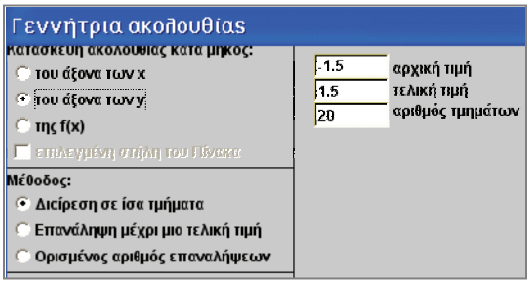
Η ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ f(x)=arctan(x)

Βοήθεια 1

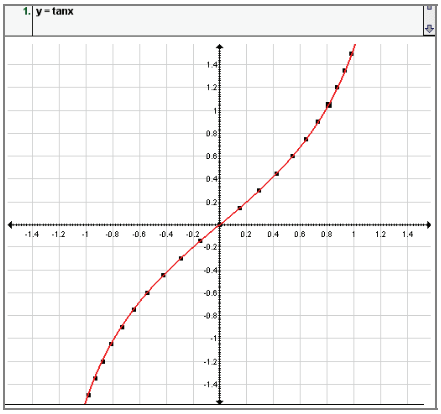
Αλλάξτε την κλίμακα για το χ και στα άκρα τοποθετήστε τους αριθμούς -1,57 και 1,57, διότι οι αριθμοί αυτοί είναι το $-\frac{\pi}{2}$ και το $\frac{\pi}{2}$. Το διάστημα αυτό το επιλέγουμε, για να μην εμφανιστούν οι πολλαπλές καμπύλες της γραφικής παράστασης της εφαπτομένης. Χρησιμοποιήστε και για το ψ το ίδιο διάστημα και την ίδια «απόσταση πλέγματος», ώστε το σύστημα να είναι κανονικό, δηλαδή οι δύο άξονες να έχουν την ίδια μονάδα μέτρησης.

Βοήθεια 2

Για να μην επιλέξετε σημεία που βρίσκονται έξω από τα περιθώρια της οθόνης, προτιμήστε να αποκόψετε σημεία από την καμπύλη με βάση τον άξονα ψ΄ψ.



Επιλέγοντας ένα διάστημα μεταξύ $-\frac{\pi}{2}$ και $\frac{\pi}{2}$, δηλαδή μεταξύ -1,57 και 1,57 πάνω στον ψ΄ψ, θα έχετε σημεία που θα είναι όλα ορατά στα περιθώρια του «πίνακα γράφημα» του λογισμικού.



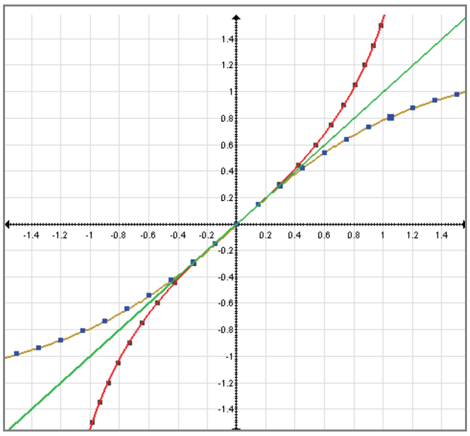
Μόλις αποστείλετε τα σημεία στον πίνακα τιμών, παρατηρήστε ότι όλες οι συμμετρικές τιμές ως προς χ έχουν τις αντίστοιχες τιμές του ψ, που επίσης είναι συμμετρικές ως προς το 0.

x Οριζόντια	y Κάθετα
-0.98	-1.5
-0.93	-1.35
-0.88	-1.2
-0.81	-1.05
-0.73	-0.9
-0.64	-0.75
-0.54	-0.6
-0.42	-0.45
-0.29	-0.3
-0.15	-0.15
0	0
0.15	0.15
0.29	0.3
0.42	0.45
0.54	0.6
0.64	0.75
0.73	0.9
0.81	1.05
0.88	1.2
0.93	1.35
0.98	1.5

