3.5.1 Η ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ f(x)=arctan(x)

Ονοματεπώνυμο μαθητών: -- **Τάξη:** ------------

-- **Ημερομηνία:** ------------

Φύλλο εργασίας

Όταν η τιμή της γωνίας x, που ανήκει στο διάστημα $(-\frac{\pi}{2}\ ,\ \frac{\pi}{2})$, είναι γνωστή, τότε μπορούμε να υπολογίσουμε την τιμή της εφαπτομένης της γωνίας και τη συνάρτηση με την οποία πραγματοποιείται αυτή η αντιστοιχία. Με άλλα λόγια, ο υπολογισμός είναι η f(x)=tanx (f(x)=εφx).
Σε πολλά προβλήματα, όμως, είναι γνωστή η τιμή της εφαπτομένης της γωνίας x και ζητείται η τιμή της γωνίας x. Αυτό ακριβώς το πρόβλημα θα μελετήσουμε με τη βοήθεια του λογισμικού *Function Probe*.

ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ ΓΙΑ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ:

1) Κατασκευάστε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης y=tanx στο διάστημα $(-\frac{\pi}{2}\ ,\ \frac{\pi}{2})$.

Βοήθεια 1

2) Δημιουργήστε μία ακολουθία αρκετών σημείων (20-30) από τη γραφική παράσταση. Ορίστε αντίθετες τιμές για την αρχική και την τελική τιμή. Αποστείλετε τα σημεία στον πίνακα. Τι σχέση έχουν οι τιμές της εφαπτομένης για τις αντίθετες τιμές της γωνίας x; Πώς εξηγείται η σχέση αυτή;

Βοήθεια 2

3) Ορίστε τις τιμές της εφαπτομένης στον πίνακα ως στήλη του x και τις τιμές της γωνίας ως στήλη του y. Αποστείλετε τα σημεία στο γράφημα, ενώστε τα και μελετήστε τη διάταξή τους. Ποια συνάρτηση θα μπορούσε να οριστεί με τη γραφική παράσταση, πάνω στην οποία φαίνεται να ανήκουν τα σημεία;

Βοήθεια 3

4) Κατασκευάστε τη συμμετρική της γραφικής παράστασης της εφαπτομένης, δηλαδή της y=tanx, ως προς την ευθεία y=x. Τι παρατηρείτε; Μπορείτε να εξηγήσετε αυτό που παρατηρήσατε;

Βοήθεια 4

5) Κατασκευάστε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης y=arctanx. Τι παρατηρείτε; Ποια σχέση συνδέει τις δύο συναρτήσεις; Ποια είναι η πρακτική χρήση της συγκεκριμένης συνάρτησης, δηλαδή τι μας επιτρέπει να υπολογίσουμε;

Βοήθεια 5

6) Μελετήστε τη συμπεριφορά της γραφικής παράστασης της y=arctanx για μεγάλες τιμές του x. Τι παρατηρείτε; Τι τιμές μπορεί να πάρει η συνάρτηση;

Βοήθεια 6

7) Ανοίξτε το αρχείο arctan του λογισμικού. Μελετήστε το γεωμετρικό μοντέλο και εντοπίστε τα μεγέθη που μπορούν να μεταβληθούν. Μελετήστε τον τρόπο κατασκευής του σημείου Μ. Ποιες είναι οι συντεταγμένες του σημείου;

Βοήθεια 7

8) Κατασκευάστε το ίχνος του σημείου Μ και μεταβάλετε το μήκος του τμήματος d. Ποια συνάρτηση θα μπορούσε να έχει γραφική παράσταση την καμπύλη που γράφει το ίχνος του Μ;

Βοήθεια 8

9) Με τη βοήθεια του λογισμικού κατασκευάστε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης, προκειμένου να επιβεβαιώσετε ή να απορρίψετε τη σχέση που κατασκευάσατε στην προηγούμενη ερώτηση.

