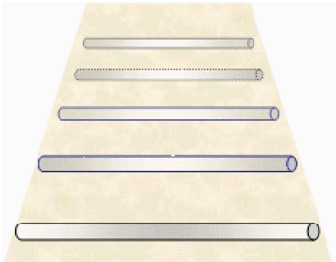
3.5.2 ΜΕΛΕΤΗ ΦΩΤΟΓΡΑΦΙΑΣ

Ονοματεπώνυμο μαθητών: -- **Τάξη:** ----------

-- **Ημερομηνία:** ----------

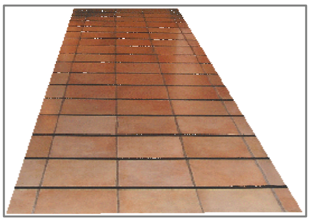
Φύλλο εργασίας

Φωτογραφήστε έναν πλακόστρωτο διάδρομο στο σχολείο σας ή σε έναν άλλο κατάλληλο χώρο. Αν δεν έχετε πρόσβαση σε πλακόστρωτο διάδρομο, τοποθετήστε σε ίσες αποστάσεις μερικές λεπτές ράβδους πάνω στο διάδρομο ή σε όποιο χώρο πρόκειται να φωτογραφήσετε.



Η φωτογράφηση να γίνει από διαφορετικά ύψη και διαφορετικές αποστάσεις. Το πρόβλημα που θα μελετήσουμε είναι το εξής: Με ποιον τρόπο επηρεάζεται η εικόνα της φωτογραφίας κάθε φορά που αλλάζουμε ύψος ή απόσταση;

Παρατηρήστε τις παρακάτω εικόνες του ίδιου δαπέδου.



ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ ΓΙΑ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ:

1) Συγκρίνετε τις φωτογραφίες ενός δαπέδου οι οποίες έχουν ληφθεί από διαφορετικά ύψη. Πού οφείλονται κατά τη γνώμη σας οι διαφορές στις δύο εικόνες του πατώματος; Πώς μπορούμε να εξηγήσουμε με μαθηματικό τρόπο τις διαφορές των δύο εικόνων;

Βοήθεια 1

2) Κάντε ένα γεωμετρικό σχήμα στο οποίο να παριστάνονται τα διάφορα μεγέθη που καθορίζουν τη μορφή της εικόνας.

Βοήθεια 2

3) Ποια μεγέθη, ενώ είναι ίσα στην πραγματικότητα, φαίνονται άνισα. Πώς μεταβάλλονται οι αποστάσεις μεταξύ των γραμμών του δαπέδου και τα μεγέθη τους σε σχέση με την απόστασή τους από τον παρατηρητή;

Βοήθεια 3

4) Δώστε μία μαθηματική ερμηνεία του φαινομένου που παρατηρείτε.

Βοήθεια 4

3.5.3 ΤΑ ΟΠΤΙΚΑ ΤΟΥ ΕΥΚΛΕΙΔΗ

Ονοματεπώνυμο μαθητών: .... **Τάξη:** ....
.... **Ημερομηνία:** ....

Φύλλο εργασίας

Στο έργο του *Οπτικά* ο Ευκλείδης περιγράφει με τη βοήθεια της γεωμετρίας την οπτική μας αντίληψη και επιχειρεί να εξηγήσει τον τρόπο με τον οποίο φαίνονται τα αντικείμενα. Στην αρχή μας παραθέτει μερικές βασικές έννοιες, τις οποίες και ονομάζει **όρους** και είναι χρήσιμες στη δραστηριότητα που ακολουθεί. Στη συνέχεια παραθέτει μία σειρά προτάσεων, από τις οποίες θα μας απασχολήσουν δύο, η **πρόταση 4** και η **πρόταση 6**.

Όροι

1. Ὑποκείσθω τὰς ἀπὸ τοῦ ὄμματος ἐξαγομένας εὐθείας γραμμὰς φέρεσθαι διάστημα μεγεθῶν μεγάλων.