Οι συναρτήσεις που έχουν αυτή την ιδιότητα χαρακτηρίζονται από έναν ιδιαίτερο όρο. Ποιος είναι αυτός;

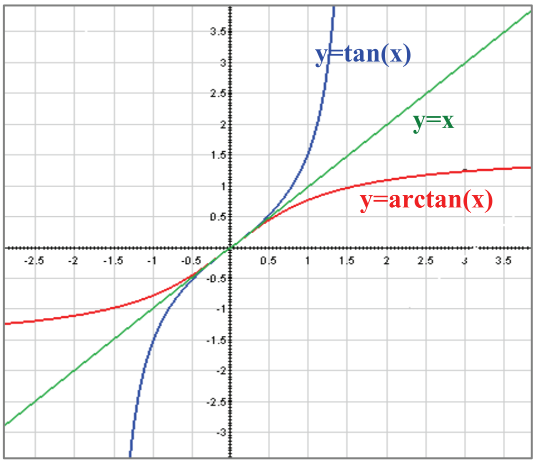
Βοήθεια 3
Όταν κάνουμε αυτή την ενέργεια, δηλαδή εναλλαγή του χ με το ψ, τότε τα σημεία αλλάζουν διάταξη και εμφανίζονται πάνω σε μία άλλη καμπύλη. Αυτό σημαίνει ότι δημιουργείται μία νέα συνάρτηση, η οποία σε κάθε τιμή της εφαπτομένης αντιστοιχεί τη γωνία χ. Η συνάρτηση αυτή θα μπορούσε να ονομαστεί τόξο εφαπτομένης χ, ή, σε συντομογραφία, τοξοεφχ ή arctanx.

Βοήθεια 4
Παρατηρήστε ότι η συμμετρική γραφική παράσταση περνά από όλα τα σημεία που προέκυψαν κατά την προηγούμενη ερώτηση.

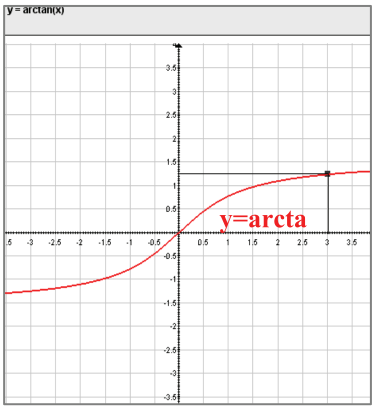


Για να εξηγήσετε το γεγονός αυτό θα πρέπει να σκεφτείτε ότι αν δύο σημεία είναι συμμετρικά ως προς την ευθεία ψ=χ, τότε η τετμημένη τους ενός είναι ίση με την τεταγμένη του άλλου. Αυτό σημαίνει ότι η συμμετρική της γραφικής παράστασης της ψ=εφχ θα είναι μία καμπύλη που θα περνά από όλα τα σημεία της ερώτησης 3.

Βοήθεια 5
Καταρχήν, είναι φανερό ότι οι δύο γραφικές παραστάσεις είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία y=x. Η συγκεκριμένη συνάρτηση σε κάθε πραγματικό αριθμό α αντιστοιχεί τη γωνία x για την οποία ισχύει εφx=α.

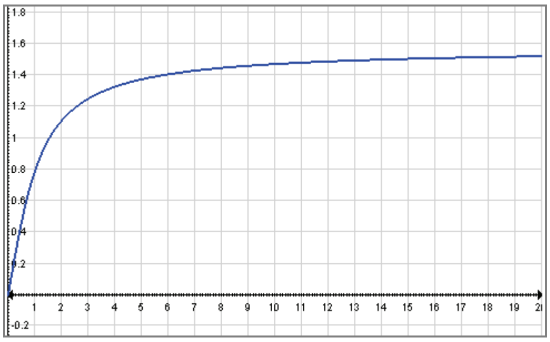


Τώρα μπορούμε να λύσουμε οποιαδήποτε εξίσωση της μορφής εφχ=α, φέρνοντας μία κάθετη στο σημείο α του άξονα του χ.