Βοήθεια 9

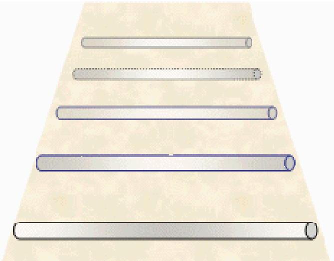
3.5.2 ΜΕΛΕΤΗ ΦΩΤΟΓΡΑΦΙΑΣ

Ονοματεπώνυμο μαθητών: -- **Τάξη:** ----------

-- **Ημερομηνία:** ----------

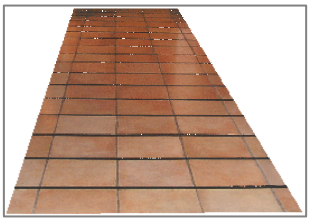
Φύλλο εργασίας

Φωτογραφήστε έναν πλακόστρωτο διάδρομο στο σχολείο σας ή σε έναν άλλο κατάλληλο χώρο. Αν δεν έχετε πρόσβαση σε πλακόστρωτο διάδρομο, τοποθετήστε σε ίσες αποστάσεις μερικές λεπτές ράβδους πάνω στο διάδρομο ή σε όποιο χώρο πρόκειται να φωτογραφήσετε.



Η φωτογράφηση να γίνει από διαφορετικά ύψη και διαφορετικές αποστάσεις. Το πρόβλημα που θα μελετήσουμε είναι το εξής: Με ποιον τρόπο επηρεάζεται η εικόνα της φωτογραφίας κάθε φορά που αλλάζουμε ύψος ή απόσταση;

Παρατηρήστε τις παρακάτω εικόνες του ίδιου δαπέδου.



ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ ΓΙΑ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ:

1) Συγκρίνετε τις φωτογραφίες ενός δαπέδου οι οποίες έχουν ληφθεί από διαφορετικά ύψη. Πού οφείλονται κατά τη γνώμη σας οι διαφορές στις δύο εικόνες του πατώματος; Πώς μπορούμε να εξηγήσουμε με μαθηματικό τρόπο τις διαφορές των δύο εικόνων;

Βοήθεια 1

2) Κάντε ένα γεωμετρικό σχήμα στο οποίο να παριστάνονται τα διάφορα μεγέθη που καθορίζουν τη μορφή της εικόνας.

Βοήθεια 2

3) Ποια μεγέθη, ενώ είναι ίσα στην πραγματικότητα, φαίνονται άνισα. Πώς μεταβάλλονται οι αποστάσεις μεταξύ των γραμμών του δαπέδου και τα μεγέθη τους σε σχέση με την απόστασή τους από τον παρατηρητή;

Βοήθεια 3

4) Δώστε μία μαθηματική ερμηνεία του φαινομένου που παρατηρείτε.

Βοήθεια 4

3.5.3 ΤΑ ΟΠΤΙΚΑ ΤΟΥ ΕΥΚΛΕΙΔΗ

Ονοματεπώνυμο μαθητών: .... **Τάξη:** ....

.... **Ημερομηνία:** ....

Φύλλο εργασίας

Στο έργο του *Οπτικά* ο Ευκλείδης περιγράφει με τη βοήθεια της γεωμετρίας την οπτική μας αντίληψη και επιχειρεί να εξηγήσει τον τρόπο με τον οποίο φαίνονται τα αντικείμενα. Στην αρχή μας παραθέτει μερικές βασικές έννοιες, τις οποίες και ονομάζει **όρους** και είναι χρήσιμες στη δραστηριότητα που ακολουθεί. Στη συνέχεια παραθέτει μία σειρά προτάσεων, από τις οποίες θα μας απασχολήσουν δύο, η **πρόταση 4** και η **πρόταση 6**.

Όροι

1. Ὑποκείσθω τὰς ἀπὸ τοῦ ὄμματος ἐξαγομένας εὐθείας γραμμὰς φέρεσθαι διάστημα μεγεθῶν μεγάλων.

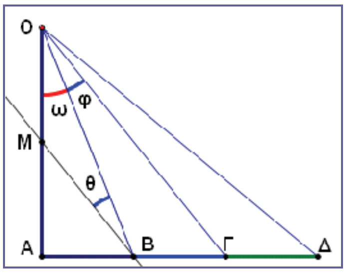
2. καὶ τὸ [μὲν] ὑπὸ τῶν ὄψεων περιεχόμενων σχῆμα εἶναι κῶνον τὴν κορυφὴν μὲν ἔχοντα ἐν τῷ ὄμματι τὴν δὲ βάσιν πρὸς τοῖς πέρασι τῶν ὁρωμένων.