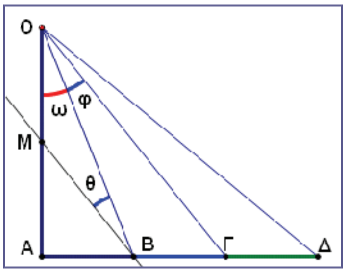
2. καὶ τὸ [μὲν] ὑπὸ τῶν ὄψεων περιεχόμενων σχῆμα εἶναι κῶνον τὴν κορυφὴν μὲν ἔχοντα ἐν τῷ ὄμματι τὴν δὲ βάσιν πρὸς τοῖς πέρασι τῶν ὁρωμένων.

4. καὶ τὰ μὲν ὑπὸ μείζονος γωνίας ὁρώμενα μείζονα φαίνεσθαι, τὰ δὲ ὑπὸ ἐλάττονος ἐλάττονα, ἴσα δὲ τὰ ὑπὸ ἴσων γωνιῶν ὁρώμενα.

5. καὶ τὰ μὲν ὑπὸ μετεωροτέρων ἀκτίνων ὁρώμενα μετεωρότερα φαίνεσθαι, τὰ δὲ ὑπὸ ταπεινοτέρων ταπεινότερα.

Πρόταση 4

Τῶν ἴσων διαστημάτων καὶ ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας ὄντων τὰ ἐκ πλείονος διαστήματος ὁρώμενα ἐλάττονα φαίνεται.

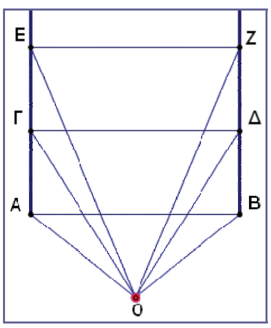


Εδώ ο Ευκλείδης προτείνει την εξής απόδειξη:

- Φέρνει τη ΒΜ παράλληλη προς την ΟΓ.
- Το τμήμα ΒΜ περνά από το μέσον Μ του ΟΑ, άρα το τμήμα ΟΜ είναι ίσο με το μισό του ΟΑ.
- Οι δύο γωνίες φ και θ είναι ίσες ως εντός εναλλάξ. ΟΑ<ΟΓ, αφού η ΟΓ είναι πλάγια, ενώ η ΟΑ είναι κατακόρυφη.
- Στο τρίγωνο ΜΒΟ το ΟΜ<ΜΒ, αφού τα τμήματα αυτά είναι τα μισά άνισων τμημάτων και επομένως θ<ω. Τελικά φ<ω.

Πρόταση 6

Τὰ παράλληλα τῶν διαστημάτων ἐξ ἀποστήματος ὁρώμενα ἀνισοπλατῆ φαίνεται.



Εδώ ο Ευκλείδης αναφέρει ότι πράγματι τα μεγέθη (τμήματα) φαίνονται μικρότερα, αφού οι γωνίες, με τις οποίες ο οφθαλμός μας Ο τα παρατηρεί, συνεχώς μικραίνουν.

ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ ΓΙΑ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ:

1) Κάντε μία νοηματική απόδοση των «όρων» στην καθομιλουμένη γλώσσα.

Βοήθεια 1

2) Εκτιμήστε αν οι όροι είναι συμβατοί με τις παρατηρήσεις σας στη δραστηριότητα με τις φωτογραφίες. Δηλαδή, κατά πόσον οι όροι αυτοί περιγράφουν την οπτική μας αντίληψη.

Βοήθεια 2

3) Κάντε μία νοηματική απόδοση της πρότασης 4 στην καθομιλουμένη.

Βοήθεια 3

4) Μελετήστε την απόδειξη της πρότασης 4 και καταγράψτε τις προτάσεις της γεωμετρίας που χρησιμοποιεί ο Ευκλείδης για την απόδειξή της.

Βοήθεια 4

5) Κάντε μία νοηματική απόδοση της πρότασης 6 στην καθομιλουμένη.