Να λύσετε την εξίσωση εφχ=3 με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης.

Βοήθεια 6
Προσέξτε ότι η γραφική παράσταση μοιάζει να γίνεται ευθεία όσο μεγαλώνουν οι τιμές της μεταβλητής χ. Αυτό μπορείτε να το επιβεβαιώσετε, αλλάζοντας κλίμακα και ορίζοντας μεγάλες τιμές για το άκρο της μεταβλητής χ.



Αυτό σημαίνει ότι η γραφική παράσταση έχει οριζόντια ασύμπτωτη την ευθεία ψ=1,57 και η εξήγηση αυτού είναι απλή. Η τιμή 1,57 είναι το $\frac{3,14}{2}$, δηλαδή το $\frac{\pi}{2}$ σε ακτίνια ή το 90^o σε μοίρες. Ωστόσο, την τιμή αυτή δεν μπορεί να την πάρει η μεταβλητή ψ, αφού στις 90^o δεν ορίζεται η εφαπτομένη. Προφανώς η γραφική παράσταση έχει οριζόντια ασύμπτωτη και την ευθεία ψ=$-\frac{\pi}{2}$.

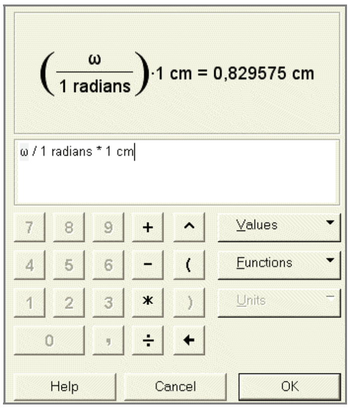
Βοήθεια 7

Σύρετε το σημείο B και το σημείο A, για να μελετήσετε τα μεγέθη που μεταβάλλονται.

Καταρχήν μελετήστε τον τρόπο με τον οποίο μεταβάλλεται το M. Προσέξτε ότι η τετμημένη του σημείου M είναι πάντα ίση με την απόσταση OM, η οποία στις μετρήσεις σημειώνεται με d.

Η τεταγμένη του σημείου M, δηλαδή το τμήμα BM, έχει μέτρο που αναγράφεται στην οθόνη.

Κάντε διπλό κλικ πάνω στη μέτρηση του BM, για να εμφανίσετε τον τρόπο με τον οποίο ο κατασκευαστής έχει καθορίσει τη μέτρηση αυτή.



Παρατηρήστε ότι η τεταγμένη του σημείου M είναι ουσιαστικά η μέτρηση της γωνίας ω, μόνο που έχει μετατραπεί σε εκατοστά για να μπορεί να χρησιμοποιηθεί από το λογισμικό ως μήκος.

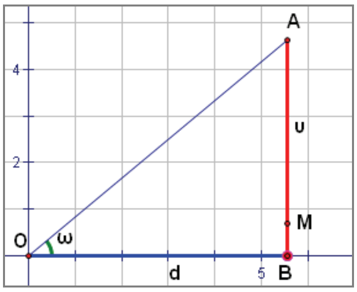
Στόχος αυτής της κατασκευής είναι να μελετήσουμε τη σχέση της απόστασης d με τη γωνία ω, όταν το μήκος AB έχει σταθερή συγκεκριμένη τιμή. Στην ουσία χρησιμοποιούμε τη μέθοδο του δυναμικού σημείου.

Βοήθεια 8

Το ίχνος μπορεί να εμφανιστεί, αν κάνετε δεξί κλικ πάνω στο σημείο και επιλέξετε την εμφάνιση του ίχνους.

Η συνάρτηση που θα μπορούσε να συνδέει τα δύο μεγέθη, δηλαδή την απόσταση d με την γωνία ω, θα έχει γραφική παράσταση εκείνη που γράφει το σημείο M.

Η συνάρτηση αυτή είναι προφανώς τριγωνομετρική και θα προκύψει από το ορθογώνιο τρίγωνο OBA.