4. καὶ τὰ μὲν ὑπὸ μείζονος γωνίας ὁρώμενα μείζονα φαίνεσθαι, τὰ δὲ ὑπὸ ἐλάττονος ἐλάττονα, ἴσα δὲ τὰ ὑπὸ ἴσων γωνιῶν ὁρώμενα.

5. καὶ τὰ μὲν ὑπὸ μετεωροτέρων ἀκτίνων ὁρώμενα μετεωρότερα φαίνεσθαι, τὰ δὲ ὑπὸ ταπεινοτέρων ταπεινότερα.

Πρόταση 4

Τῶν ἴσων διαστημάτων καὶ ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας ὄντων τὰ ἐκ πλείονος διαστήματος ὁρώμενα ἐλάττονα φαίνεται.

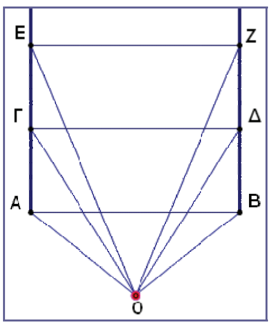


Εδώ ο Ευκλείδης προτείνει την εξής απόδειξη:

- Φέρνει τη ΒΜ παράλληλη προς την ΟΓ.
- Το τμήμα ΒΜ περνά από το μέσον Μ του ΟΑ, άρα το τμήμα ΟΜ είναι ίσο με το μισό του ΟΑ.
- Οι δύο γωνίες φ και θ είναι ίσες ως εντός εναλλάξ. ΟΑ<ΟΓ, αφού η ΟΓ είναι πλάγια, ενώ η ΟΑ είναι κατακόρυφη.
- Στο τρίγωνο ΜΒΟ το ΟΜ<ΜΒ, αφού τα τμήματα αυτά είναι τα μισά άνισων τμημάτων και επομένως θ<ω. Τελικά φ<ω.

Πρόταση 6

Τὰ παράλληλα τῶν διαστημάτων ἐξ ἀποστήματος ὁρώμενα ἀνισοπλατῆ φαίνεται.



Εδώ ο Ευκλείδης αναφέρει ότι πράγματι τα μεγέθη (τμήματα) φαίνονται μικρότερα, αφού οι γωνίες, με τις οποίες ο οφθαλμός μας Ο τα παρατηρεί, συνεχώς μικραίνουν.

ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ ΓΙΑ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ:

1) Κάντε μία νοηματική απόδοση των «όρων» στην καθομιλουμένη γλώσσα.

Βοήθεια 1

2) Εκτιμήστε αν οι όροι είναι συμβατοί με τις παρατηρήσεις σας στη δραστηριότητα με τις φωτογραφίες. Δηλαδή, κατά πόσον οι όροι αυτοί περιγράφουν την οπτική μας αντίληψη.

Βοήθεια 2

3) Κάντε μία νοηματική απόδοση της πρότασης 4 στην καθομιλουμένη.

Βοήθεια 3

4) Μελετήστε την απόδειξη της πρότασης 4 και καταγράψτε τις προτάσεις της γεωμετρίας που χρησιμοποιεί ο Ευκλείδης για την απόδειξή της.

Βοήθεια 4

5) Κάντε μία νοηματική απόδοση της πρότασης 6 στην καθομιλουμένη.

Βοήθεια 5

6) Συμπληρώστε την απόδειξη της πρότασης 6, αιτιολογώντας με καθαρά γεωμετρικό τρόπο τη σχέση των γωνιών. Χρησιμοποιήστε φράσεις που αναφέρει και ο Ευκλείδης στην πρόταση 4.

Βοήθεια 6

7) Ποια είναι η σημασία των προτάσεων 4 και 6 για την περιγραφή και ερμηνεία της οπτικής μας αντίληψης;

Βοήθεια 7

3.5.4 Η ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

Ονοματεπώνυμο μαθητών: .... **Τάξη:** ....
.... **Ημερομηνία:** ....