Βοήθεια 5

6) Συμπληρώστε την απόδειξη της πρότασης 6, αιτιολογώντας με καθαρά γεωμετρικό τρόπο τη σχέση των γωνιών. Χρησιμοποιήστε φράσεις που αναφέρει και ο Ευκλείδης στην πρόταση 4.

Βοήθεια 6

7) Ποια είναι η σημασία των προτάσεων 4 και 6 για την περιγραφή και ερμηνεία της οπτικής μας αντίληψης;

Βοήθεια 7

3.5.4 Η ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

Ονοματεπώνυμο μαθητών: -- **Τάξη:** ------------
-- **Ημερομηνία:** ------------

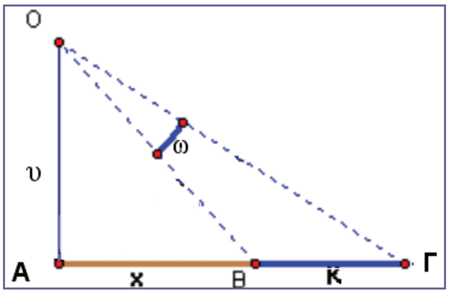
Φύλλο εργασίας

Ο Ευκλείδης χρησιμοποίησε τις γεωμετρικές γνώσεις της εποχής του για να δικαιολογήσει την οπτική μας αντίληψη. Έτσι, απέδειξε ότι σε ένα δάπεδο που έχει καλυφθεί με ίσα πλακάκια, εκείνα που είναι απομακρυσμένα φαίνονται μικρότερα και ότι οι παράλληλες ευθείες συγκλίνουν στο βάθος του οπτικού μας πεδίου.

Στη δραστηριότητα που ακολουθεί θα επιχειρήσουμε να απαντήσουμε στο εξής ερώτημα: Με ποιον τρόπο μπορούμε να εκφράσουμε την ελάττωση των μεγεθών, καθώς αυτά απομακρύνονται από τον παρατηρητή; Δηλαδή ποια σχέση συνδέει το φαινόμενο μέγεθος (γωνία) ενός αντικειμένου με την απόστασή του από εμάς;

Στο παρακάτω σχήμα παρουσιάζεται:
α) Το ύψος ΟΑ=υ του παρατηρητή
β) Το τμήμα κ που βρίσκεται σε απόσταση χ από τον παρατηρητή
γ) Το φαινόμενο μέγεθος του τμήματος κ, δηλαδή η γωνία ω

Στόχος είναι να βρούμε μία σχέση που να συνδέει έναν τριγωνομετρικό αριθμό της γωνίας ω με τα μεγέθη υ, χ και κ.



ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ ΓΙΑ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ:

1) Συνδέστε σε μία σχέση τη γωνία ω με τα τμήματα υ, χ, κ, εφαρμόζοντας τους τύπους της τριγωνομετρίας που έχετε διδαχτεί.

Βοήθεια 1

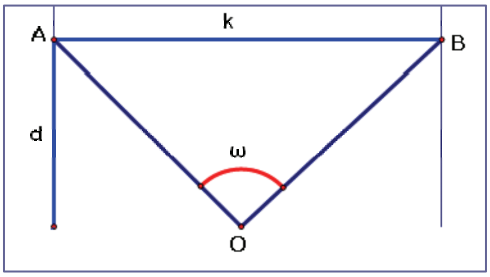
2) Κατασκευάστε μία σχέση που να συνδέει τα παραπάνω μεγέθη.

Βοήθεια 2

3) Ερμηνεύστε, με βάση τη σχέση που έχετε κατασκευάσει, το φαινόμενο της σμίκρυνσης του πλακακίου καθώς απομακρύνεται.

Βοήθεια 3

Ας έρθουμε τώρα στις συγκλίνουσες παραλλήλους. Στο διπλανό σχήμα παρουσιάζεται:
α) Ένα τμήμα d που παριστάνει την απόσταση του παρατηρητή από το τμήμα που παρατηρεί
β) Το τμήμα κ το οποίο παρατηρεί ο παρατηρητής που βρίσκεται στο σημείο Ο
γ) Το φαινόμενο μέγεθος του τμήματος κ, δηλαδή η γωνία ω



Στόχος είναι να βρούμε μία σχέση που να συνδέει έναν τριγωνομετρικό αριθμό της γωνίας ω με τα μεγέθη d και κ.