Παρατηρήστε ότι $εφω=\frac{υ}{d}$, από όπου προκύπτει ότι $ω=τοξοεφ(\frac{υ}{d})$. Επομένως, η συνάρτηση που αντιστοιχεί σε αυτή τη σχέση είναι η $f(x)=\arctan(\frac{υ}{x})$, αφού η γωνία ω είναι η εξαρτημένη μεταβλητή y, ενώ το τμήμα d είναι η ανεξάρτητη μεταβλητή x.

Βοήθεια 9

Κατασκευάστε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f που δημιουργήσατε στο προηγούμενο ερώτημα. Παρατηρήστε τη θέση του σημείου M ως προς τη γραφική παράσταση. Σύρετε το σημείο B και παρατηρήστε την πορεία του σημείου M. Αν το σημείο M κινηθεί πάνω στη γραφική παράσταση της f, τότε η συνάρτηση f είναι η κατάλληλη.

Μεταβάλλετε το μήκος του AB, σύροντας το σημείο A. Στη συνέχεια σύρετε το σημείο B, ώστε να εμφανιστεί η νέα γραφική παράσταση. Ποια η σχέση μεταξύ της νέας γραφικής παράστασης με την ήδη υπάρχουσα;

ΜΕΛΕΤΗ ΦΩΤΟΓΡΑΦΙΑΣ

Βοήθεια 1

Στην αρχή επαναλάβετε αρκετές φορές το εξής πείραμα: Συγκεντρώστε το βλέμμα σας σε ένα διάδρομο με αρκετό βάθος. Αρχίστε να χαμηλώνετε σταδιακά προς το δάπεδο και στη συνέχεια σηκωθείτε και πάλι αργά, έως ότου βρεθείτε σε όρθια στάση. Προσπαθήστε να επικεντρωθείτε στην εντύπωση που έχετε για το πάτωμα και κυρίως στο τμήμα του που είναι απομακρυσμένο.

Αν δεν διαθέτετε μία ψηφιακή φωτογραφική μηχανή, μπορείτε να χρησιμοποιήσετε τις έτοιμες εικόνες που έχετε στο φύλλο εργασίας. Προσπαθήστε να συνδέσετε την εντύπωση που είχατε κατά τη διάρκεια του πειράματος με τις εικόνες που προκύπτουν κατά τη φωτογράφηση του πατώματος από διαφορετικά ύψη. Για να ερμηνεύσετε με μαθηματικό τρόπο τις μεταβολές στην εικόνα, φτιάξτε ένα γεωμετρικό σχήμα.

Βοήθεια 2

Χρησιμοποιήστε την έννοια της οπτικής γωνίας και λάβετε υπ' όψιν και το ύψος του παρατηρητή. Κατασκευάστε δύο τουλάχιστον σχήματα, στα οποία το ύψος του παρατηρητή να παριστάνεται με διαφορετικό μήκος. Ακόμη, παραστήστε τα πλακάκια του πατώματος ως ευθύγραμμα τμήματα.

Μην ξεχνάτε ότι το φαινόμενο μέγεθος ενός αντικειμένου είναι η γωνία με την οποία το βλέπει ο παρατηρητής.

Βοήθεια 3

Σκεφτείτε ότι οι οριζόντιες γραμμές ανάμεσα στα πλακάκια βρίσκονται σε ίσες αποστάσεις. Επίσης ότι οι γραμμές που βρίσκονται στα άκρα του διαδρόμου είναι στην πραγματικότητα παράλληλες. Κοιτάξτε την πρώτη εικόνα που βρίσκεται στο βιβλίο του μαθητή και συνδυάστε τη με τα συμπεράσματά σας.

Βοήθεια 4

Λάβετε υπ' όψιν ότι αυτό που ελαττώνεται δεν είναι το πραγματικό μέγεθος των αντικειμένων και των αποστάσεων, αλλά το φαινόμενο, δηλαδή η οπτική γωνία. Κατασκευάστε διάφορες οπτικές γωνίες από έναν παρατηρητή για αντικείμενα που είτε βρίσκονται σε ίσες αποστάσεις μεταξύ τους είτε έχουν ίδιο μέγεθος.