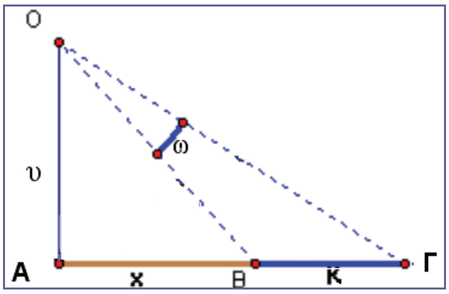
Φύλλο εργασίας

Ο Ευκλείδης χρησιμοποίησε τις γεωμετρικές γνώσεις της εποχής του για να δικαιολογήσει την οπτική μας αντίληψη. Έτσι, απέδειξε ότι σε ένα δάπεδο που έχει καλυφθεί με ίσα πλακάκια, εκείνα που είναι απομακρυσμένα φαίνονται μικρότερα και ότι οι παράλληλες ευθείες συγκλίνουν στο βάθος του οπτικού μας πεδίου.

Στη δραστηριότητα που ακολουθεί θα επιχειρήσουμε να απαντήσουμε στο εξής ερώτημα: Με ποιον τρόπο μπορούμε να εκφράσουμε την ελάττωση των μεγεθών, καθώς αυτά απομακρύνονται από τον παρατηρητή; Δηλαδή ποια σχέση συνδέει το φαινόμενο μέγεθος (γωνία) ενός αντικειμένου με την απόστασή του από εμάς;

Στο παρακάτω σχήμα παρουσιάζεται:
α) Το ύψος ΟΑ=υ του παρατηρητή
β) Το τμήμα κ που βρίσκεται σε απόσταση χ από τον παρατηρητή
γ) Το φαινόμενο μέγεθος του τμήματος κ, δηλαδή η γωνία ω

Στόχος είναι να βρούμε μία σχέση που να συνδέει έναν τριγωνομετρικό αριθμό της γωνίας ω με τα μεγέθη υ, χ και κ.



ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ ΓΙΑ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ:

1) Συνδέστε σε μία σχέση τη γωνία ω με τα τμήματα υ, χ, κ, εφαρμόζοντας τους τύπους της τριγωνομετρίας που έχετε διδαχτεί.

Βοήθεια 1

2) Κατασκευάστε μία σχέση που να συνδέει τα παραπάνω μεγέθη.

Βοήθεια 2

3) Ερμηνεύστε, με βάση τη σχέση που έχετε κατασκευάσει, το φαινόμενο της σμίκρυνσης του πλακακίου καθώς απομακρύνεται.

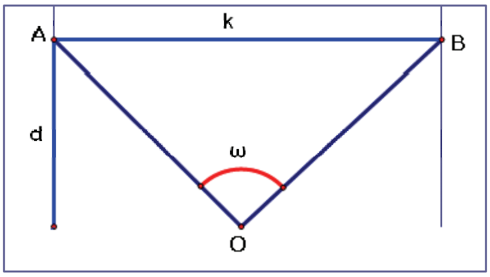
Βοήθεια 3

Ας έρθουμε τώρα στις συγκλίνουσες παραλλήλους. Στο διπλανό σχήμα παρουσιάζεται:

α) Ένα τμήμα d που παριστάνει την απόσταση του παρατηρητή από το τμήμα που παρατηρεί

β) Το τμήμα κ το οποίο παρατηρεί ο παρατηρητής που βρίσκεται στο σημείο Ο

γ) Το φαινόμενο μέγεθος του τμήματος κ, δηλαδή η γωνία ω



Στόχος είναι να βρούμε μία σχέση που να συνδέει έναν τριγωνομετρικό αριθμό της γωνίας ω με τα μεγέθη d και κ.

4) Συνδέστε σε μία σχέση τη γωνία ω με τα τμήματα d και κ, εφαρμόζοντας τους τύπους της τριγωνομετρίας που έχετε διδαχτεί.

Βοήθεια 4

5) Κατασκευάστε μία σχέση που να συνδέει τα παραπάνω μεγέθη. Σε πρώτη φάση υποθέστε ότι ο παρατηρητής βρίσκεται πάνω στη μεσοκάθετη του τμήματος κ.

Βοήθεια 5

6) Εξετάστε την περίπτωση κατά την οποία ο παρατηρητής βρίσκεται έξω από τη μεσοκάθετη του τμήματος.

Βοήθεια 6

7) Ερμηνεύστε, με βάση τη σχέση που έχετε κατασκευάσει, το φαινόμενο της σύγκλισης των δύο παραλλήλων.