4) Συνδέστε σε μία σχέση τη γωνία ω με τα τμήματα d και κ, εφαρμόζοντας τους τύπους της τριγωνομετρίας που έχετε διδαχτεί.

Βοήθεια 4

5) Κατασκευάστε μία σχέση που να συνδέει τα παραπάνω μεγέθη. Σε πρώτη φάση υποθέστε ότι ο παρατηρητής βρίσκεται πάνω στη μεσοκάθετη του τμήματος κ.

Βοήθεια 5

6) Εξετάστε την περίπτωση κατά την οποία ο παρατηρητής βρίσκεται έξω από τη μεσοκάθετη του τμήματος.

Βοήθεια 6

7) Ερμηνεύστε, με βάση τη σχέση που έχετε κατασκευάσει, το φαινόμενο της σύγκλισης των δύο παραλλήλων.

Βοήθεια 7

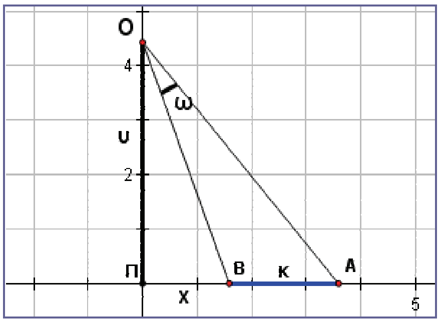
3.5.5 ΔΥΝΑΜΙΚΑ ΜΟΝΤΕΛΑ

Ονοματεπώνυμο μαθητών: --- **Τάξη:** ------------

--- **Ημερομηνία:** ------------

Φύλλο εργασίας 1

Μέχρι τώρα έχουμε μελετήσει την οπτική μας αντίληψη με στατικά μέσα, δηλαδή με μολύβι και χαρτί. Επίσης τα μαθηματικά εργαλεία που έχουμε χρησιμοποιήσει είναι η γεωμετρία και οι τριγωνομετρικές σχέσεις του αθροίσματος και της διαφοράς τόξων.
Στόχος μας είναι τώρα να μελετήσουμε την οπτική μας αντίληψη σε ένα άλλο μαθηματικό πλαίσιο, εκείνο των συναρτήσεων και των γραφικών τους παραστάσεων.
Στην εικόνα φαίνεται το απλοποιημένο μοντέλο της πρότασης 4 του Ευκλείδη, όπου το τμήμα ΑΒ μπορεί να κινείται δυναμικά μπρος πίσω, οπότε μεταβάλλεται η απόσταση χ και η γωνία ω, ενώ προβάλλεται η τιμή της απόστασης χ του άκρου Β από το σημείο Π. Το μήκος του ΟΠ εκφράζει το ύψος του παρατηρητή.



Θα μελετήσουμε τη γραφική παράσταση της σχέσης της απόστασης χ από τον παρατηρητή με το φαινόμενο μέγεθος ω.

ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ ΓΙΑ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ:

1) Κατασκευάστε με τη βοήθεια του λογισμικού μία δυναμική αναπαράσταση του γεωμετρικού μοντέλου της πρότασης 4. Πώς μεταβάλλεται η γωνία ω κατά τη διάρκεια μεταβολής της απόστασης χ;

Βοήθεια 1

2) Ποια είναι η μέγιστη τιμή της γωνίας ω και πότε επιτυγχάνεται αυτή; Ποια μπορεί να είναι η φυσική σημασία της μέγιστης τιμής της γωνίας;

Βοήθεια 2

3) Μετατρέψτε σε εκατοστά τις μοίρες μέτρησης της γωνίας, με τη βοήθεια του υπολογιστή των μετρήσεων. Για να γίνει αυτό, αρκεί να διαιρέσετε με 1^{o} και να πολλαπλασιάσετε επί 1 εκ.