Παρατηρήστε τον τρόπο που μεταβάλλεται η οπτική γωνία, όταν παρατηρούνται αντικείμενα που βρίσκονται όλο και μακρύτερα.

ΤΑ ΟΠΤΙΚΑ ΤΟΥ ΕΥΚΛΕΙΔΗ

Βοήθεια 1
Καταρχήν μπορείτε να συζητήσετε την ερμηνεία των όρων με τους φιλολόγους του σχολείου. Το σημαντικό είναι να κάνετε νοηματική απόδοση και όχι απλή μετάφραση, δηλαδή να συσχετίσετε το περιεχόμενο των όρων με την εμπειρία που αποκτήσατε κατά την προηγούμενη δραστηριότητα.

Βοήθεια 2
Στο δεύτερο όρο ο Ευκλείδης περιγράφει τον οπτικό κώνο, στον τέταρτο όρο η ερμηνεία είναι προφανής με βάση το φαινόμενο μέγεθος, ενώ στον πέμπτο όρο να θεωρήσετε ότι ο Ευκλείδης περιγράφει την εντύπωση που δημιουργείται, όταν παρατηρούμε ένα επίπεδο από όλο και μεγαλύτερο ύψος.

Βοήθεια 3
Στην τέταρτη πρόταση ο Ευκλείδης αναφέρεται στην αίσθηση που έχουμε ότι όσο πιο μακριά βρίσκονται ίσα αντικείμενα, τόσο πιο μικρά φαίνονται.

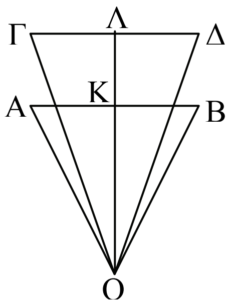
Βοήθεια 4
Παρατηρήστε ότι Ευκλείδης χρησιμοποιεί 3 διαφορετικές γνωστές προτάσεις της Γεωμετρίας. Η μία αναφέρεται στις ίσες γωνίες και τις παράλληλες, η άλλη στην παράλληλη από το μέσον πλευράς τριγώνου και η τελευταία στις ανισοτικές σχέσεις μέσα σε ένα τρίγωνο.

Το σημαντικό είναι να θεωρήσουμε ότι ο Ευκλείδης χρησιμοποιεί τα μαθηματικά εργαλεία της εποχής του, για να μαθηματικοποιήσει την οπτική μας αντίληψη.

Μην ξεχνάτε ότι τότε δεν είχε ακόμη αναπτυχθεί η Τριγωνομετρία, όπως τουλάχιστον τη γνωρίζουμε σήμερα.

Βοήθεια 5
Εδώ έχει ιδιαίτερη σημασία ο όρος «ανισοπλατή», ο οποίος, βέβαια, σημαίνει ότι το πλάτος βαίνει συνεχώς μειούμενο, ενώ μπορεί να αποδοθεί και με τη φράση «συγκλίνουν οι παράλληλες».

Βοήθεια 6
Κατασκευάστε δύο τρίγωνα με ίσες βάσεις ΑΒ=ΓΔ και φέρτε τα ύψη τους ΟΚ και ΟΛ που προφανώς βρίσκονται στην ίδια ευθεία.



Να συγκρίνεται τις γωνίες στα ορθογώνια τρίγωνα ΟΛΔ και ΟΚΒ/\. Προσέξτε ότι τα τα τρίγωνα αυτά έχουν μία γωνία ίση (την ορθή), μία πλευρά ίση (ΚΒ=ΛΔ) και τις πλευρές ΟΛ και ΟΚ άνισες

Βοήθεια 7
Σκεφτείτε ότι έχει ουσιαστικά μαθηματικοποιήσει τον τρόπο με τον οποίο αντιλαμβανόμαστε τα πράγματα μέσα στο χώρο.

Η ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

Βοήθεια 1
Μελετήστε τον τρόπο με τον οποίο αντιμετωπίσατε το συγκεκριμένο πρόβλημα στις **εισαγωγικές δραστηριότητες**.