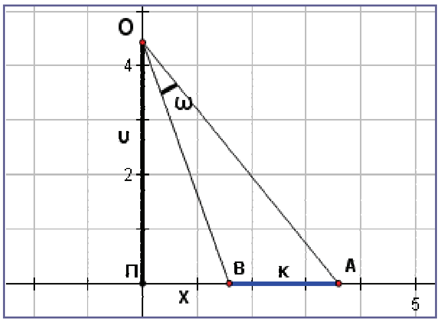
Βοήθεια 7

3.5.5 ΔΥΝΑΜΙΚΑ ΜΟΝΤΕΛΑ

Ονοματεπώνυμο μαθητών: -- **Τάξη:** ------------
-- **Ημερομηνία:** ------------

Φύλλο εργασίας 1

Μέχρι τώρα έχουμε μελετήσει την οπτική μας αντίληψη με στατικά μέσα, δηλαδή με μολύβι και χαρτί. Επίσης τα μαθηματικά εργαλεία που έχουμε χρησιμοποιήσει είναι η γεωμετρία και οι τριγωνομετρικές σχέσεις του αθροίσματος και της διαφοράς τόξων.
Στόχος μας είναι τώρα να μελετήσουμε την οπτική μας αντίληψη σε ένα άλλο μαθηματικό πλαίσιο, εκείνο των συναρτήσεων και των γραφικών τους παραστάσεων.
Στην εικόνα φαίνεται το απλοποιημένο μοντέλο της πρότασης 4 του Ευκλείδη, όπου το τμήμα ΑΒ μπορεί να κινείται δυναμικά μπρος πίσω, οπότε μεταβάλλεται η απόσταση χ και η γωνία ω, ενώ προβάλλεται η τιμή της απόστασης χ του άκρου Β από το σημείο Π. Το μήκος του ΟΠ εκφράζει το ύψος του παρατηρητή.



Θα μελετήσουμε τη γραφική παράσταση της σχέσης της απόστασης χ από τον παρατηρητή με το φαινόμενο μέγεθος ω.

ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ ΓΙΑ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ:

1) Κατασκευάστε με τη βοήθεια του λογισμικού μία δυναμική αναπαράσταση του γεωμετρικού μοντέλου της πρότασης 4. Πώς μεταβάλλεται η γωνία ω κατά τη διάρκεια μεταβολής της απόστασης χ;

Βοήθεια 1

2) Ποια είναι η μέγιστη τιμή της γωνίας ω και πότε επιτυγχάνεται αυτή; Ποια μπορεί να είναι η φυσική σημασία της μέγιστης τιμής της γωνίας;

Βοήθεια 2

3) Μετατρέψτε σε εκατοστά τις μοίρες μέτρησης της γωνίας, με τη βοήθεια του υπολογιστή των μετρήσεων. Για να γίνει αυτό, αρκεί να διαιρέσετε με 1^o και να πολλαπλασιάσετε επί 1 εκ.

4) Χρησιμοποιήστε τη μέθοδο του **δυναμικού σημείου**, για να μελετήσετε γραφικά τη σχέση που συνδέει τη γωνία ω με την απόσταση χ. *(Μεταφέρετε το σημείο Β κατακόρυφα όσο είναι η μέτρηση της γωνίας σε εκατοστά. Δημιουργήστε το ίχνος του νέου σημείου.)* Τι παριστάνει η καμπύλη που γράφει το σημείο αυτό; *(Αν η μέτρηση της γωνίας σε εκατοστά είναι πολύ μεγάλη, τότε, αντί για 1^o, θα πρέπει να διαιρέσετε τη μέτρηση της γωνίας διά 10^o.)*

Βοήθεια 4

5) Μεταβάλετε το ύψος του παρατηρητή. Πώς μπορούμε να ερμηνεύσουμε τις αλλαγές που υφίσταται η αρχική καμπύλη, όταν μεταβάλλεται το ύψος;

Βοήθεια 5

6) Μεταβάλετε το μήκος του κ και κατασκευάστε εκ νέου τη γραφική παράσταση. Ποια είναι η μορφή της καμπύλης για τις διάφορες τιμές του κ;