4) Χρησιμοποιήστε τη μέθοδο του **δυναμικού σημείου**, για να μελετήσετε γραφικά τη σχέση που συνδέει τη γωνία ω με την απόσταση χ. *(Μεταφέρετε το σημείο Β κατακόρυφα όσο είναι η μέτρηση της γωνίας σε εκατοστά. Δημιουργήστε το ίχνος του νέου σημείου.)* Τι παριστάνει η καμπύλη που γράφει το σημείο αυτό; *(Αν η μέτρηση της γωνίας σε εκατοστά είναι πολύ μεγάλη, τότε, αντί για 1^o, θα πρέπει να διαιρέσετε τη μέτρηση της γωνίας διά 10^o.)*

Βοήθεια 4

5) Μεταβάλετε το ύψος του παρατηρητή. Πώς μπορούμε να ερμηνεύσουμε τις αλλαγές που υφίσταται η αρχική καμπύλη, όταν μεταβάλλεται το ύψος;

Βοήθεια 5

6) Μεταβάλετε το μήκος του κ και κατασκευάστε εκ νέου τη γραφική παράσταση. Ποια είναι η μορφή της καμπύλης για τις διάφορες τιμές του κ;

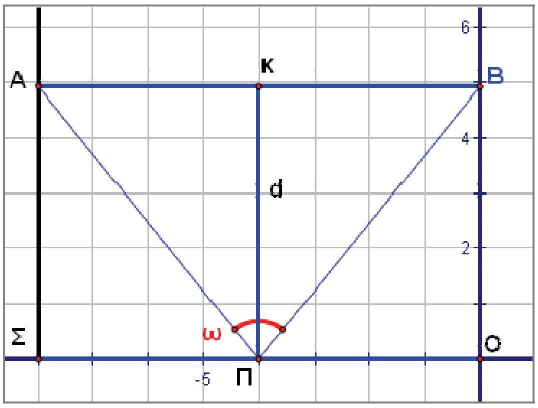
Βοήθεια 6

7) Εξηγήστε τη συμπεριφορά της γραφικής παράστασης, για τις μεταβολές των παραμέτρων της, μέσα από τη μορφή της αλγεβρικής σχέσης (τύπο συνάρτησης) που κατασκευάσατε στην προηγούμενη δραστηριότητα.

Βοήθεια 7

Φύλλο εργασίας 2

Στην εικόνα φαίνεται το απλοποιημένο μοντέλο της πρότασης 6 του Ευκλείδη, όπου το τμήμα ΑΒ μπορεί να κινείται δυναμικά μπρος πίσω, οπότε μεταβάλλεται η απόσταση d και η γωνία ω. Επιπλέον, ας θεωρήσουμε ότι το μήκος κ είναι δυνατόν να μεταβληθεί. Ο παρατηρητής είναι στο σημείο Π που βρίσκεται στη μεσοκάθετο του κ.



Θα μελετήσουμε τη γραφική παράστασης της σχέσης της απόστασης d από τον παρατηρητή με το φαινόμενο μέγεθος ω, όταν το μήκος κ παραμένει σταθερό.

ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ ΓΙΑ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ:

1) Κατασκευάστε με τη βοήθεια του λογισμικού μία δυναμική αναπαράσταση του γεωμετρικού μοντέλου της πρότασης 6. Πώς μεταβάλλεται η γωνία ω κατά τη διάρκεια μεταβολής της απόστασης d;

Βοήθεια 1

2) Μετατρέψτε σε εκατοστά τις μοίρες μέτρησης της γωνίας, με τη βοήθεια του υπολογιστή των μετρήσεων. Για να γίνει αυτό, αρκεί να διαιρέσετε με 1^{o} και να πολλαπλασιάσετε επί 1 εκ.