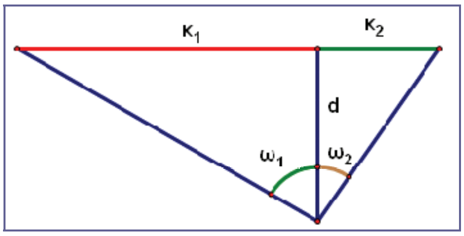
Βοήθεια 2
Χρησιμοποιήστε τον τύπο που εκφράζει την εφαπτομένη της διαφοράς δύο γωνιών.

Βοήθεια 3
Μελετήστε τη συνάρτηση που κατασκευάσατε. Συγκεκριμένα, ο τύπος της συνάρτησης και η θέση της μεταβλητής χ στον παρονομαστή μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι πρόκειται για μία φθίνουσα συνάρτηση.

Βοήθεια 4
Εδώ, αν φέρετε το ύψος του ισοσκελούς τριγώνου, μπορείτε να χωρίσετε τη γωνία σε δύο επιμέρους γωνίες.

Βοήθεια 5
Η σχέση μπορεί να κατασκευαστεί με πολλούς τρόπους. Ένας από αυτούς είναι να θεωρήσετε την εφαπτομένη της γωνίας ω ως εφαπτομένη αθροίσματος δύο γωνιών και να εργασθείτε παρόμοια με το προηγούμενο ερώτημα. Έχει ενδιαφέρον να αναζητήσετε και άλλους τρόπους σύνδεσης της ω με το ύψος και το τμήμα κ. Θυμηθείτε διάφορα θεωρήματα της Τριγωνομετρίας.

Βοήθεια 6
Μία ενδεικτική συσχέτιση μεταξύ της γωνίας $\omega=\omega_1+\omega_2$ και της απόστασης d θα μπορούσε να πραγματοποιηθεί ως εξής:



Αφού $\omega=\omega_1+\omega_2$, άρα $εφ\omega=εφ(\omega_1+\omega_2)$…

Βοήθεια 7
Παρατηρήστε ότι η φαινόμενη απόσταση των παραλλήλων, δηλαδή η οπτική γωνία του παρατηρητή, συνεχώς ελαττώνεται σε συνάρτηση με το βάθος d.

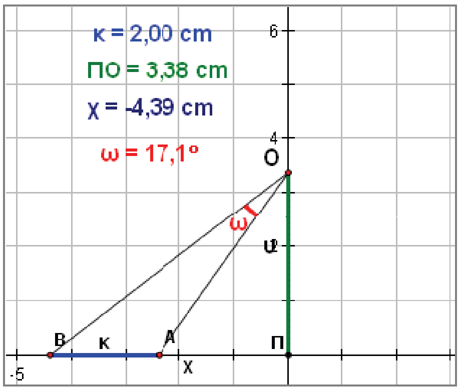
ΔΥΝΑΜΙΚΑ ΜΟΝΤΕΛΑ

Φύλλο εργασίας 1

Βοήθεια 1
Αποφασίστε ποια θα είναι τα μεταβαλλόμενα μεγέθη. Ενδεικτικά, θα μπορούσαμε να επιλέξουμε: το ύψος ΟΠ του παρατηρητή, το μήκος κ για το πλακάκι και την απόσταση του χ από τον παρατηρητή. Για την κατασκευή του μοντέλου παρατηρήστε στην εικόνα της ερώτησης 1 ότι μπορείτε να χρησιμοποιήσετε ένα σημείο στον άξονα ψ΄ψ. Το τμήμα κ θα το κατασκευάσετε μεταβαλλόμενο, με ένα μεταβολέα πάνω στον άξονα χ΄χ.