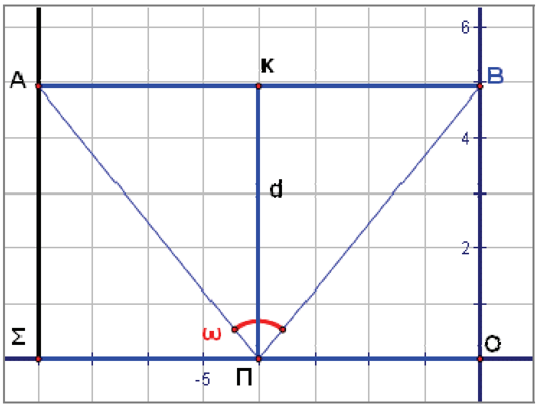
Βοήθεια 6

7) Εξηγήστε τη συμπεριφορά της γραφικής παράστασης, για τις μεταβολές των παραμέτρων της, μέσα από τη μορφή της αλγεβρικής σχέσης (τύπο συνάρτησης) που κατασκευάσατε στην προηγούμενη δραστηριότητα.

Βοήθεια 7

Φύλλο εργασίας 2

Στην εικόνα φαίνεται το απλοποιημένο μοντέλο της πρότασης 6 του Ευκλείδη, όπου το τμήμα ΑΒ μπορεί να κινείται δυναμικά μπρος πίσω, οπότε μεταβάλλεται η απόσταση d και η γωνία ω. Επιπλέον, ας θεωρήσουμε ότι το μήκος κ είναι δυνατόν να μεταβληθεί. Ο παρατηρητής είναι στο σημείο Π που βρίσκεται στη μεσοκάθετο του κ.



Θα μελετήσουμε τη γραφική παράστασης της σχέσης της απόστασης d από τον παρατηρητή με το φαινόμενο μέγεθος ω, όταν το μήκος κ παραμένει σταθερό.

ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ ΓΙΑ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ:

1) Κατασκευάστε με τη βοήθεια του λογισμικού μία δυναμική αναπαράσταση του γεωμετρικού μοντέλου της πρότασης 6. Πώς μεταβάλλεται η γωνία ω κατά τη διάρκεια μεταβολής της απόστασης d;

Βοήθεια 1

2) Μετατρέψτε σε εκατοστά τις μοίρες μέτρησης της γωνίας, με τη βοήθεια του υπολογιστή των μετρήσεων. Για να γίνει αυτό, αρκεί να διαιρέσετε με 1^o και να πολλαπλασιάσετε επί 1 εκ.

3) Χρησιμοποιήσετε τη μέθοδο του **δυναμικού σημείου**, για να μελετήσετε γραφικά τη σχέση που συνδέει τη γωνία ω με την απόσταση d. Τι παριστάνει η καμπύλη που γράφει το σημείο αυτό; *(Αν η μέτρηση της γωνίας σε εκατοστά είναι πολύ μεγάλη, τότε, αντί για 1^o, θα πρέπει να διαιρέσετε τη μέτρηση της γωνίας διά 20^o.)*

Βοήθεια 3

4) Μεταφέρετε δεξιά ή αριστερά τη θέση του παρατηρητή Π και επαναλάβετε το πείραμα. Πώς μπορούμε να ερμηνεύσουμε τις αλλαγές που υφίσταται η αρχική καμπύλη;

Βοήθεια 4

5) Μεταβάλετε το μήκος του κ και κατασκευάστε εκ νέου τη γραφική παράσταση. Ποια είναι η μορφή της καμπύλης για τις διάφορες τιμές του κ;

Βοήθεια 5

6) Εξηγήστε τη συμπεριφορά της γραφικής παράστασης, για τις μεταβολές των παραμέτρων της, μέσα από τη μορφή της αλγεβρικής σχέσης (τύπο συνάρτησης) που κατασκευάσατε στην προηγούμενη δραστηριότητα.

Βοήθεια 6

7) Φτιάξτε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων που κατασκευάσατε προηγουμένως. Συγκρίνετε τις δύο γραφικές παραστάσεις, δηλαδή εκείνη που προκύπτει από τον τύπο της συνάρτησης που κατασκευάσατε και εκείνη που προκύπτει από τη μέθοδο του δυναμικού σημείου. Μελετήστε και εξηγήστε τις ομοιότητες και τις διαφορές τους.

Βοήθεια 7