3) Χρησιμοποιήσετε τη μέθοδο του **δυναμικού σημείου**, για να μελετήσετε γραφικά τη σχέση που συνδέει τη γωνία ω με την απόσταση d. Τι παριστάνει η καμπύλη που γράφει το σημείο αυτό; *(Αν η μέτρηση της γωνίας σε εκατοστά είναι πολύ μεγάλη, τότε, αντί για 1^{o}, θα πρέπει να διαιρέσετε τη μέτρηση της γωνίας διά 20^{o}.)*

Βοήθεια 3

4) Μεταφέρετε δεξιά ή αριστερά τη θέση του παρατηρητή Π και επαναλάβετε το πείραμα. Πώς μπορούμε να ερμηνεύσουμε τις αλλαγές που υφίσταται η αρχική καμπύλη;

Βοήθεια 4

5) Μεταβάλετε το μήκος του κ και κατασκευάστε εκ νέου τη γραφική παράσταση. Ποια είναι η μορφή της καμπύλης για τις διάφορες τιμές του κ;

Βοήθεια 5

6) Εξηγήστε τη συμπεριφορά της γραφικής παράστασης, για τις μεταβολές των παραμέτρων της, μέσα από τη μορφή της αλγεβρικής σχέσης (τύπο συνάρτησης) που κατασκευάσατε στην προηγούμενη δραστηριότητα.

Βοήθεια 6

7) Φτιάξτε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων που κατασκευάσατε προηγουμένως. Συγκρίνετε τις δύο γραφικές παραστάσεις, δηλαδή εκείνη που προκύπτει από τον τύπο της συνάρτησης που κατασκευάσατε και εκείνη που προκύπτει από τη μέθοδο του δυναμικού σημείου. Μελετήστε και εξηγήστε τις ομοιότητες και τις διαφορές τους.

Βοήθεια 7

ΡΕΑΛΙΣΤΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό αναπτύχθηκε στο παρακάτω πλαίσιο:	
Πράξη:	**ΠΛΕΙΑΔΕΣ**: *Ανάπτυξη Εκπαιδευτικού Λογισμικού και Ολοκληρωμένων Εκπαιδευτικών Πακέτων για τα Ελληνικά Σχολεία της Πρωτοβάθμιας και Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης & Διάθεση Προϊόντων Εκπαιδευτικού Λογισμικού στα Σχολεία.* (2003-2007) http://pleiades.cti.gr
Ενότητα:	**ΝΗΡΗΙΔΕΣ**: Ανάπτυξη ολοκληρωμένων εκπαιδευτικών πακέτων.
Τελικός Δικαιούχος (Φορέας Υλοποίησης & Επιστημονικής Παρακολούθησης του έργου):	Ερευνητικό Ακαδημαϊκό Ινστιτούτο Τεχνολογίας Υπολογιστών (ΕΑ.ΙΤΥ) http://www.cti.gr/
Φορέας Χρηματοδότησης και Λειτουργίας:	Υπουργείο Εθνικής Παιδείας και Θρησκευμάτων (Υπ.Ε.Π.Θ.)
Χρηματοδότηση:	**Επιχειρησιακό Πρόγραμμα**: «Κοινωνία της Πληροφορίας», Μέτρο Ι.2, Γ' ΚΠΣ

ΕΥΡΩΠΑΪΚΗ ΕΝΩΣΗ
ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
ΤΟ ΠΑΡΟΝ ΕΡΓΟ ΧΡΗΜΑΤΟΔΟΤΕΙΤΑΙ ΚΑΤΑ 75% ΑΠΟ ΤΟ ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Γ' ΚΟΙΝΟΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ ΣΤΗΡΙΞΗΣ ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ "ΚΟΙΝΩΝΙΑ ΤΗΣ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΑΣ"
ΥΠ. ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΩΝ ΥΠ. ΕΣΩΤΕΡΙΚΩΝ ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΔΙΟΙΚΗΣΗΣ & ΑΠΟΚΕΝΤΡΩΣΗΣ
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΕΘΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΓΡΑΦΕΙΟ ΓΙΑ ΤΗΝ ΚΟΙΝΩΝΙΑ ΤΗΣ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΑΣ
ΕΡΕΥΝΗΤΙΚΟ ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΟ ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ ΕΑ.ΙΤΥ
Νηρηίδες
Πλειάδες

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΚΑΣΤΑΝΙΩΤΗ INTERACTIVE