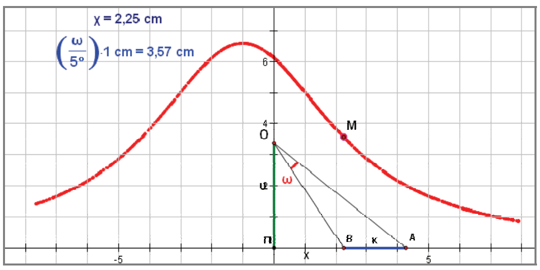
Βοήθεια 2
Παρατηρήστε ότι αν το πλακάκι κ φτάσει στο σημείο που υποτίθεται ότι βρίσκεται ο παρατηρητής, τότε η γωνία γίνεται μέγιστη.

Βοήθεια 4
Αν κατασκευάσετε το δυναμικό μοντέλο, τότε μπορείτε να χρησιμοποιήσετε τις μετρήσεις της γωνίας που κάνει το λογισμικό.



Για να εφαρμόσετε τη μέθοδο του δυναμικού σημείου, θα πρέπει να μετατρέψετε τη μέτρηση της γωνίας σε μέτρηση μήκους, ώστε να γίνει δυνατή η μεταφορά του δυναμικού σημείου κατακόρυφα. Ένας τρόπος για να γίνει αυτό είναι να διαιρέσετε τη μέτρηση της γωνίας με 1^{o} (ή 1 rad) και στη συνέχεια να πολλαπλασιάσετε τη μέτρηση με 1 cm. Εδώ όμως προκύπτει το πρόβλημα των πολύ μεγάλων τιμών, όταν η γωνία μετράται σε μοίρες, ή των πολύ μικρών τιμών, όταν η γωνία μετράται σε ακτίνια. Μία λύση είναι να διαιρέσετε ή να πολλαπλασιάσετε τη μέτρηση της γωνίας με έναν κατάλληλο αριθμό, ώστε η μέτρηση να γίνεται με τιμές συμβατές με το ορατό μέρος της οθόνης. Στην περίπτωση αυτή, η γραφική παράσταση που θα προκύψει προφανώς θα ανήκει στο πηλίκο ή το γινόμενο της ζητούμενης συνάρτησης με τον αριθμό που έχει χρησιμοποιηθεί.

Βοήθεια 5
Μία δυνατή γραφική παράσταση είναι η παρακάτω:



Παρατηρήστε και εξηγήστε το σημείο στο οποίο εμφανίζεται το μέγιστο. Επίσης παρατηρήστε ότι η γραφική παράσταση πλησιάζει συνεχώς τον άξονα χ΄χ και εξηγήστε γιατί συμβαίνει αυτό.

Βοήθεια 6
Μεταβάλλετε τις τιμές του κ και κατασκευάστε 3-4 διαφορετικές παραστάσεις για τις αντίστοιχες τιμές του κ. Παρατηρήστε ότι οι διαφορετικές παραστάσεις που προκύπτουν παρουσιάζουν μέγιστο στο ίδιο σημείο.

Βοήθεια 7
Ερμηνεύστε τις διάφορες γραφικές παραστάσεις με βάση την οπτική μας αντίληψη.

Φύλλο εργασίας 2

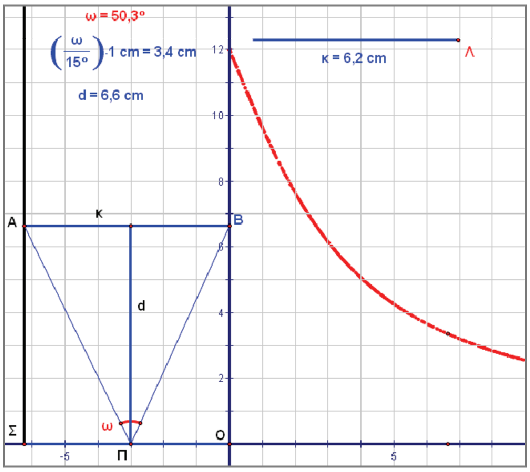
Βοήθεια 1

Ορίστε και πάλι τα δύο μεγέθη που θα πρέπει να συνδεθούν με τα d και ω. Επιπλέον, το μήκος κ θα αποτελέσει την παράμετρο, της οποίας οι μεταβολές θα μελετηθούν σε σχέση με τη γραφική παράσταση που θα προκύψει.

Βοήθεια 3

Εργαστείτε όπως και στο προηγούμενο φύλλο εργασίας, κάνοντας τις κατάλληλες μετατροπές των μοιρών σε εκατοστά.

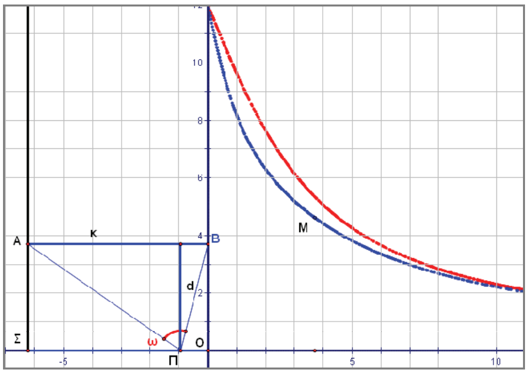
Ένα ενδεικτικό μοντέλο με το λογισμικό θα μπορούσε να είναι αυτό που εμφανίζεται στην παρακάτω εικόνα.



Το σημείο Π, που παριστάνει τον παρατηρητή, θα πρέπει να είναι μεταβαλλόμενο.

Βοήθεια 4

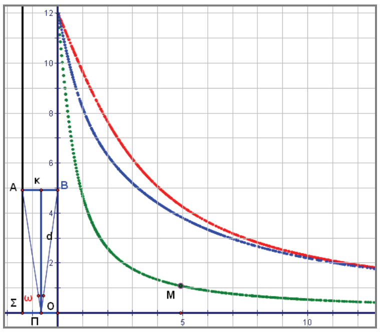
Εφαρμόστε τη μέθοδο του δυναμικού σημείου για διάφορες θέσεις του Π. Παρατηρήστε τις μεταβολές που υφίσταται η γραφική παράσταση.



Εξηγήστε γιατί δημιουργούνται αυτές οι μεταβολές.

Βοήθεια 5

Παρατηρήστε τη γραφική παράσταση να μεταβάλλεται και εξηγήστε τη σημασία των μεταβολών αυτών στην οπτική μας αντίληψη.

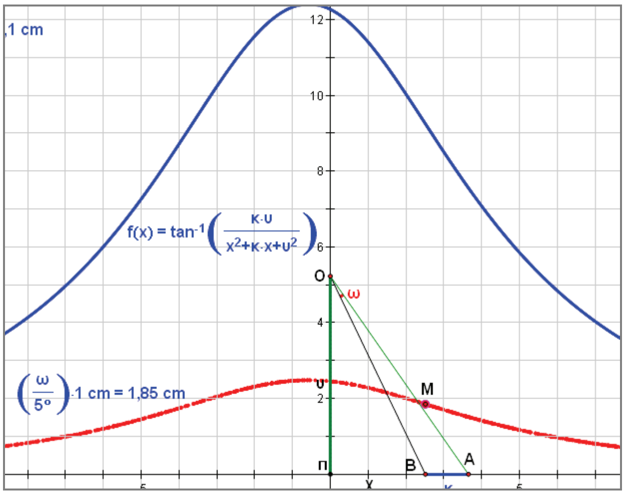


Βοήθεια 6

Εξηγήστε τις μορφές της γραφικής παράστασης σύμφωνα με τον τύπο που κατασκευάσατε στην προηγούμενη δραστηριότητα.

Βοήθεια 7

Φτιάξτε με τη βοήθεια του λογισμικού τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων που κατασκευάσατε στην προηγούμενη δραστηριότητα. Συγκρίνετε τις δύο καμπύλες και βρείτε τις ομοιότητες και τις διαφορές τους.



Υπάρχει προφανώς περίπτωση οι δύο γραφικές παραστάσεις να μη συμπίπτουν. Στην παραπάνω εικόνα οι παραστάσεις δεν συμπίπτουν, αφού αυτή που κατασκευάστηκε με το δυναμικό σημείο προέκυψε από τη διαίρεση των τιμών της γωνίας με το 5.